Математические заметки

Том 108 выпуск 6 декабрь 2020

УДК 517.956.4

Отсутствие глобальных слабых решений для эволюционных уравнений с дробным лапласианом

А. З. Фино, Е. И. Галахов, О. А. Салиева

В этой статье мы рассматриваем нелокальное нелинейное параболическое уравнение с дробным лапласианом. Мы показываем отсутствие нетривиальных глобальных слабых решений, используя метод пробных функций. Попутно мы получаем результат об отсутствии нетривиальных слабых решений для соответствующего эллиптического случая.

Библиография: 18 названий.

Ключевые слова: параболические уравнения, дробный лапласиан, разрушение решений.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12931

1. Введение. В настоящей работе мы исследуем задачу Коши для нелокального нелинейного параболического уравнения

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\beta/2}(|u|^p) = |u|^q, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1}$$

где $u_0 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, $N \geqslant 1$, $0 < \beta < 2$, $p > 0$, $q > 1$ и нелокальный оператор $(-\Delta)^{\beta/2}$ определен как

$$(-\Delta)^{\beta/2} v(x) := \mathscr{F}^{-1}(|\xi|^\beta \mathscr{F}(v)(\xi))(x)$$

для любого $v \in D((-\Delta)^{\beta/2}) = H^\beta(\mathbb{R}^N)$, где $H^\beta(\mathbb{R}^N)$ – однородное пространство Соболева порядка β, определенное как

$$H^\beta(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^N); (-\Delta)^{\beta/2} u \in L^2(\mathbb{R}^N)\} \qquad \text{при} \quad \beta \notin \mathbb{N},$$

где $\mathscr{F}$ означает преобразование Фурье, $\mathscr{F}^{-1}$ – обратное преобразование Фурье, Γ – гамма-функция Эйлера.

Для начала сформулируем

Определение 1. Пусть $u_0 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, $0 < \beta < 2$ и $T > 0$. Будем называть u *слабым решением задачи* (1), если $u \in L^p((0,T), L^{2p}(\mathbb{R}^N)) \cap L^q((0,T), L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N))$ удов-

Работа проделана при частичной поддержке Программы 5-100 РУДН.

© А. З. Фино, Е. И. Галахов, О. А. Салиева, 2020

летворяет уравнению

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)\,dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \varphi(x,t)\,dx\,dt$$
$$= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p (-\Delta)^{\beta/2}\varphi\,dx\,dt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u\varphi_t(x,t)\,dx\,dt \tag{2}$$

для всех $\varphi \in C([0,T], H^\beta(\mathbb{R}^N)) \cap C^1([0,T], L^\infty(\mathbb{R}^N))$ с компактным носителем, для которых $\varphi(\,\cdot\,,T) = 0$.

Наши основные результаты следующие.

Теорема 1. *Пусть* $0 < \beta < 2$, $p > 0$ *и* $q > 1$. *При* $u_0 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, $u_0 \geqslant 0$, *если*

$$p < q \leqslant p + \frac{\beta}{N},$$

то задача (1) *не имеет нетривиальных глобальных слабых решений.*

Теорема 2. *Пусть* $0 < \beta < 2$, $p > 0$ *и* $q > 1$. *Для* $u_0 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ *предположим, что существует константа* $\varepsilon > 0$ *такая, что для всех* $0 < \gamma < N$ *начальная функция удовлетворяет следующему условию*:

$$u_0(x) \geqslant \varepsilon(1 + |x|^2)^{-\gamma/2}.$$

Если

$$p < q < p + \frac{\beta}{\gamma},$$

то задача (1) *не имеет глобальных слабых решений.*

Мы доказываем эти теоремы отсутствия, используя модификацию метода пробных функций Чжана [1], Митидиери и Похожаева [2], [3], а также Кирана и др. [4]–[6]; он также применялся Барасом и Керснером [7] для исследования необходимых условий существования локальных решений. Однако представляется невозможным использовать этот метод напрямую, так как он изначально был разработан для других типов дифференциальных операторов, таких как целые степени лапласиана. Но известно [8], что многие уравнения и неравенства, содержащие такие операторы, имеют сравнительно малые множества решений. Например, гармоническими функциями (решениями уравнения Лапласа) невозможно аппроксимировать произвольную функцию, имеющую внутренние точки экстремума (отметим, что в одномерном случае гармонические функции с необходимостью являются аффинными). Эта малочисленность решений облегчает отыскание дополнительных нелинейных слагаемых, исключающих существование каких-либо нетривиальных решений вообще.

Напротив, множества решений для задач с дифференциальными операторами нецелого порядка обычно гораздо обширнее; иногда они даже локально плотны в пространстве $C(\mathbb{R}^n)$, как в случае s-гармонических функций (u таких, что $(-\Delta)^s u = 0$); см. [9], [10] для случая $0 < s < 1$ и [8], [11] для $s > 1$. Поэтому чтобы получить результаты об отсутствии решений в этой ситуации, требуется исключить существование решений из этого более обширного множества. Таким образом, проблема отсутствия решений в задачах с операторами нецелого порядка является более тонкой и

требует существенной модификации известных методов. Насколько нам известно, результаты такого рода до сих пор были получены только в немногих частных случаях, например, в [12] для систем эллиптических уравнений, содержащих дробные степени лапласиана, и вторым и третьим авторами настоящей работы в [13]–[15] для некоторых (преимущественно эллиптических) неравенств и их систем с такими же операторами. Здесь мы переносим эти результаты на эволюционную задачу (1), не охваченную предыдущими результатами.

Отметим, что для предельного случая $\beta \to 2$ теорема 1 доказана в [2; теорема 29.1], а утверждение теоремы 2 может быть получено аналогично.

На протяжении этой статьи положительные константы обозначаются буквой C и могут меняться от строки к строке.

Оставшаяся часть статьи состоит из двух пунктов и приложения. В п. 2 мы доказываем теорему 1, а в п. 3 – теорему 2. В приложении мы приводим доказательство неравенства Чжу, используемого в п. 2.

2. Доказательство теоремы 1. Доказательство проводится от противного. Предположим, что u – глобальное слабое решение (1); тогда при всех $T \gg 1$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)\,dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \varphi(x,t)\,dx\,dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p (-\Delta)^{\beta/2}\varphi\,dx\,dt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u\varphi_t(x,t)\,dx\,dt$$

для всех пробных функций $\varphi \in C([0,T], H^\beta(\mathbb{R}^N)) \cap C^1([0,T], L^\infty(\mathbb{R}^N))$ таких, что $\operatorname{supp}\varphi$ компактен с $\varphi(\,\cdot\,,T) = 0$. Теперь возьмем

$$\varphi(x,t) := \varphi_1^\ell(x)\varphi_2^\eta(t), \qquad \text{с} \quad \varphi_1(x) := \Phi\left(\frac{|x|}{T^\alpha}\right), \quad \varphi_2(t) := \Phi\left(\frac{t}{T}\right),$$

где $\alpha = (q-p)/(\beta(q-1))$, $\ell, \eta \gg 1$ и Φ – гладкая неотрицательная невозрастающая функция такая, что

$$\Phi(r) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leqslant r \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 0 & \text{при } r \geqslant 1. \end{cases}$$

Получим

$$\int_{\Omega_T} u_0(x)\varphi_1^\ell(x)\,dx + \int_0^T \int_{\Omega_T} |u|^q \varphi(x,t)\,dx\,dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \varphi_2^\eta(t)(-\Delta)^{\beta/2}(\varphi_1^\ell(x))\,dx\,dt - \int_0^T \int_{\Omega_T} u\varphi_1^\ell(x)\,\frac{d}{dt}\,\varphi_2^\eta(t)\,dx\,dt,$$

где

$$\Omega_T := \{x \in \mathbb{R}^N;\ |x| \leqslant T^\alpha\}. \tag{3}$$

Используя неравенство Чжу $(-\Delta)^{\beta/2}(\varphi_1^\ell) \leqslant \ell\varphi_1^{\ell-1}(-\Delta)^{\beta/2}(\varphi_1)$ (см. приложение) и то, что $u_0 \geqslant 0$, будем иметь

$$\int_0^T \int_{\Omega_T} |u|^q \varphi(x,t)\,dx\,dt \leqslant C \int_0^T \int_{\Omega_T} |u|^p \varphi_2^\eta(t)\varphi_1^{\ell-1}(x)(-\Delta)^{\beta/2}(\varphi_1(x))\,dx\,dt + C\int_0^T \int_{\Omega_T} |u|\varphi_1^\ell(x)\varphi_2^{\eta-1}(t)\left|\frac{d}{dt}\,\varphi_2(t)\right|\,dx\,dt$$

$$\leqslant C\int_0^T\int_{\Omega_T}|u|^p\varphi^{p/q}\varphi^{-p/q}\varphi_2^{\eta}(t)\varphi_1^{\ell-1}(x)|(-\Delta)^{\beta/2}(\varphi_1(x))|\,dx\,dt$$
$$+C\int_0^T\int_{\Omega_T}|u|\varphi^{1/q}\varphi^{-1/q}\varphi_1^{\ell}(x)\varphi_2^{\eta-1}(t)\left|\frac{d}{dt}\varphi_2(t)\right|dx\,dt. \tag{4}$$

Поэтому, применяя неравенство Юнга

$$ab\leqslant\frac{1}{4}a^{q/p}+Cb^{q/(q-p)} \tag{5}$$

с

$$\begin{cases}a=|u|^p\varphi^{p/q},\\ b=C\varphi^{-p/q}\varphi_2^{\eta}(t)\varphi_1^{\ell-1}(x)|(-\Delta)^{\beta/2}(\varphi_1(x))|\end{cases} \tag{6}$$

к первому интегралу в правой части (4) и следующее неравенство Юнга

$$ab\leqslant\frac{1}{4}a^q+Cb^{\widetilde{q}},\qquad \text{где } \widetilde{q}=\frac{q}{q-1}, \tag{7}$$

с

$$\begin{cases}a=|u|\varphi^{1/q},\\ b=C\varphi^{-1/q}\varphi_1^{\ell}(x)\varphi_2^{\eta-1}(t)\left|\dfrac{d}{dt}\varphi_2(t)\right|\end{cases} \tag{8}$$

ко второму интегралу в правой части (4), получим

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Omega_T}|u|^q\varphi(x,t)\,dx\,dt$$
$$\leqslant C\int_0^T\int_{\Omega_T}\varphi_2^{\eta}(t)\varphi_1^{\ell-q/(q-p)}(x)|(-\Delta)^{\beta/2}(\varphi_1(x))|^{q/(q-p)}\,dx\,dt$$
$$+C\int_0^T\int_{\Omega_T}\varphi_1^{\ell}(x)\varphi_2^{\eta-\widetilde{q}}(t)\left|\frac{d}{dt}\varphi_2(t)\right|^{\widetilde{q}}dx\,dt. \tag{9}$$

На этом этапе, масштабируя переменные $s=T^{-1}t$, $y=T^{-\alpha}x$ в правой части (9), приходим к выводу, что

$$\int_0^T\int_{\Omega_T}|u|^q\varphi(x,t)\,dx\,dt\leqslant CT^{-\delta}, \tag{10}$$

где $\delta:=q/(q-1)-N\alpha-1$. Далее, замечая, что

$$q\leqslant q^*:=p+\frac{\beta}{N}\quad\Longleftrightarrow\quad\delta\geqslant 0,$$

мы должны различать два случая.

Случай 1: $q<q^*$ (т.е. $\delta>0$). Перейдя к пределу в (10) при $T\to\infty$, получим

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T\int_{|x|\leqslant T^{\alpha}}|u|^q\varphi(x,t)\,dx\,dt=0.$$

Используя теорему Лебега об ограниченной сходимости и то, что $\varphi(x,t) \to 1$ при $T \to \infty$, мы делаем вывод, что

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q(x,t)\,dx\,dt = 0,$$

и в силу непрерывности u по временной и пространственным переменным мы заключаем, что $u \equiv 0$.

Случай 2: $q = q^*$ (т.е. $\delta = 0$). Применяя неравенство (10) с $T \to \infty$ и учитывая, что $q = q^*$, имеем

$$u \in L^q((0,\infty), L^q(\mathbb{R}^N)),$$

откуда следует

$$\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty} \int_{T/2}^T \int_{|x|\leqslant (BT)^\alpha} |u|^q \varphi(x,t)\,dx\,dt \\
&\quad = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \int_{|x|\leqslant (BT)^\alpha} |u|^q \varphi(x,t)\,dx\,dt - \lim_{T\to\infty} \int_0^{T/2} \int_{|x|\leqslant (BT)^\alpha} |u|^q \varphi(x,t)\,dx\,dt \\
&\quad = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \varphi(x,t)\,dx\,dt - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \varphi(x,t)\,dx\,dt = 0. \qquad (11)
\end{aligned}$$

С другой стороны, повторяя те же вычисления, что выше, на этот раз с использованием $\varphi_1(x) := \Phi(|x|/(B^\alpha T^\alpha))$, где $1 \leqslant B < T$ достаточно велико и при $T \to \infty$ в то же время не имеет места $B \to \infty$, и применяя неравенство Гёльдера

$$\int ab \leqslant \left(\int a^q\right)^{1/q} \left(\int b^{\widetilde{q}}\right)^{1/\widetilde{q}} \qquad \text{с} \qquad \begin{cases} a = |u|\varphi^{1/q}, \\ b = \varphi^{-1/q}\varphi_1^\ell(x)\varphi_2^{\eta-1}(t)\left|\dfrac{d}{dt}\varphi_2(t)\right| \end{cases}$$

ко второму интегралу в правой части (4) вместо неравенства Юнга, приходим к

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\Omega_{BT}} |u|^q \varphi(x,t)\,dx\,dt \\
&\quad \leqslant \frac{1}{4} \int_0^T \int_{\Omega_{BT}} |u|^q \varphi(x,t)\,dx\,dt \\
&\qquad + C \int_0^T \int_{\Omega_{BT}} \varphi_2^\eta(t)\varphi_1^{\ell-q/(q-p)}(x)|(-\Delta)^{\beta/2}(\varphi_1(x))|^{q/(q-p)}\,dx\,dt \\
&\qquad + C\left(\int_{T/2}^T \int_{\Omega_{BT}} |u|^q \varphi(x,t)\,dx\,dt\right)^{1/q} \left(\int_0^T \int_{\Omega_{BT}} \varphi_1^\ell(x)\varphi_2^{\eta-\widetilde{q}}(t)\left|\frac{d}{dt}\varphi_2(t)\right|^{\widetilde{q}}\,dx\,dt\right)^{1/\widetilde{q}},
\end{aligned}$$

где $\Omega_{BT} := \{x \in \mathbb{R}^N;\ |x| \leqslant (BT)^\alpha\}$; поэтому

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\Omega_{BT}} |u|^q \varphi(x,t)\,dx\,dt \\
&\quad \leqslant C \int_0^T \int_{\Omega_{BT}} \varphi_2^\eta(t)\varphi_1^{\ell-q/(q-p)}(x)|(-\Delta)^{\beta/2}(\varphi_1(x))|^{q/(q-p)}\,dx\,dt \\
&\qquad + C\left(\int_{T/2}^T \int_{\Omega_{BT}} |u|^q \varphi(x,t)\,dx\,dt\right)^{1/q} \left(\int_0^T \int_{\Omega_{BT}} \varphi_1^\ell(x)\varphi_2^{\eta-\widetilde{q}}(t)\left|\frac{d}{dt}\varphi_2(t)\right|^{\widetilde{q}}\,dx\,dt\right)^{1/\widetilde{q}}.
\end{aligned}$$

Используя следующее масштабирование: $s = T^{-1}t$, $y = (TB)^{-\alpha}x$ и учитывая, что $q = q^*$, мы легко можем сделать вывод, что

$$\int_0^T \int_{\Omega_{BT}} |u|^q \varphi(x,t)\,dx\,dt \leqslant CB^{-1} + C(B^{N\alpha})^{1/\widetilde{q}} \biggl(\int_{T/2}^T \int_{\Omega_{BT}} |u|^q \varphi(x,t)\,dx\,dt \biggr)^{1/q}.$$

Поэтому, переходя к пределу при $T \to \infty$ и затем при $B \to \infty$, используя (11), получим

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q(x,t)\,dx\,dt = 0,$$

т.е. $u \equiv 0$. Это завершает доказательство.

3. Доказательство теоремы 2. Доказательство также проводится от противного теми же рассуждениями, что и в п. 2. Предположим, что u – глобальное слабое решение (1), тогда при $T \gg 1$ имеем

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)\,dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \varphi(x,t)\,dx\,dt \\ &\qquad = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p (-\Delta)^{\beta/2}\varphi\,dx\,dt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u\varphi_t(x,t)\,dx\,dt \end{aligned} \tag{12}$$

для всех пробных функций $\varphi \in C([0,T], H^\beta(\mathbb{R}^N)) \cap C^1([0,T], L^\infty(\mathbb{R}^N))$ таких, что $\operatorname{supp}\varphi$ компактен, с $\varphi(\,\cdot\,,T) = 0$.

Используя такие же пробные функции $\varphi(x,t)$, что и выше, имеем

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_T} u_0(x)\varphi_1^\ell(x)\,dx + \int_0^T \int_{\Omega_T} |u|^q \varphi(x,t)\,dx\,dt \\ &\qquad = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \varphi_2^\eta(t)(-\Delta)^{\beta/2}(\varphi_1^\ell(x))\,dx\,dt - \int_0^T \int_{\Omega_T} u\varphi_1^\ell(x)\,\frac{d}{dt}\,\varphi_2^\eta(t)\,dx\,dt, \end{aligned}$$

где Ω_T задана формулой (3). Используя неравенство Чжу

$$(-\Delta)^{\beta/2}(\varphi_1^\ell) \leqslant \ell\varphi_1^{\ell-1}(-\Delta)^{\beta/2}(\varphi_1),$$

получим

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\Omega_T} |u|^q \varphi(x,t)\,dx\,dt + \int_{\Omega_T} u_0(x)\varphi_1^\ell(x)\,dx \\ &\qquad \leqslant C \int_0^T \int_{\Omega_T} |u|^p \varphi_2^\eta(t)\varphi_1^{\ell-1}(x)(-\Delta)^{\beta/2}(\varphi_1(x))\,dx\,dt \\ &\qquad\qquad + C \int_0^T \int_{\Omega_T} |u|\varphi_1^\ell(x)\varphi_2^{\eta-1}(t) \left| \frac{d}{dt}\,\varphi_2(t) \right| dx\,dt \\ &\qquad \leqslant C \int_0^T \int_{\Omega_T} |u|^p \varphi^{p/q}\varphi^{-p/q}\varphi_2^\eta(t)\varphi_1^{\ell-1}(x)|(-\Delta)^{\beta/2}(\varphi_1(x))|\,dx\,dt \\ &\qquad\qquad + C \int_0^T \int_{\Omega_T} |u|\varphi^{1/q}\varphi^{-1/q}\varphi_1^\ell(x)\varphi_2^{\eta-1}(t) \left| \frac{d}{dt}\,\varphi_2(t) \right| dx\,dt. \end{aligned} \tag{13}$$

Так как $u_0(x) \geqslant \varepsilon(1+|x|^2)^{-\gamma/2}$, то

$$\int_{\Omega_T} u_0(x)\varphi_1^\ell(x)\,dx \geqslant \int_{|x|\leqslant T^\alpha/2} u_0(x)\,dx \geqslant \varepsilon \int_{|x|\leqslant T^\alpha/2} (1+|x|^2)^{-\gamma/2}\,dx \geqslant C\varepsilon T^{\alpha(N-\gamma)}.$$

Поэтому, оценивая правую часть неравенства (13) в точности так же, как это было сделано для правой части неравенства (4) (см. формулы (5)–(8)), получим

$$\begin{aligned} C\varepsilon T^{\alpha(N-\gamma)} &+ \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Omega_T} |u|^q \varphi(x,t)\,dx\,dt \\ &\leqslant C\int_0^T \int_{\Omega_T} \varphi_2^\eta(t)\varphi_1^{\ell-q/(q-p)}(x)|(-\Delta)^{\beta/2}(\varphi_1(x))|^{q/(q-p)}\,dx\,dt \\ &\quad + C\int_0^T \int_{\Omega_T} \varphi_1^\ell(x)\varphi_2^{\eta-\widetilde{q}}(t)\left|\frac{d}{dt}\varphi_2(t)\right|^{\widetilde{q}}\,dx\,dt. \end{aligned} \tag{14}$$

Вновь вводя масштабированные переменные $s = T^{-1}t$, $y = T^{-\alpha}x$ в правой части (14) и учитывая неотрицательность второго слагаемого в левой части (14), мы делаем вывод, что

$$C\varepsilon T^{\alpha(N-\gamma)} \leqslant C_1 T^{-q/(q-1)+N\alpha+1},$$

т.е.

$$\varepsilon \leqslant CT^{-\delta^*}, \tag{15}$$

где $\delta^* := q/(q-1) - N\alpha - 1 + \alpha(N-\gamma)$. Далее, замечая, что

$$q < q^{**} := p + \frac{\beta}{\gamma} \quad \Longleftrightarrow \quad \delta^* > 0,$$

и переходя к пределу в (15) при $T \to \infty$, получаем противоречие.

Замечание 1. Применяя те же вычисления к соответствующему нелокальному эллиптическому уравнению

$$(-\Delta)^{\beta/2}(|u|^p) = |u|^q, \qquad x \in \mathbb{R}^N, \tag{16}$$

где $N \geqslant 1$, $0 < \beta \leqslant 2$, $p > 0$, и $q > 1$, мы можем получить следующий результат: если

$$p < q < \frac{Np}{(N-\beta)_+},$$

то задача (16) не имеет нетривиальных слабых решений.

Замечание 2. Используя пробную функцию из недавней работы [16], мы можем получить аналогичный результат для следующего уравнения:

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\beta/2}(|u|^{p-1}u) = |u|^q, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

где $p, q > 1$.

Приложение. В этом приложении мы приводим доказательство неравенства Чжу (см. [17; предложение 3.3]) для размерности $N \geqslant 1$, где $\delta \in [0,2]$ и $q \geqslant 1$, для всех неотрицательных распределений Шварца ψ (в общем случае)

$$(-\Delta)^{\delta/2}\psi^q \leqslant q\psi^{q-1}(-\Delta)^{\delta/2}\psi.$$

Случаи $\delta = 0$ и $\delta = 2$ очевидны, как и $q = 1$. Если $\delta \in (0,2)$ и $q > 1$, используя [18; определение 3.2], будем иметь

$$(-\Delta)^{\delta/2}\psi(x) = -c_N(\delta)\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\psi(x+z)-\psi(x)}{|z|^{N+\delta}}\,dz \qquad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

где $c_N(\delta) = 2^\delta\Gamma((N+\delta)/2)/(\pi^{N/2}\Gamma(1-\delta/2))$. Тогда

$$(\psi(x))^{q-1}(-\Delta)^{\delta/2}\psi(x) = -c_N(\delta)\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(\psi(x))^{q-1}\psi(x+z)-(\psi(x))^q}{|z|^{N+\delta}}\,dz.$$

По неравенству Юнга получим

$$(\psi(x))^{q-1}\psi(x+z) \leqslant \frac{q-1}{q}(\psi(x))^q + \frac{1}{q}(\psi(x+z))^q.$$

Отсюда

$$(\psi(x))^{q-1}(-\Delta)^{\delta/2}\psi(x) \geqslant \frac{-c_N(\delta)}{q}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(\psi(x+z))^q-(\psi(x))^q}{|z|^{N+\delta}}\,dz = \frac{1}{q}(-\Delta)^{\delta/2}(\psi(x))^q.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Q. S. Zhang, “A blow up result for a nonlinear wave equation with damping: the critical case”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **333**:2 (2001), 109–114.

[2] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, “Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных”, Тр. МИАН, **234**, Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2001, 3–383.

[3] С. И. Похожаев, “Существенно нелинейные емкости, индуцированные дифференциальными операторами”, *Докл. АН*, **56** (1997), 924–926.

[4] A. Z. Fino, M. Kirane, “Qualitative properties of solutions to a time-space fractional evolution equation”, *Quart. Appl. Math.*, **70** (2012), 133–157.

[5] М. Гидда, М. Киране, “Критичность для некоторых эволюционных уравнений”, *Дифференц. уравнения*, **37**:4 (2001), 511–520.

[6] M. Kirane, Y. Laskri, N.-E. Tatar, “Critical exponents of Fujita type for certain evolution equations and systems with spatio-temporal fractional derivatives”, *J. Math. Anal. Appl.*, **312**:2 (2005), 488–501.

[7] P. Baras, R. Kersner, “Local and global solvability of a class of semilinear parabolic equations”, *J. Differential Equations*, **68**:2 (1987), 238–252.

[8] A. Carbotti, S. Dipierro, E. Valdinoci, *Local Density of Solutions of Time and Space Fractional Equations*, 2018, arXiv: 1810.08448.

[9] S. Dipierro, H.-C. Grunau, “Boggio’s formula for fractional polyharmonic Dirichlet problems”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **196**:4 (2017), 1327–1344.

[10] S. Dipierro, O. Savin, E. Valdinoci, “All functions are locally s-harmonic up to a small error”, *J. Eur. Math. Soc.* (*JEMS*), **19**:4 (2017), 957–966.

[11] N. V. Krylov, *On the Paper "All Functions are Locally s-Harmonic up to a Small Error" by Dipierro, Savin, and Valdinoci*, 2018, arXiv: 1810.07648.

[12] Z. Dahmani, F. Karami, S. Kerbal, "Nonexistence of positive solutions to nonlinear nonlocal elliptic systems", *J. Math. Anal. Appl.*, **346**:1 (2008), 22–29.

[13] E. Galakhov, O. Salieva, "Nonexistence of solutions of some inequalities with gradient nonlinearities and fractional Laplacian", *Proceedings of EQUADIFF* 2017, SPEKTRUM STU Publishing, Bratislava, 2017, 157–162.

[14] E. I. Galakhov, O. A. Salieva, "Uniqueness of the trivial solution of some inequalities with fractional Laplacian", *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, **2019**:1 (2019), 1–8.

[15] О. А. Салиева, "Отсутствие решений некоторых нелинейных неравенств с дробными степенями оператора Лапласа", *Матем. заметки*, **101**:4 (2017), 588–593.

[16] T. A. Dao, M. Reissig, *A Blow-Up Result for Semi-Linear Structurally Damped σ-Evolution Equations*, 2019, arXiv: 1909.01181v1.

[17] N. Ju, "The maximum principle and the global attractor for the dissipative 2D quasi-geostrophic equations", *Comm. Math. Phys.*, **255**:1 (2005), 161–181.

[18] K. Bogdan, T. Byczkowski, "Potential theory for the α-stable Schrödinger operator on bounded Lipschitz domains", *Studia Math.*, **133**:1 (1999), 53–92.

А. З. Фино
University of Tripoli, Ливан
E-mail: ahmad.fino01@gmail.com

Поступило
17.11.2019
Принята к публикации
29.05.2020

Е. И. Галахов
Российский университет дружбы народов, г. Москва
E-mail: egalakhov@gmail.com

О. А. Салиева
Московский государственный технологический
университет "Станкин"
E-mail: olga.a.salieva@gmail.com