УДК 517.986

ДВОЙСТВЕННОСТЬ ДЛЯ СКРЕЩЕННЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ АЛГЕБР ФОН НЕЙМАНА

А. И. Штерн

Успехи теории операторных алгебр, достигнутые в последние десятилетия, во многом связаны с изучением групп автоморфизмов алгебр фон Неймана. Одним из наиболее мощных средств изучения структуры и свойств этих групп является построение и исследование скрещенных произведений алгебр фон Неймана на действующие на них локально компактные группы автоморфизмов. Будучи естественным — хотя и нетривиальным — обобщением конструкции фон Неймана—Мюррея (позволявшей строить алгебру фон Неймана по динамической системе; в частности, фактор — по эргодической динамической системе), конструкция скрещенного произведения давала надежды на построение еще невиданных факторов — и развитие теории оправдало эти надежды [13, 14]. С другой стороны, теория скрещенных произведений оказалась связанной с плодотворным понятием ковариантного представления. Но, кроме того, выявилась непосредственная связь теории скрещенных произведений с двойственностью Понтрягина для локально компактных абелевых групп и с более общими теориями двойственности — такими, как теорема двойственности Татсуумы, что и привело к специфической теории двойственности для самих скрещенных произведений, оказавшей глубокое влияние на общую теорию алгебр фон Неймана и, в частности, позволившей — с помощью модулярной теории Томиты—Такесаки — получить фундаментальные результаты о структуре факторов типа III.

Настоящая статья посвящена именно этой теории двойственности для скрещенных произведений алгебр фон Неймана. Излагается теория двойственности для так называемых алгебр Каца — одна из наиболее общих современных теорий двойственности, включающая в себя двойственность для локально компактных групп, — и связанная с ней теория двойственности для скрещенных произведений алгебр фон Неймана на действующие на них алгебры Каца*. Этот подход позволяет понять

* Термин «алгебра Каца» введен Еноком и Шварцем [27] в честь Г. И. Каца, основоположника близкой к современной теории алгебр Каца теории так называемых «кольцевых групп» ([2]).

смысл понятия ко-действия локально компактной группы на алгебре фон Неймана и его связь с понятием действия и уяснить роль теории двойственности Понтрягина в (исходной для теории двойственности для скрещенных произведений) теореме Такесаки, относящейся к случаю локально компактных абелевых групп. Теория двойственности для скрещенных произведений имеет многочисленные приложения как в самой теории алгебр фон Неймана, так и за ее пределами. В настоящей статье рассматриваются лишь некоторые приложения теории двойственности, а именно — структурная теория для факторов типа III, пространства L_p над алгебрами фон Неймана (по Хаагерупу), аналог соответствия Галуа между подгруппами группы автоморфизмов и подалгебрами фон Неймана, содержащими алгебру инвариантных элементов, некоторые вопросы спектральной теории действий и приложения к представлениям групп.

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Веса. Пусть M — алгебра фон Неймана, M_+ — множество ее положительных элементов, $U(M)$ — группа ее унитарных элементов. *Весом* на M называется аддитивная функция φ на множестве M_+, принимающая значения в $[0, +\infty] = [0, +\infty) \cup \{\infty\}$, удовлетворяющая условию $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ и всех $x \in M_+$ (где принято $0 \cdot \infty = 0$). Вес φ называется *нормальным*, если он переводит верхние грани направленных вверх сетей из M_+ в верхние грани их образов в $[0, +\infty]$; *точным*, если из условий $x \in M_+$, $\varphi(x) = 0$ следует, что $x = 0$. Пусть $\mathfrak{N}_\varphi = \{x \in M, \varphi(x^*x) < \infty\}$, и пусть $\mathfrak{M}_\varphi = \mathfrak{N}_\varphi^* \mathfrak{N}_\varphi$. Тогда $\mathfrak{N}_\varphi$ — левый идеал в M, $\mathfrak{M}_\varphi$ — инволютивная подалгебра в M. Вес φ называется *полуконечным*, если $\mathfrak{M}_\varphi$ ультраслабо плотна в M. Вес φ однозначно определяет линейный функционал на $\mathfrak{M}_\varphi$, который мы снова обозначим φ.

Определим полускалярное произведение на $\mathfrak{N}_\varphi$, сопоставляя паре x, $y \in \mathfrak{N}_\varphi$ число $\varphi(y^*x)$. Пусть H_φ — гильбертово пространство, получаемое из предгильбертова пространства $\mathfrak{N}_\varphi$ факторизацией по ядру полускалярного произведения и последующим пополнением; пусть Λ_φ — соответствующее отображение идеала $\mathfrak{N}_\varphi$ в гильбертово пространство H_φ. Пусть π_φ — симметричное представление алгебры фон Неймана M в H_φ, сопоставляющее элементу $x \in M$ оператор в H_φ, определяемый левым умножением на x в $\mathfrak{N}_\varphi$ (с последующей факторизацией и продолжением по непрерывности). Тогда, в частности, $(\pi_\varphi(x)\Lambda_\varphi(y), \Lambda_\varphi(z)) = \varphi(z^*xy)$ для всех $x \in M$, $y, z \in \mathfrak{N}_\varphi$; при этом π_φ для любого точного нормального полуконечного веса φ является симметричным изоморфизмом алгебр фон Неймана M и $\pi_\varphi(M)$.

Пусть, кроме того, алгебра M реализована как алгебра фон

Неймана в гильбертовом пространстве H и пусть M' — ее коммутант. Отождествим тогда $\pi_\varphi(M)$ с исходной алгеброй M. Существует такой левый идеал $\mathfrak{N}'_\varphi \subset M'$, что $\mathfrak{M}'_\varphi = \mathfrak{N}'^*_\varphi \mathfrak{N}'_\varphi$ есть ультраслабо плотная инволютивная подалгебра в M'_φ, и существует такое линейное отображение $\Lambda'_\varphi : \mathfrak{N}'_\varphi \to H_\varphi$ с плотным образом, что $\Lambda'_\varphi(x'y') = x'\Lambda'_\varphi(y')$ для всех $x' \in M'$, $y' \in \mathfrak{N}'_\varphi$, причем равенство $x\Lambda'_\varphi(x') = x'\xi$ выполняется для всех $x' \in \mathfrak{N}'_\varphi$ тогда и только тогда, когда $x \in \mathfrak{N}_\varphi$ и $\Lambda_\varphi(x) = \xi$; аналогично, равенство $x'\Lambda_\varphi(x) = x\eta$ выполняется для всех $x \in \mathfrak{N}_\varphi$ тогда и только тогда, когда $x' \in \mathfrak{N}'_\varphi$ и $\Lambda'_\varphi(x') = \eta$. Кроме того, множества $\Lambda_\varphi(\mathfrak{M}_\varphi)$ и $\Lambda'_\varphi(\mathfrak{M}'_\varphi)$ плотны в H_φ, а отображения $S_0 : \Lambda_\varphi(\mathfrak{M}_\varphi) \to H_\varphi$ и $F_0 : \Lambda'_\varphi(\mathfrak{M}'_\varphi) \to H_\varphi$, определенные формулами $S_0(\Lambda_\varphi(x)) = \Lambda_\varphi(x^*)$ и $F_0(\Lambda'_\varphi(x')) = \Lambda'_\varphi(x'^*)$ соответственно, являются предзамкнутыми; их замыкания S_φ и F_φ сопряжены друг другу. Пусть $S_\varphi = J_\varphi \Delta_\varphi^{1/2}$ — полярное разложение замкнутого оператора S_φ. Тогда $\Delta_\varphi^{it} M \Delta_\varphi^{-it} = M$ для всех $t \in \mathbf{R}$; положим $\sigma_t^\varphi(x) = \Delta_\varphi^{it} x \Delta_\varphi^{-it}$ для всех $t \in \mathbf{R}$, $x \in M$. Семейство $\{\sigma_t^\varphi, t \in \mathbf{R}\}$ является однопараметрической группой автоморфизмов алгебры фон Неймана M; эта группа называется модулярной группой, связанной с весом φ. Оператор J_φ — сопряженно линейная изометрическая инволюция — называется *модулярной инволюцией*, а самосопряженный положительный оператор Δ_φ — *модулярным оператором*. Справедливо соотношение

$$J_\varphi M J_\varphi = M', \tag{1}$$

при этом элементы z из центра $Z_M = M \cap M'$ алгебры фон Неймана M удовлетворяют равенству $J_\varphi z J_\varphi = z^*$. Пусть P_φ — конус в H_φ, являющийся замыканием множества векторов вида $\pi_\varphi(x) J_\varphi \Lambda_\varphi(x)$, $x \in \mathfrak{N}_\varphi$. Тогда P_φ — *самодуальный* конус (т. е. P_φ совпадает с множеством таких векторов $\eta \in H_\varphi$, что $(\eta, \zeta)_{H_\varphi} \geqslant 0$ для всех $\zeta \in P_\varphi$), причем $P_\varphi \cap (-P_\varphi) = \{0\}$. Конус P_φ удовлетворяет также условию $J_\varphi \xi = \xi$ для всех $\xi \in P_\varphi$ и условию $xJ_\varphi x(P_\varphi) \subset \subset P_\varphi$ для всех $x \in M$.

Пусть $P(M)$ — семейство всех точных нормальных полуконечных (ТНПК) весов на алгебре фон Неймана M. Для любой пары φ, $\psi \in P(M)$ существует сильно непрерывное однопараметрическое семейство $t \to (D\psi : D\varphi)_t$ со значениями в $U(M)$, удовлетворяющее следующим условиям: 1) $(D\psi : D\varphi)_t \sigma_t^\varphi(x) = \sigma_t^\psi(x) = (D\psi : D\varphi)_t$ для всех $t \in \mathbf{R}$, $x \in M$; 2) $(D\psi : D\varphi)_{t+s} = (D\psi : D\varphi)_t \sigma_t^\varphi((D\psi : D\varphi)_s)$ при t, $s \in \mathbf{R}$; 3) $(D\psi : D\varphi)_t^* = (D\varphi : D\psi)_t$, $(D\psi : D\varphi)_t (D\varphi : D\omega)_t = (D\psi : D\omega)_t$ для всех φ, ψ, $\omega \in P(M)$ и всех $t \in \mathbf{R}$; 4) соотношение $\psi(x) = \varphi(uxu^*)$ выполняется для всех $x \in M$ и некоторого $u \in U(M)$ в том и только том случае, если $(D\psi : D\varphi)_t = u^* \sigma_t^\varphi(u)$ для всех $t \in \mathbf{R}$.

Пусть M_1, M_2 — алгебры фон Неймана, $\varphi_1 \in P(M_1)$, $\varphi_2 \in P(M_2)$. Существует единственный вес $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ на тензорном произведении $M_1 \otimes M_2$, определяемый условиями: 1) $\mathfrak{M}_{\varphi_1} \otimes \mathfrak{M}_{\varphi_2} \subset \mathfrak{M}_{\varphi_1 \otimes \varphi_2}$, 2) $(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(x \otimes y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$ для всех $x \in \mathfrak{M}_{\varphi_1}$, $y \in \mathfrak{M}_{\varphi_2}$; 3) $\sigma_t^{\varphi_1 \otimes \varphi_2} = \sigma_t^{\varphi_1} \otimes \sigma_t^{\varphi_2}$ для всех $t \in \mathbf{R}$. Все $\varphi_1 \otimes \varphi_2 \in P(M_1 \otimes M_2)$ называется тензорным произведением весов φ_1 и φ_2.

2. **Стандартные формы.** Алгебра фон Неймана M называется *стандартной*, или заданной в *стандартной форме* относительно (H, J, P), если M действует в гильбертовом пространстве H, снабженном такой сопряженно линейной изометрической инволюцией J и таким самодуальным конусом P, что $JMJ' = M'$, $JzJ = z^*$ для всех $z \in Z_M = M \cap M'$, $J\eta = \eta$ для всех $\eta \in P$ и $xJx(P) \subset P$ для всех $x \in M$. Стандартная форма (M, J, P, H) единственна с точностью до изоморфизма, т. е. различные стандартные формы (M, J, P, H) и (M_1, J_1, P_1, H_1) одной и той же алгебры фон Неймана сопряжены с помощью унитарного оператора из H в H_1, переводящего M в M_1, J в J_1 и H в H_1.

Пусть $\varphi \in P(M)$; тогда $(\pi_\varphi(M), H_\varphi, J_\varphi, P_\varphi)$ — стандартная форма. В связи с ее единственностью для любых φ, $\psi \in P(M)$ определено отображение $\Lambda_\varphi(x) \to \Lambda_\psi(x^*)$, где x пробегает множество $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\psi^*$. Это отображение предзамкнуто как оператор из H_φ в H_ψ; пусть $S_{\psi,\varphi}$ — его замыкание и пусть $S_{\psi,\varphi} = J_{\psi,\varphi}\Delta_{\psi,\varphi}^{1/2}$ — полярное разложение оператора $S_{\psi,\varphi}$. Тогда $\Delta_{\psi,\varphi}^{it} = (D\psi : D\varphi)_t \Delta_\varphi^{it}$ для всех $t \in \mathbf{R}$. Пусть $\sigma_t^{\psi,\varphi}(x) = (D\psi : D\varphi)_t \sigma_t^\varphi(x)$ $(= \sigma_t^\psi(x)(D\psi : D\varphi)_t)$ для всех $x \in M$, φ, $\psi \in P(M)$, $t \in \mathbf{R}$. Тогда $t \to \sigma_t^{\psi,\varphi}$ — однопараметрическая группа изометрий алгебры фон Неймана M, причем $\sigma_t^{\psi,\varphi}(xy) = \sigma_t^{\varphi,\omega}(x)\sigma_t^{\omega,\varphi}(y)$ для всех x, $y \in M$, φ, ψ, $\omega \in P(M)$. Если алгебра фон Неймана M стандартна относительно (H, J, P), то для любого $\varphi \in P(M)$ можно из-за единственности стандартной формы так отождествить H с H_φ, что $J_\varphi = J$, $P_\varphi = P$. Тогда $J_{\psi,\varphi} \equiv J$.

3. **Группа автоморфизмов.** Пусть M — алгебра фон Неймана, M_* — банахово пространство ультраслабо непрерывных линейных функционалов на M (т. е. банахово пространство, преддвойственное к $M : (M_*)^* = M$). Пусть $\mathrm{aut} M$ — группа симметричных автоморфизмов алгебры фон Неймана M. Любой автоморфизм из $\mathrm{aut}\, M$ является оператором в M, сопряженным к некоторому симметричному автоморфизму банахова пространства с инволюцией M_*; снабдим группу $\mathrm{aut}\, M$ топологией простой сходимости по норме на элементах пространства M_*.

Автоморфизм α алгебры фон Неймана M, реализованной в гильбертовом пространстве H, будем называть *порождаемым* (унитарным оператором u в H), если $\alpha(x) = uxu^{-1}$ для всех $x \in M$. Такой автоморфизм будем обозначать $\mathrm{Ad}\, u|_M$ или просто $\mathrm{Ad}\, u$.

Если M — стандартная алгебра фон Неймана (относительно (H, J, P)), то группа $\operatorname{aut} M$ допускает так называемое *каноническое унитарное порождение* $\alpha \to u_\alpha$, где u_α — унитарные операторы в H, однозначно определяемое следующими условиями: 1) $\alpha = \operatorname{Ad} u_\alpha|_M$ для всех $\alpha \in \operatorname{aut} M$; 2) $u_g J = J u_g$ для всех $g \in \operatorname{aut} M$; 3) $u_g(P) = P$ для всех g из $\operatorname{aut} M$.

§ 2. АЛГЕБРЫ КАЦА

1. Определение и важнейшие примеры. Пусть M — стандартная (относительно (H, J, P)) алгебра фон Неймана (в гильбертовом пространстве H), Γ — нормальный симметричный изоморфизм алгебры фон Неймана M в тензорное произведение $M \otimes M$, являющийся копроизведением, т. е. удовлетворяющей тождеству $(\Gamma \otimes \iota_M)\Gamma = (\iota_M \otimes \Gamma)\Gamma$, где ι_M — тождественное отображение M в себя. Пусть, кроме того, $\varkappa$ — такой инволютивный антиавтоморфизм алгебры фон Неймана M в себя, что $\sigma\Gamma\varkappa = (\varkappa \otimes \varkappa)\Gamma$, где σ — симметричный *автоморфизм переброса* алгебры фон Неймана $M \otimes M$, определенный равенством $\sigma(x \otimes y) = y \otimes x$, $x, y \in M$. Набор $(M, \Gamma, \varkappa)$ называется *инволютивной алгеброй Хопфа—фон Неймана.* Пусть $\ast$ — умножение и $\circ$ — инволюция в преддвойственном пространстве M_* алгебры M, определяемые равенствами $(\omega \ast \omega')(x) = (\omega \otimes \omega')(\Gamma(x))$, $\omega^\circ(x) = \overline{\omega(\varkappa(x)^*)}$ для всех $x \in M$, $\omega, \omega' \in M_*$. Тогда M становится банаховой алгеброй с (изометрической) инволюцией. Алгебра Хопфа—фон Неймана $(M, \Gamma, \varkappa)$ называется *абелевой*, если M абелева, и *симметричной*, если $\sigma \circ \Gamma = \Gamma$.

ТНПК вес φ на инволютивной алгебре Хопфа—фон Неймана M, Γ, $\varkappa$) называется *весом Хаара*, если 1) $(\iota_M \otimes \varphi)(\Gamma(x)) = \varphi(x) 1_M$ для всех $x \in M_+$; 2) $(\iota_M \otimes \varphi)((1_M \otimes y^*)\Gamma(x)) = \varkappa((\iota_M \otimes \varphi)(\Gamma(y^*)(1_M \otimes x))$ для всех x, $y \in \mathfrak{N}_\varphi$; 3) $\sigma_t^\varphi \varkappa = \varkappa \sigma_{-t}^\varphi$ для всех $t \in \mathbf{R}$. Любой вес из $P(M)$, удовлетворяющий условиям 1)—3), пропорционален φ.

Набор $\mathrm{K} = (M, \Gamma, \varkappa, \varphi)$ называется *алгеброй Каца.*

Множество $\Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^* \cap \mathfrak{N}_{\varphi\circ\varkappa} \cap \mathfrak{N}_{\varphi\circ\varkappa}^*)$ плотно в гильбертовом пространстве H_φ. Реализуем M с помощью φ как стандартную алгебру фон Неймана (относительно $(H_\varphi, J_\varphi, P_\varphi)$), т. е. отождествим M с $\pi_\varphi(M)$, H с H_φ. Унитарный оператор W на $H \otimes H$, определенный формулой $W(\Lambda_\varphi(x) \otimes \Lambda_\varphi(y)) = \Lambda_{\varphi \otimes \varphi}(\Gamma(y)(x \otimes 1_M))$, $x, y \in \mathfrak{N}_\varphi$, называется *фундаментальным оператором*, связанным с алгеброй Каца K. Он порождает отображение Γ; точнее, $\Gamma(x) = W(1_H \otimes x)W^*$ для всех $x \in M$. Оператор W удовлетворяет условию ассоциативности $(1 \otimes W^*)(W^* \otimes 1)(1 \otimes W) = (W^* \otimes 1) \times \times (\iota \otimes \sigma)(W^* \otimes 1)$ (здесь и далее буква ι означает тождественное отображение соответствующего объекта, который, как правило, явно не указывается).

Примеры. 1). Пусть G — локально компактная группа, dg — левоинвариантная мера Хаара на G, $L_1(G)$ — соответствующая групповая алгебра, $L_\infty(G)$ — абелева алгебра фон Неймана в гильбертовом пространстве $L_2(G)$. Пусть α_G — коумножение на $L_\infty(G)$, определенное формулой $(\alpha_G f)(s, t) = f(st)$, $f \in L_\infty(G)$, $s, t \in G$; пусть $\varkappa$ — инволютивный антиавтоморфизм алгебры $L_\infty(G)$, определяемый формулой $(\varkappa f)(g) = f(g^{-1})$, $f \in L_\infty(G)$, $g \in G$; пусть μ_G — ТНПК вес на $L_\infty(G)$, определяемый формулой $\mu_G(f) = \int f(g)dg$ для $f \in L_\infty(G_+)$. Тогда набор $\mathrm{KA}(G) = \{L_\infty(G), \alpha_G, \varkappa, \mu_G\}$ есть абелева алгебра Каца, фундаментальный оператор которой W_G определяется формулой $(W_G\eta)(g, h) = \eta(g, gh)$, $g, h \in G$, $\eta \in L_2(G \times G)$.

2). Пусть G — локально компактная группа, dg — левоинвариантная мера Хаара на G, $K(G)$ — алгебра финитных непрерывных функций на G, $L(G)$ — алгебра фон Неймана, порожденная семейством операторов левого регулярного представления $g \to \lambda(g)$, $g \in G$, группы G в пространстве $L_2(G)$. Пусть δ_G — коумножение в $L(G)$, определенное равенством $\delta_G(\lambda(g)) = \lambda(g) \otimes \otimes \lambda(g)$, $g \in G$; пусть $\hat{\varkappa}$ — инволютивный антиавтоморфизм алгебры $L(G)$, определенный равенством $\hat{\varkappa}(\lambda(g)) = \lambda(g)^*$ для всех $g \in G$; пусть ψ_G — вес на $L(G)$, определенный равенством $\psi_G(\lambda(f)^*\lambda(f)) = \| f \|^2_{L_2(G)}$ для всех $f \in K(G)$. Тогда набор $\mathrm{KS}(G) = \{L(G), \delta_G, \hat{\varkappa}, \psi_G\}$ есть симметричная алгебра Каца, фундаментальный оператор которой W^* определяется формулой $(W\eta)(g, h) = \eta(h^{-1}g, h)$ для всех $g, h \in G$, $\eta \in L_2(G \times G)$.

2. Двойственность для алгебр Каца. Воспользуемся определениями и обозначениями предыдущего раздела. Пусть $\xi_1, \xi_2 \in \in H = H_\varphi$ и пусть ω_{ξ_2,ξ_1} — ограничение на $M = \pi_\varphi(M)$ линейного функционала на алгебре $L(H)$ всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H, определяемого формулой $\omega_{\xi_2,\xi_1}(T) = (T\xi_2, \xi_1)$, $T \in L(H)$. Пусть $\lambda(\omega_{\xi_2,\xi_1})$ — ограниченный линейный оператор в H, определенный формулой $(\eta_1, \lambda(\omega_{\xi_2,\xi_1})\eta_2) = (W(\xi_1 \otimes \eta_1), \xi_2 \otimes \eta_2)$, $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \in H$. Тогда λ определяет отображение инволютивной банаховой алгебры M_* в $L(H)$, удовлетворяющее условиям $\lambda(\omega * \omega') = \lambda(\omega)\lambda(\omega')$ и $\lambda(\omega^\circ) = \lambda(\omega)^*$ для всех $\omega, \omega' \in M_*$. Пусть $\widehat{M}$ — алгебра фон Неймана, порожденная семейством $\lambda(M_*)$. Тогда λ — изоморфизм M_* в $\widehat{M}$, и оператор W содержится в тензорном произведении $M \otimes \widehat{M}$.

Пусть $\hat{\Gamma}$ — коумножение в $\hat{M}$, определенное формулой $\hat{\Gamma}(x) = \sigma(W^*)(1 \otimes x)\sigma(W)$, $x \in \hat{M}$; пусть $\hat{\varkappa}$ — инволютивный антиавтоморфизм алгебры фон Неймана $\hat{M}$, определенный равенством $\hat{\varkappa}(x) = Jx^*J$, $x \in \hat{M}$. Тогда $\lambda(\omega \circ \varkappa) = \hat{\varkappa}(\lambda(\omega))$ для всех $\omega \in M_*$. Набор $(\hat{M}, \hat{\Gamma}, \hat{\varkappa})$ является инволютивной алгеброй Хопфа — фон Неймана.

Перейдем к построению веса Хаара на $(\hat{M}, \hat{\Gamma}, \hat{\varkappa})$. Пусть $\mathfrak{A}_\varphi = \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^{*\prime} (= \Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^{*\prime}))$; определим в $\mathfrak{A}_\varphi$ умножение и инволюцию $\#$, полагая $\Lambda_\varphi(x)\Lambda_\varphi(y) = \Lambda_\varphi(xy)$ и $\Lambda_\varphi(x)^\# = \Lambda_\varphi(x^*)$ для всех $x, y \in \mathfrak{A}_\varphi$. Пусть π — каноническое представление алгебры $\mathfrak{A}_\varphi$ в H_φ, являющееся ограничением на $\mathfrak{A}_\varphi$ представления π_φ алгебры M в пространстве H_φ. Вектор $\eta \in H_\varphi$ называется *ограниченным справа*, если отображение алгебры $\mathfrak{A}_\varphi$ в H_φ, определенное формулой $\xi \to \pi(\xi)\eta$, есть ограниченный оператор по норме в H_φ. Пусть $\pi'_\varphi(\eta)$ — непрерывное продолжение этого оператора на все пространство H_φ. Семейство $\mathfrak{A}'_\varphi$ ограниченных справа векторов снабжается естественным умножением (таким, что отображение $\eta \to \pi'_\varphi(\eta)$, $\eta \in \mathfrak{A}'_\varphi$, есть представление алгебры $\mathfrak{A}'_\varphi$) и инволюцией $\flat$ (являющейся ограничением на множество $\mathfrak{A}'_\varphi$ инволюции, сопряженной к $\#$). Пусть I_φ — левый идеал в инволютивной банаховой алгебре M_*, порожденный формами $\omega_{\xi,\eta}$, где $\xi, \eta \in \mathfrak{A}'_\varphi$. Пусть $A_\varphi = I_\varphi \cap I_\varphi^*$; тогда A_φ — инволютивная подалгебра в алгебре M_*.

Пусть $\omega \in M_*$; положим норму $\|\omega\|_\varphi$ равной верхней грани чисел $|\omega(x^*)|$ по всем $x \in \mathfrak{A}_\varphi$ с $\|\Lambda_\varphi(x)\| \leqslant 1$. Пусть $\mathscr{L}_\varphi$ — множество всех $\omega \in M_*$ с конечной нормой $\|\omega\|_\varphi$. Пусть a — отображение $\mathscr{L}_\varphi$ в H_φ, определенное формулой $a(\omega_{\xi,\eta}) = \xi\eta^\flat$ для $\xi, \eta \in \mathfrak{A}'_\varphi$. Тогда в векторном пространстве $a(A_\varphi)$ можно ввести умножение и инволюцию, перенося их с прообраза $A_\varphi \subset M_*$. Пусть $\hat{\pi}$ — представление $a(A_\varphi)$ в H, определенное формулой $\hat{\pi}(a(\omega)) = \lambda(\omega)$ для всех $\omega \in A_\varphi$. Пусть $\hat{\varphi}$ — вес на алгебре фон Неймана $\hat{\pi}(a(A_\varphi))'' = \hat{M}$, определенный равенством $\hat{\varphi}(\lambda(\omega_2)^*\lambda(\omega_1)) = (a(\omega_1), a(\omega_2))_{H_\varphi}$ для всех $\omega_1, \omega_2 \in A_\varphi$. Вес $\hat{\varphi}$ называется *дуальным весом* к φ.

Набор $\mathbf{K}\hat{} = (\hat{M}, \hat{\Gamma}, \hat{\varkappa}, \hat{\varphi})$ является алгеброй Каца, которая называется *дуальной к* $\mathbf{K} = (M, \Gamma, \varkappa, \varphi)$. Фундаментальный оператор алгебры $\mathbf{K}\hat{}$ есть $\sigma(W^*)$. *Теорема двойственности для алгебр Каца* утверждает, что $K\hat{}\hat{} = \mathbf{K}$ для любой алгебры Каца $\mathbf{K}$.

С теоремой двойственности для алгебр Каца тесно связаны свойства еще двух операций: перехода к коммутанту и отражению. *Коммутант алгебры Каца* $\mathbf{K} = (M, \Gamma, \varkappa, \varphi)$ определяется как алгебра Каца $\mathbf{K}' = (M', \Gamma', \varkappa', \varphi')$, где M' — коммутант алгебры фон Неймана M, Γ' определяется формулой $\Gamma'(x) = (J \otimes J)(\Gamma(JxJ))(J \otimes J)$ для всех $x \in M'$, инволюция $\varkappa'$ определяется равенством $\varkappa'(x) = J(\varkappa(JxJ))J$ для всех $x \in M'$, а вес φ' — равенством $\varphi'(x) = \varphi(JxJ)$ для всех $x \in M_+'$ (здесь используется равенство (1)). Фундаментальный оператор алгебры Каца $\mathbf{K}'$ есть $(J \otimes J)W(J \otimes J)$, где W — фундаментальный оператор для $\mathbf{K}$. Имеет место равенство $\mathbf{K}'' = \mathbf{K}$.

Отражение $\mathbf{K}^\sigma$ алгебры Каца $\mathbf{K}$ определяется как алгебра

Каца $\mathbf{K}^\sigma = (M, \sigma \circ \Gamma, \varkappa, \varphi \circ \varkappa)$; фундаментальный оператор алгебры Каца $\mathbf{K}^\sigma$ есть оператор $(\hat{J} \otimes \hat{J}) W (\hat{J} \otimes \hat{J})$, где $\hat{J}$ — модулярная инволюция, связанная с $\hat{M}$. Существенно, что операторы J и $\hat{J}$ коммутируют. Справедливы соотношения $\mathbf{K}'^\sigma = \mathbf{K}^{\sigma'}$, $\mathbf{K}'^{\hat{}} = \mathbf{K}^{\hat{}\sigma}$, $\mathbf{K}^{\sigma\hat{}} = \mathbf{K}^{\hat{}'}$, $\mathbf{K}'^{\sigma\hat{}} = \mathbf{K}^{\hat{}'\sigma}$. Алгебры Каца $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K}'^\sigma$ канонически изоморфны с помощью отображения M на M', определенного формулой $v(x) = J\hat{J}xJ\hat{J} = \hat{J}JxJ\hat{J}$ для всех x из M.

Пример. 3). Пусть G — локально компактная группа. Алгебры Каца $\mathrm{KA}(G) = \{L_\infty(G), \alpha_G, \varkappa, \mu_G\}$ (см. пример 1)) и $\mathrm{KS}(G) = \{L(G), \delta_G, \hat{\varkappa}, \psi_G\}$ (см. пример 2)) дуальны друг другу. Коммутант алгебры Каца $\mathrm{KS}(G)$ есть алгебра Каца, определяемая аналогичным образом с помощью правого регулярного представления группы G; алгебра Каца $\mathrm{KA}(G)$ совпадает со своим коммутантом. Отражение $\mathrm{KA}(G)^\sigma$ алгебры Каца $\mathrm{KA}(G)$ есть алгебра Каца над той же алгеброй фон Неймана с коумножением $(\alpha'_G f)(g, h) = f(hg)$; $g, h \in G$, $f \in L_\infty(G)$. Более подробно, коммутант алгебры Каца $\mathrm{KS}(G)$ есть алгебра Каца $\{R(G), \delta'_G, \hat{\varkappa}', \psi'_G\}$, где $R(G)$ — алгебра фон Неймана, порожденная правым регулярным представлением $g \to \rho(g)$, $g \in G$, группы G в $L_2(G)$ $\delta'_G(\rho(g)) = \rho(g) \otimes \rho(g)$ для всех $g \in G$, $\hat{\varkappa}'(\rho(g)) = \rho(g) \otimes \rho(g)$ для всех $g \in G$, а вес ψ'_G определяется формулой $\psi'_G(\rho(f)^* \rho(f)) = \|f\|^2_{L_2(G, d_r g)}$ для финитных непрерывных функций f.

Теорема двойственности для алгебр Каца является одной из наиболее общих среди современных теорем двойственности. Как мы видели в примере 3), теория двойственности для алгебр Каца содержит теорию двойственности для локально компактных групп. Если G — локально компактная абелева группа, $\hat{G}$ — ее группа характеров и $\mathcal{F}$ — оператор Фурье—Планшереля из $L_2(G)$ в $L_2(\hat{G})$, то ограничение оператора $\mathrm{Ad}\mathcal{F}$ на алгебру фон Неймана $L(G)$ определяет изоморфизм алгебры Каца $\mathrm{KS}(G)$ на $\mathrm{KA}(\hat{G})$, так что алгебра Каца $\mathrm{KA}(\hat{G})$ канонически изоморфна алгебре Каца, дуальной к $\mathrm{KA}(G)$. Это утверждение является переводом теоремы двойственности Понтрягина на язык алгебр Каца.

Теория двойственности для скрещенных произведений алгебр фон Неймана, излагаемая ниже, в разделе 5 § 3, является отражением в теории скрещенных произведений теории двойственности для алгебр Каца.

3. Некоторые конструкции для алгебр Каца. Введем некоторые понятия, связанные с алгебрами Каца. Они позволят, в частности, охарактеризовать «групповые» алгебры Каца, т. е. алгебры Каца вида $\mathrm{KS}(G)$ для локально компактных групп G.

Пусть $\mathbf{K}_1 = (M_1, \Gamma_1, \varkappa_1, \varphi_1)$, $\mathbf{K}_2 = (M_2, \Gamma_2, \varkappa_2, \varphi_2)$ — алгебры Каца, u — нормальный морфизм алгебры фон Неймана M_1 в M_2, переводящий единицу в единицу. Отображение u называется *K-морфизмом* алгебры Каца $\mathbf{K}_1$ в алгебру Каца $\mathbf{K}_2$, если выполнены следующие условия: 1) $\Gamma_2 u = (u \otimes u)\Gamma_1$; 2) $\varkappa_2 u = u\varkappa_1$; 3) существует такая постоянная $K_u > 0$, называемая коэффициентом u, что $\varphi_2(u(x)) = K_u \varphi_1(R_u x)$ для всех $x \in M_1{}^+$, где $1 - R_u$ — порождающий проектор слабо замкнутого идеала $\operatorname{Ker} u$ в M_1; 4) образ $u(M_1)$ инвариантен в M_2 относительно всех модулярных автоморфизмов $\sigma_t^{\varphi_2}$, $t \in \mathbf{R}$. Такой K-морфизм называется *нормализованным*, если $K_u = 1$, и *K-изоморфизмом*, если $K_u = 1$, $R_u = 1$. Введенные в предыдущем разделе отображение v алгебры Каца $\mathbf{K}$ на алгебру Каца $\mathbf{K}'^{\sigma}$ и отображение $\operatorname{Ad} F|_{L(G)}$ алгебры Каца $\mathrm{KS}(G)$ на алгебру Каца $\mathrm{KA}(\hat{G})$, где G — локально компактная абелева группа, являются нормализованными K-изоморфизмами.

Пусть u — K-изоморфизм алгебр Каца. Дуальный морфизм $\lambda_2(\omega) \to \lambda_1(\omega \circ u)$, где ω пробегает преддвойственное пространство $(M_2)_*$, продолжается до морфизма $\hat{u}: M_2{}^\wedge \to M_1{}^\wedge$, определяющего K-морфизм дуальных алгебр Каца (с коэффициентом K_u^{-1}).

Пусть $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ — алгебры Каца над алгебрами фон Неймана M_1 и M_2 соответственно, реализованными в гильбертовых пространствах H_1 и H_2. Пусть u — биективный K-морфизм $\mathbf{K}_1$ на $\mathbf{K}_2$ (т. е. M_1 на M_2). Тогда существует унитарный оператор из H_1 на H_2, определяющий этот изоморфизм; этот оператор очевидным образом определяет продолжение морфизма u на алгебру $L(H_1)$; обозначим это продолжение через $\bar{u}$.

Пусть $\mathbf{K} = (M\,\Gamma, \varkappa, \varphi)$ — алгебра Каца. Семейство всех ненулевых элементов $x \in M$, удовлетворяющих условию $\Gamma(x) = x \otimes x$ (т. е. условию $W(1 \otimes x)W^* = x \otimes x$), называется *внутренней группой* алгебры Каца $\mathbf{K}$ и обозначается $G(\mathbf{K})$. Это — подгруппа группы $U(M)$, локально компактная в слабой операторной топологии. Пусть $G(\mathbf{K}^\wedge)$ — внутренняя группа дуальной алгебры Каца $\mathbf{K}^\wedge$. Существует слабо непрерывное отображение χ произведения $G(\mathbf{K}) \times G(\mathbf{K}^\wedge)$ в $\mathbf{C}$, однозначно определяемое следующими условиями: 1) $|\chi(u, v)| = 1$; 2) $uv = \chi(uv)\,vu$; 3) $\chi(uu', v) = \chi(u, v)\,\chi(u', v)$, $\chi(u, vv') = \chi(u, v)\,\chi(u, v')$; 4) $\chi(u^*, v) = \overline{\chi(u, v)} = \chi(u, v^*)$; 5) $\chi(u, 1) = \chi(1, v) = 1$ для всех $u, u' \in G(\mathbf{K})$, $v, v' \in G(\mathbf{K}^\wedge)$. Пусть N — подалгебра фон Неймана в M, порожденная элементами группы $G(\mathbf{K})$; тогда на алгебре Хопфа—фон Неймана $(N, \Gamma|N, \varkappa|N)$ существует вес Хаара, т. е. такой (определенный с точностью до положительного множителя) вес ψ на N, что $(N, \Gamma|N, \varkappa|N, \psi)$ — алгебра Каца. Алгебра N является наибольшей из подалгебр фон Неймана в M, на которых вышеописанная структура алгебры Каца приводит к симметричной алгебре Каца. В частности, группа $G(\mathbf{K})$ порождает алгебру Каца $\mathbf{K}$ — т. е. алгебру фон Неймана M — тогда и только тогда, когда сама алгебра Каца $\mathbf{K}$ симметрична, и симметричная алгебра Каца $\mathbf{K}$ изоморфна (с помощью нормализованного $\mathbf{K}$-морфизма) алгебре Каца $\mathrm{KS}(G(\mathbf{K}))$.

Для алгебр Каца можно определить операцию тензорного умножения. А именно, пусть $\mathbf{K}_1=(M_1, \Gamma_1, \varkappa_1, \varphi_1)$ и $\mathbf{K}_2=(M_2, \Gamma_2, \varkappa_2, \varphi_2)$ — алгебры Каца; набор $(M_1\otimes M_2, (\iota\otimes\sigma\otimes\iota)(\Gamma_1\otimes\Gamma_2), \varkappa_1\otimes\otimes\varkappa_2, \varphi_1\otimes\varphi_2)$ есть алгебра Каца, которая называется тензорным произведением алгебр Каца $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ и обозначается $\mathbf{K}_1\otimes\mathbf{K}_2$. Справедливо соотношение $G(\mathbf{K}_1\otimes\mathbf{K}_2)=G(\mathbf{K}_1)\times G(\mathbf{K}_2)$.

§ 3. ДЕЙСТВИЯ И СКРЕЩЕННЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1. **Действия.** *Действием* локально компактной группы G на алгебре фон Неймана N называется такой гомоморфизм α группы G в группу $\mathrm{aut}\,N$, что отображение $g\to\alpha_g(x)$ группы G в алгебру фон Неймана N, рассматриваемую в ультраслабой топологии, непрерывно для любого $x\in N$. Набор (N, G, α) называется при этом условии *ковариантной системой.*

Заметим, что непрерывность действия α отличается от непрерывности гомоморфизма α.

Пусть алгебра фон Неймана N стандартна относительно набора (H_N, J_N, P_N) и пусть α — действие локально компактной группы G на N. Тогда композиция α с каноническим порождением (см. раздел 3 § 1), т. е. отображение $g\to\alpha(g)\to u_{\alpha(g)}$, $g\in G$, есть сильно непрерывное унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве H_N.

Правым действием (соответственно *левым действием*) алгебры Каца $\mathbf{K}=(M,\Gamma,\varkappa,\varphi)$ на алгебре фон Неймана $\mathbf{N}$ называется такой изоморфизм π алгебры фон Неймана $\mathbf{N}$ в тензорное произведение $\mathbf{N}\otimes\mathbf{M}$, переводящий единицу $\mathbf{N}$ в единицу алгебры $N\otimes M$, что $(\pi\otimes\iota)\pi=(\iota\otimes\Gamma)\pi$ (соответственно $(\pi\otimes\iota)\pi=(\iota\otimes(\sigma\Gamma))\pi$). Таким образом, левое действие алгебры Каца $\mathbf{K}$ может рассматриваться как правое действие отражения $\mathbf{K}^\sigma$ алгебры Каца $\mathbf{K}$.

Существует естественное взаимно однозначное соответствие между действиями локально компактной группы G на алгебре фон Неймана N в гильбертовом пространстве H_N и правыми действиями алгебры Каца $\mathrm{KA}(G)$ (см. пример 1 из раздела 2 § 2) на N. Это соответствие сопоставляет ковариантной системе (N, G, α), где N — алгебра фон Неймана в гильбертовом пространстве H_N, точное представление $\pi=\pi_\alpha$ алгебры фон Неймана N в гильбертовом пространстве $H_N\otimes L_2(G)$ (канонически отождествленном с $L_2(G;\ H)$), определенное формулой

$$(\pi_\alpha(x)\xi)(g)=\alpha_g(x)\xi(g),\quad x\in N,\quad g\in G,\quad \xi\in L_2(G;\ H). \tag{2}$$

Аналогичное соответствие существует между действиями α группы G на N и левыми действиями алгебры Каца $\mathrm{KA}(G)$ на N; оно сопоставляет действию α представление $\tau=\tau_\alpha$ алгебры фон Неймана N в гильбертовом пространстве $H_N\otimes L_2(G)$, определенное формулой

$$(\tau_\alpha(x)\xi)(g)=\alpha_{g^{-1}}(x)\xi(g),\quad x\in N,\quad g\in G,\quad \xi\in L_2(G;H). \qquad (3)$$

Пусть π — правое действие алгебры Каца $\mathbf{K}=(M, \Gamma, \varkappa, \varphi)$ на алгебре фон Неймана N. Унитарный элемент $u\in U(N\otimes M)$ называется *π-коциклом*, если $(\iota\otimes\Gamma)(u)=(u\otimes 1)(\alpha\otimes\iota)(u)$. В частности, пусть $I_{\mathbf{K}}^N$ — *тривиальное действие* алгебры Каца $\mathbf{K}$ на алгебре фон Неймана N, т. е. $I_{\mathbf{K}}^N(x)=x\otimes 1$ для всех $x\in N$. Тогда $I_{\mathbf{K}}^N$-коциклы суть такие унитарные операторы $u\in U(N\otimes M)$, что $(\iota\otimes\Gamma)(u)=(u\otimes 1)(1\otimes\sigma)(u\otimes 1)(1\otimes\sigma)$.

В частном случае, когда $\mathbf{K}=\mathbf{K}A(G)$, где G — локально компактная группа, а $\pi=\pi_\alpha$, где α — непрерывное действие группы G на N, *α-коциклом* называется ультраслабо непрерывная функция v на G со значениями в $U(N)$, удовлетворяющая соотношению $v_{gh}=v_g\alpha_g(v_h)$ для всех $g, h\in G$. Существует естественное взаимно однозначное соответствие между α-коциклами и π_α-коциклами, сопоставляющее α-коциклу $g\to v_g$, $g\in G$, функцию $g\to v_g$, $g\in G$, как элемент пространства ограниченных непрерывных функций на G со значениями в N, т. е. элемент тензорного произведения $N\otimes L_\infty(G)$.

Пусть $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_1$ — алгебры Каца, N, N_1 — алгебры фон Неймана, φ — изоморфизм алгебры фон Неймана N на N_1, ψ — нормализованный биективный K-морфизм алгебры Каца $\mathbf{K}$ на $\mathbf{K}_1$, π — правое действие $\mathbf{K}$ на N, u — π-коцикл. Тогда отображение $\pi_1(x)=(\varphi\otimes\psi)(u\pi\varphi^{-1}(x)u^*)$, где $x\in N_1$, есть правое действие $\mathbf{K}_1$ на N_1. В этой ситуации действия π и π_1 называются *эквивалентными* относительно φ, ψ, u, что обозначается $\pi_1\sim\pi(\varphi, \psi, u)$. Если же $u=1$, то действие π_1 называется *сильно эквивалентным* действию π относительно φ и ψ, что обозначается $\pi_1\approx\pi(\varphi, \psi)$. В частности, если H_N — гильбертово пространство и u — $I_{\mathbf{K}}^{L(H_N)}$-коцикл, то отображение $x\to u(x\otimes 1)u^*$, $x\in L(H_N)$, есть правое действие алгебры Каца $\mathbf{K}$ на $L(H_N)$, и если N — такая алгебра фон Неймана в пространстве H_N, что $u(N\otimes \mathbf{C}_{H_N})u^*\subset \subset N\otimes L(H_N)$, то отображение $x\to u(x\otimes 1)u^*$, $x\in N$, есть правое действие алгебры Каца $\mathbf{K}$ на N. Эти действия называются *порожденными коциклом* u.

В частности, пусть H_N — гильбертово пространство, $\mathbf{K}=\{M, \Gamma, \varkappa, \varphi\}$ — алгебра Каца, W — ее фундаментальный оператор, $\mathbf{K}^\wedge=\{M^\wedge, \Gamma^\wedge, \varkappa^\wedge, \varphi^\wedge\}$ — дуальная к $\mathbf{K}$ алгебра Каца, $\hat{J}$ — модулярная инволюция в гильбертовом пространстве H соответствующего стандартного представления, связанная с дуальным весом $\hat\varphi$ на $\hat M$. Тогда оператор $T=1_{H_N}\otimes(\hat J\otimes\hat J)\sigma W\sigma(\hat J\otimes\hat J)$ является $I_{\mathbf{K}}^{L(H_N\otimes H)}$-коциклом; если же N — алгебра фон Неймана в H_N и π — правое действие $\mathbf{K}$ на N, то оператор T порождает на $\pi(N)$ правое действие алгебры Каца $\mathbf{K}$, сильно эквивалентное π и совпадающее с ограничением $(\iota\otimes\Gamma)|\pi(N)$. А именно, $(\iota\otimes\Gamma)|\pi(N)\approx\pi(\pi,\iota)$.

2. **Скрещенные произведения.** Пусть N — алгебра фон Неймана в гильбертовом пространстве H_N, (N, G, α) — ковариантная система. Пусть гильбертово пространство $H_N\otimes L_2(G)$ канонически отождествляется с $L_2(G; H)$ и пусть Θ — унитарное представление группы G в пространстве $H_N\otimes L_2(G)$, определенное формулой $(\Theta(h)\xi)(g)=\xi(gh)$, g, $h\in G$, $\xi\in L_2(G,H)$. Тогда алгебра фон Неймана, порожденная семействами $\pi_\alpha(N)$ и $\Theta(G)$, называется *скрещенным произведением алгебры фон Неймана N на локально компактную группу G относительно действия α* и обозначается $N\times_\alpha G$.

В частном случае, когда X — пространство с мерой μ, $H=L_2(X, \mu)$, $N=L_\infty(X, \mu)$, G — счетная дискретная группа и α — действие группы G на $L_\infty(X, \mu)$, определенное действием группы G на X преобразованиями, оставляющими меру μ квазиинвариантной, эта конструкция алгебры фон Неймана $N\times_\alpha G$ совпадает с конструкцией алгебры фон Неймана по динамической системе, принадлежащей Мюррею и фон Нейману.

Пусть N — алгебра фон Неймана в гильбертовом пространстве H_N, π — правое действие алгебры Каца $\mathbf{K}=(M, \Gamma, \varkappa, \varphi)$ на алгебре фон Неймана N. *Скрещенным произведением алгебры фон Неймана N на алгебру Каца* $\mathbf{K}$ *относительно правого действия* π называется алгебра фон Неймана в гильбертовом пространстве $H_N\otimes H$, порожденная объединением множеств $\pi(N)$ и $\mathbb{C}_{H_N}\otimes\hat{M}'$. Обозначим эту алгебру через $W^*(N, \mathbf{K}, \pi)$ или просто $W^*(\pi)$.

В частном случае $\mathbf{K}=\text{КА}(G)$, где G — локально компактная группа, и $\pi=\pi_\alpha$, где α — действие G на N, а π_α определено формулой (2), скрещенное произведение $N\times_\alpha G$ совпадает с произведением $W^*(N, \text{КА}(G), \pi)$.

Левое действие τ алгебры Каца $\mathbf{K}$ есть правое действие ее отражения $\mathbf{K}^\sigma$. В связи с этим скрещенное произведение алгебры фон Неймана N на алгебру Каца $\mathbf{K}$ относительно левого действия τ можно определить как скрещенное произведение N на $\mathbf{K}^\sigma$ относительно этого правого действия, т. е. как алгебру фон Неймана, порожденную множествами $\tau(N)$ и $\mathbb{C}_{H_N}\otimes\hat{M}$ (в связи с равенством $\mathbf{K}^{\sigma\wedge'}=\mathbf{K}^\wedge$).

В частности, пусть G — локально компактная группа, N — алгебра фон Неймана в гильбертовом пространстве H_N, α — (непрерывное) действие группы G на N. Тогда скрещенное произведение N на $\text{КА}(G)$ относительно соответствующего левого действия τ_α, определенного формулой (3), есть алгебра фон Неймана, порожденная объединением множеств $\tau_\alpha(N)$ и $\mathbb{C}_{H_N}\otimes L(G)$ (где $L(G)$ — алгебра фон Неймана, порожденная семейством операторов левого регулярного представления группы

G). Это — скрещенное произведение, которое и рассматривалось в первой статье Такесаки по теории двойственности для скрещенных произведений и обозначалось там $R(N, \alpha)$ [69].

Пусть π_1, π_2 — правые действия алгебр Каца $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ на алгебрах фон Неймана N_1 и N_2 соответственно и пусть $\pi_2 \sim \pi_1(\varphi, \psi, u)$. Тогда $W^*(\pi_2) = (\varphi\otimes\overline{\psi})(uW^*(\pi_1)u^*)$, где $\overline{\psi}$ — естественное продолжение изоморфизма ψ на всю алгебру $L(H_1)$ (см. раздел 3, § 2; через H_1 обозначено гильбертово пространство, в котором реализована алгебра Каца $\mathbf{K}_1$). Таким образом, скрещенные произведения $W^*(\pi_2)$ и $W^*(\pi_1)$ изоморфны для эквивалентных действий π_2 и π_1. В частности, скрещенное произведение алгебры фон Неймана N на алгебру Каца $\mathbf{K}$ относительно правого действия π не зависит от гильбертова пространства, в котором реализована N. А именно, если $\pi_2 \approx \approx \pi_1(\varphi, \iota)$, то $W^*(\pi_2) = (\varphi\otimes\iota)\, W^*(\pi_1)$.

В важном частном случае, когда α — действие локально компактной группы G на алгебре фон Неймана N, а π_α и τ_α — определенные действием α правое и левое действия алгебры Каца КА(G) на алгебре фон Неймана N в гильбертовом пространстве H_N (см. соответственно (2) и (3)), соответствующие скрещенные произведения оказываются изоморфными. А именно, $W^*(\pi_\alpha) = (I_{H_N}\otimes J\hat{J})\, W^*(\tau_\alpha)\,(I_{H_N}\otimes J\hat{J})$.

3. Дуальные действия. Ко-действия и действия Робертса. Пусть π — правое действие алгебры Каца $\mathbf{K} = (M, \Gamma, \varkappa, \varphi)$, реализованной в гильбертовом пространстве H, на алгебре фон Неймана N в гильбертовом пространстве H_N, W — фундаментальный оператор алгебры Каца $\mathbf{K}$. Оператор $S = I_{H_N}\otimes(J\hat{J}\otimes J\hat{J})\times \times W^*(J\hat{J}\otimes J\hat{J})$ является $I^{L(H_N\otimes H)}_{\mathbf{K}^{\wedge\prime}}$ — коциклом, определяющим некоторое правое действие $\tilde{\pi}$ алгебры Каца $\mathbf{K}^{\wedge\prime}$ (коммутанта двойственной к $\mathbf{K}$ алгебры Каца $\mathbf{K}^{\wedge}$) на скрещенном произведении $W^*(\pi)$. Это действие $\tilde{\pi}$ алгебры Каца $\mathbf{K}^{\wedge\prime}$ на $W^*(\pi)$ называется *дуальным действием* к действию π. Оно является единственным нормальным морфизмом алгебры фон Неймана $W^*(\pi)$ в произведение $W^*(\pi)\otimes M^{\wedge\prime}$, удовлетворяющим условиям $\hat{\pi}(x) = = x\otimes 1$ для всех $x\in\pi(N)$ и $\tilde{\pi}(I_{H_N}\otimes y) = I_{H_N}\otimes\hat{\Gamma}'(y)$ для всех $y\in M^{\wedge\prime}$.

Пусть π_1 (соответственно π_2) — правое действие алгебры Каца $\mathbf{K}_1 = \{M_1, \Gamma_1, \varkappa_1, \varphi_1\}$ (соответственно $\mathbf{K}_2 = \{M_2, \Gamma_2, \varkappa_2, \varphi_2\}$) на алгебре фон Неймана N_1 (соответственно N_2); пусть $\pi_1^{\sim}$ (соответственно $\pi_2^{\sim}$) — действие, дуальное к π_1 (соответственно π_2). Если $\pi_2 \sim \pi_1(\varphi, \psi, u)$, то $\pi_2^{\sim} \approx \pi_1^{\sim}(\varphi\otimes\overline{\psi}\circ \mathrm{Ad}\, u,\ \overline{\psi}\,|\,\hat{M}_1')$ в обозначениях раздела 1. В частности, с точностью до изоморфизма действие $\pi^{\sim}$ не зависит от гильбертова пространства, в котором реализована алгебра фон Неймана N; а именно, если $\pi_2 \approx \pi_1(\varphi, \iota)$, то $\pi_2^{\sim} \approx \pi_1^{\sim}(\varphi\otimes\iota,\ \iota)$.

Для действий π_α и τ_α алгебры Каца $\mathrm{KA}(G)$, определенных действием α локально компактной группы G на алгебре фон Неймана N, имеет место равенство $\pi_{\tilde{\alpha}} \approx \tau_{\tilde{\alpha}}(\iota \otimes \mathrm{Ad}\, J\hat{J}, \mathrm{Ad}\, J\hat{J}|L(G))$. В связи с этим в терминах алгебр Каца дуальное действие к действию локально компактной группы на алгебре фон Неймана определяется по существу однозначно. Понятие дуального действия к правому действию алгебры Каца $\mathrm{KA}(G)$ приводит к понятию так называемого *ко-действия* локально компактной группы G на алгебре фон Неймана N как изоморфизма δ алгебры фон Неймана N в произведение $N \otimes R(G)$, удовлетворяющего условию $(\delta \otimes \iota)\delta = (\iota \otimes \delta_G')\delta$, где коумножение δ_G' определяется формулой $\delta_G'(\rho(g)) = \rho(g) \otimes \rho(g)$, $g \in G$ (ср. пример 3 в разделе 2 § 2), т. е. ко-действие группы G есть правое действие алгебры Каца $\mathrm{KS}(G')$. Дуальным объектом к ко-действию является правое действие отражения алгебры Каца $\mathrm{KA}(G)$ на соответствующем скрещенном произведении, т. е. (с точностью до перехода к отражению) — обычное действие группы G. В некоторых отношениях более естественным аналогом понятия ко-действия является понятие действия Робертса. Перейдем к его описанию.

Семейство R унитарных представлений локально компактной группы G называется *кольцом представлений*, если семейство R содержит прямые суммы и тензорные произведения своих элементов и, кроме того, содержит единичное представление. Кольцо представлений называется *самосопряженным*, если вместе с любым своим элементом оно содержит также сопряженное к нему представление.

Пусть $\pi_1, \pi_2 \in R$; обозначим через $I_G(\pi_1, \pi_2)$ семейство ограниченных линейных операторов A из пространства H_{π_1} представления π_1 в пространство H_{π_2} представления π_2, удовлетворяющих условию $A\pi_1(g) = \pi_2(g)A$ для всех $g \in G$ (т. е. *сплетающих* π_1 *с* π_2). Пусть N — алгебра фон Неймана и $\mathrm{End}(N)$ — множество ее нормальных эндоморфизмов, переводящих единицу в себя. Пусть $\rho_1, \rho_2 \in \mathrm{End}(N)$ и пусть $I_N(\rho_1, \rho_2)$ — семейство элементов $a \in N$, *сплетающих* ρ_1 и ρ_2, т. е. удовлетворяющих условию $a\rho_1(x) = \rho_2(x)a$ для всех $x \in N$.

Действием Робертса данного кольца представлений R группы G на алгебре фон Неймана N называется такое семейство $\{\rho, \eta\} = \{\rho_\pi, \eta_{\pi_1,\pi_2}; \pi, \pi_1, \pi_2 \in R\}$, где $\rho_\pi \in \mathrm{End}(N)$, η_{π_1,π_2} — ультраслабо непрерывные линейные отображения $I_G(\pi_2, \pi_1)$ в $I_N(\rho_{\pi_2}, \rho_{\pi_1})$, что $\rho_{\pi_1 \otimes \pi_2} = \rho_{\pi_1} \circ \rho_{\pi_2}$; $\eta_{\pi,\pi} = 1$; $\eta_{\pi_1,\pi_2}(a)^* = \eta_{\pi_2,\pi_1}(a^*)$ для всех $a \in I_G(\pi_2, \pi_1)$; $\eta_{\pi_1,\pi_2}(a)\eta_{\pi_2,\pi_3}(b) = \eta_{\pi_1,\pi_3}(ab)$ для всех $a \in I_G(\pi_2, \pi_1)$, $b \in I_G(\pi_3, \pi_2)$; $\eta_{\pi_2 \otimes \pi_2', \pi_1 \otimes \pi_1'}(a \otimes a') = \eta_{\pi_2,\pi_1}(a)\, \rho_{\pi_1}(\eta_{\pi_2',\pi_1'}(a')) = \rho_{\pi_2}(\eta_{\pi_2',\pi_1'}(a'))\, \eta_{\pi_2,\pi_1}(a)$ для всех $a \in I_G(\pi_1, \pi_2)$ и $a' \in I_G(\pi_1', \pi_2')$.

Пусть алгебра фон Неймана N реализована в гильбертовом пространстве H_N. Пусть H_π — гильбертово пространство представления π группы G. Пусть π_R — прямая сумма всех представлений π семейства R и пусть H_R — пространство представления π_R. Пусть $\pi \in R$ и $\xi \in H_\pi$. Положим $v_R(\xi)\Sigma\oplus\eta_{\pi'} = \Sigma\eta_{\pi'}\otimes\xi$ для всех $\eta_{\pi'} \in H_{\pi'}$, $\xi \in H_\pi$. Этим условием оператор $v_R(\xi)$ в пространстве H_R определяется однозначно и удовлетворяет следующим условиям: $\|v_R(\xi)\| = \|\xi\|$ для всех $\xi \in H_\pi$, $v_R(\xi\otimes\eta) = v_R(\eta)v_R(\xi)$ для $\xi \in H_\pi$, $\eta \in H_{\pi'}$, и $\pi_R(g)v_R(\xi) = v_R(\pi(g)\xi)\pi_R(g)$ для всех $g \in G$. Пусть ρ_R — прямая сумма $\Sigma\oplus\rho_\pi$ представлений ρ_π алгебры фон Неймана N в пространствах $K_\pi = H_N$ по всем $\pi \in R$; тогда ρ_R — изоморфизм алгебры фон Неймана N в произведение $N\otimes l_\infty(R)$ так как R содержит тривиальное представление.

Предположим, что R содержит элемент π_r, квазиэквивалентный правому регулярному представлению группы G. Пусть $F(\rho, H_N)$ — семейство всех таких ограниченных линейных операторов Φ из H_R в H_N, что $\eta_{\pi'\pi}, (a_{\pi,\pi'})\Phi\xi_{\pi'} = \Phi a_{\pi,\pi'}\xi_{\pi'}$ для всех $a_{\pi,\pi'} \in I_G$ (π', π), $\xi_{\pi'} \in H_{\pi'}$, π, $\pi' \in R$. Пусть θ — изоморфизм алгебры фон Неймана $\pi_r(G)''$ на алгебру фон Неймана $R(G)$, переводящий $\pi_r(g)$ в $\rho(g)$ для всех $g \in G$ (существование такого изоморфизма следует из определения квазиэквивалентных представлений). Пусть $F_0(\rho, H_N)$ — *множество таких* $\Phi \in F(\rho, H_N)$, что величина $\|\Phi\|^2 = \psi_G'(\Theta(\Phi(\pi_r)^*\Phi(\pi_r))$ конечна (где ψ_G' — вес Планшереля на $R(G)$, см. пример 3 раздела 2 § 2). Пусть $L_2(\rho, H_N)$ — пополнение предгильбертова пространства $F_0(\rho, H_N)$ относительно нормы $\|\cdot\|$. Пусть $\rho(y)$, $y \in N$, и $V(\xi)$, $\xi \in H_\pi$ — операторы в $L_2(\rho, H_N)$, определенные формулами $(\rho(y)\Phi)(\pi) = \rho_\pi(y)\Phi(\pi)$ и $V(\xi)\Phi = \Phi V_R(\xi)$ (для всех $\Phi \in F_0(\rho, H_N)$) соответственно. *Скрещенным произведением алгебры фон Неймана N на кольцо представлений R относительно действия Робертса* (ρ, η) называется алгебра фон Неймана в $L_2(\rho, H_N)$, порожденная семействами операторов $\rho(N)$ и $V(H_\pi)$, $\pi \in R$; эта алгебра фон Неймана обозначается $N\times_\rho R$.

Пусть U — унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве $L_2(\rho, H_N)$, определенное равенством $U(g)\Phi = \Phi\pi_R(g)^{-1}$ для всех $\Phi \in F_0(\rho, H_N)$. Тогда $U(g)\rho(y) = \rho(y)U(g)$ для всех $y \in N$ и $U(g)V(\xi) = V(\pi(g)\xi)U(g)$ для всех $\xi \in H_\pi$, $g \in G$. Ограничение $\hat{\rho}$ действия $g \to \operatorname{Ad} U(g)$ на скрещенное произведение $N\times_\rho R$ называется *действием группы G, дуальным к действию Робертса* (ρ, η). Для дальнейшего существенно, что алгебра $\hat{\rho}$-неподвижных элементов в скрещенном произведении $N\times_\rho R$ есть алгебра $\rho(N)$, изоморфная исходной алгебре N.

При дальнейшем обсуждении действий Робертса ограничимся случаем, когда группа G компактна.

Пусть α — действие группы G на алгебре фон Неймана N; пусть N^α — семейство α-инвариантных элементов в N. Предположим, что N^α — собственно бесконечная алгебра фон Неймана, и обозначим через $H_\alpha(N)$ семейство гильбертовых подпространств в N (т. е. таких замкнутых подпространств $K \subset N$, что произведение y^*x кратно единице для всех x, $y \in K$, так что отображение $\{x, y\} \to (x, y)$, где $y^*x = (x, y)1_N$, является скалярным произведением на K, причем $aK \neq (0)$ при $a \in N$, $a \neq 0$), инвариантных относительно автоморфизмов $\alpha(g)$, $g \in G$. Тогда ограничение α на подпространство $K \in H_\alpha(N)$ определяет унитарное представление α_K группы G в пространстве K; семейство $\{\alpha_K\}$ оказывается кольцом представлений (произведение пространств K_1 и K_2 как подпространств в N приводит к тензорному произведению, а суммы вида $w_1K_1 + w_2K_2$, где w_1 и w_2 — изометрии в N^α с $w_1w_1^* + w_2w_2^* = 1$ — к прямой сумме представлений).

Пусть $\{u_i\}$ — ортонормированный базис в K, т. е. система изометрий с ортогональными образами, удовлетворяющая условию $\sum\limits_i u_iu_i^* = 1$; тогда отображение $\rho_K(x) = \sum u_ixu_i^*$, $x \in N$, есть эндоморфизм алгебры N, не зависящий от выбора базиса и характеризующийся условием $\rho_K(a)\, x = xa$ для $x \in K$ и $a \in N$. Пространство N^α инвариантно относительно операторов ρ_K для всех $K \in H_\alpha(N)$ и $I_G(\alpha_{K_1}, \alpha_{K_2}) \subset I_{N^\alpha}(\rho_{K_1}, \rho_{K_2}) \subset N^\alpha$. Положим $\rho_{\alpha_K}(x) = \rho_K(x)$ для всех $K \in H_\alpha(N)$, $x \in N^\alpha$ и $\eta_{\alpha_{K_2}, \alpha_{K_1}}(a) = a$ для всех $a \in I_G(\alpha_{K_1}, \alpha_{K_2})$ и K_1, $K_2 \in H_\alpha(N)$. Тогда (ρ, η) есть действие Робертса кольца представлений $\{\alpha_K, K \in H_\alpha(N)\}$ на алгебре фон Неймана N^α.

Оказывается, что эти конструкции (действия группы по действию Робертса и действия Робертса по действию группы) взаимны. Точнее, пусть G — компактная группа, N — собственно бесконечная алгебра фон Неймана. Пусть δ — ко-действие группы G на N. Тогда существует такое кольцо представлений R, содержащее элемент, квазиэквивалентный правому регулярному представлению группы G, такое действие Робертса $\{\rho, \eta\}$ кольца представлений R на N, что дуальное действие $\hat{\delta}$ действия δ на скрещенном произведении $N \times_\delta G$ эквивалентно дуальному действию $\hat{\rho}$ действия Робертса ρ на скрещенном произведении $N \times_\rho R$ (т. е. существует изоморфизм алгебры фон Неймана $N \times_\delta G$ на $N \times_\rho R$, переводящий действие $\hat{\delta}$ в действие $\hat{\rho}$). Обратно, пусть R — кольцо представлений, содержащее элемент, квазиэквивалентный правому регулярному представлению группы G, и пусть $\{\rho, \eta\}$ — действие Робертса кольца R на N; тогда существует ко-действие δ группы G на N с дуальным действием $\hat{\delta}$, эквивалентным действию $\hat{\rho}$. А именно, если задано ко-действие δ, то пусть $\{P, \alpha\} = \{N \times_\delta G, \hat{\delta}\}$. Тогда $H_\alpha(P)$ — самосопряженное кольцо представлений. Положим $\delta(\rho_\pi(y)) = \rho_{H_\pi}(\delta(y))$ для всех $H_\pi \in H_\alpha(P)$ и $\delta(\eta_{\pi, \pi'}(b)) = b$ для всех $b \in I_G(H_{\pi'}, H_\pi)$ и всех H_π, $H_{\pi'} \in H_\alpha(P)$. Этим определено действие Робертса кольца представлений $H_\alpha(P)$ на алгебре фон Неймана N, удовлетворяющее поставленным условиям; при этом требуемую эквивалентность дуальных действий осуществляет унитарный оператор $\tilde{W}$ из пространства $H_N \otimes L_2(G)$ в гильбертово пространство $L_2(\rho, H_N)$, принадлежащий произведению $N \otimes R(G)$ и удовлетворяющий условию $(a_g \otimes \iota)(\tilde{W}^*) = \tilde{W}^*(1 \otimes \rho(g))$, $g \in G$. Обратно, если задано действие Робертса $\{\rho, \eta\}$, то пусть $\{P, \alpha\} = \{N \times_\rho R, \hat{\rho}\}$; тогда в качестве δ можно взять $\hat{\alpha}$ как действие на скрещенном произведении $P \times_\alpha G$, изоморфном исходной алгебре фон Неймана N (ср. раздел 5).

Отметим теперь следующие характеризации скрещенных произведений и дуальных действий.

Пусть P — алгебра фон Неймана. Для того, чтобы существовала алгебра фон Неймана N и правое действие γ данной алгебры Каца $\mathbf{K}$ на N, определяющее скрещенное произведение $W^*(\gamma)$, изоморфное данной алгебре фон Неймана P, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое правое действие π алгебры Каца $\hat{\mathbf{K}}'$ (коммутанта дуальной к $\mathbf{K}$ алгебры Каца) на P и такой нормальный морфизм ν алгебры фон Неймана $\hat{M}'$ в P (где $\mathbf{K}$ есть $\{M, \Gamma, \varkappa, \varphi\}$), что $\nu(1) = 1$ и $\pi\nu = (\nu \otimes \iota)\hat{\Gamma}'$. Пусть θ — изоморфизм алгебры фон Неймана P на $W^*(\gamma)$. Тогда имеет место эквивалентность $\tilde{\gamma} \approx \pi(\theta, \iota)$, и соотношение $\theta\nu(x) = 1 \otimes x$ выполняется для всех $x \in \hat{M}'$. Кроме того, эти два последних условия определяют действие γ однозначно с точностью до сильной эквивалентности.

С другой стороны, данное действие π алгебры Каца $\hat{\mathbf{K}}'$ на алгебре фон Неймана P тогда и только тогда сильно эквивалентно дуальному действию к некоторому действию исходной алгебры Каца $\mathbf{K}$ на некоторой алгебре фон Неймана, когда существует такой $1^P_{\mathbf{K}}$-коцикл U, что $(\iota \otimes \sigma)(\pi \otimes \iota)(U)$ совпадает с элементом $(U \otimes 1)(1 \otimes (J \hat{\otimes} J)W(\hat{J} \otimes \hat{J}))$.

Для действий и ко-действий локально компактных групп на алгебрах фон Неймана характеризации скрещенных произведений выглядят следующим образом.

Пусть N — алгебра фон Неймана, G — локально компактная группа, δ — ко-действие группы G на N. Следующие условия эквивалентны: а) существует алгебра фон Неймана P и такое действие α группы G на P, что пара $\{N, \delta\}$ эквивалентна паре $\{P \times_\alpha G, \tilde{\alpha}\}$, где $\tilde{\alpha}$ — ко-действие, дуальное к действию α; б) существует такое унитарное представление u группы G в алгебре N, что $\delta(u(g)) = u(g) \otimes \rho(g)$ для всех $g \in G$; в) существует такой унитарный оператор U в $N \otimes L_\infty(G)$, что $(U \otimes 1)(\iota \otimes \sigma)(U \otimes 1) = (\iota \otimes \alpha_G)(U)$ и $\bar{\delta}(U) = (U \otimes 1)(1 \otimes W_G)$, где $\bar{\delta} = (\iota \otimes \sigma) \circ (\delta \otimes \iota)$, а α_G определено в примере 1 раздела 2 § 2. Если эти условия выполнены, то алгебра фон Неймана N порождена множеством $N^\delta = \{x \in N, \delta(x) = x \otimes 1\}$ и семейством элементов группы $\{u(g), g \in G\}$.

Пусть P — алгебра фон Неймана, G — локально компактная группа, π — правое действие алгебры Каца $\mathrm{KA}(G)$ на алгебре фон Неймана P (т. е. $\pi=\pi_\alpha$ для некоторого действия α группы G на P). *Следующие условия эквивалентны:* а) существует алгебра фон Неймана N и такое ко-действие δ группы G на N, что пара (P, π) эквивалентна паре $(N\times_\delta G, \hat{\delta})$, где $\hat{\delta}$ — действие, дуальное к ко-действию δ; б) существует такой симметричный изоморфизм Θ алгебры фон Неймана $L_\infty(G)$ в P, что $\alpha_g\circ\Theta=\Theta\circ\lambda(g)$ (т. е. $\alpha\circ\Theta=(\Theta\otimes\iota)\circ\lambda$) на $L_\infty(G)$, где λ — левое регулярное представление группы G; в) существует такой унитарный оператор W в тензорном произведении $P\otimes R(G)$, что $(W^*\otimes 1)(\iota\otimes\sigma)(W^*\otimes 1)=(\iota\otimes\delta_G)(W^*)$ и $\bar{\pi}(W^*)=(W^*\otimes 1)(1\otimes V_G)$, где $\bar{\pi}=(\iota\otimes\sigma)(\pi\otimes\iota)$ и V_G — фундаментальный оператор алгебры Каца $\mathrm{KS}(G)'$ (или $(\alpha_g\otimes 1)(W^*)=W^*(1\otimes\rho(g))$, $g\in G$). При этих условиях алгебра фон Неймана P порождена семейством $P^\pi=\{x\in P:\pi(x)=x\otimes 1\}$ неподвижных точек алгебры P и семейством $\Theta(L_\infty(G))$.

Характеризуемые этими условиями действия и ко-действия называются *дуальными.*

Важной характеристикой действия, конкурирующей во многих задачах по содержательности с понятием скрещенного произведения, является алгебра «неподвижных точек». Если $\mathbf{K}$ — алгебра Каца, N — алгебра фон Неймана и π — правое действие $\mathbf{K}$ на N, то алгеброй неподвижных точек N^π в N называется множество $\{x\colon x\in N, \pi(x)=x\otimes 1\}$. Оказывается, для любого действия π выполняются соотношения $\pi(N)=W^*(\pi)^{\sim}=\{x\in N\otimes M\colon(\pi\otimes\iota)(x)=(\iota\otimes\Gamma)(x)\}$.

Имеют место также следующие результаты, позволяющие описать скрещенное произведение и его коммутант в случае, когда действие алгебры Каца $\mathbf{K}$ на алгебре фон Неймана N задано некоторым $I_{\mathbf{K}}^{L(H_N)}$-коциклом U. А именно, $W^*(\pi)$ есть пересечение алгебр фон Неймана $N\otimes L(H)$ и $U(L(H_N)\otimes\hat{M}')U^*$, где, как обычно, H_N есть гильбертово пространство, в котором реализована алгебра фон Неймана N; если же π' — действие алгебры Каца $\mathbf{K}^\sigma$ (отражения исходной алгебры Каца), порожденное сопряженным коциклом U^*, то коммутант скрещенного произведения $W^*(\pi)$ совпадает с алгеброй фон Неймана $UW^*(\pi')U^*$.

Разумеется, доказательства всех этих результатов используют результаты раздела 5, т. е. теоремы двойственности.

4. Дуальный вес. Существенную роль в решении ряда задач теории скрещенных произведений алгебр фон Неймана — в частности, при не обсуждаемом в настоящем обзоре построении алгебры Каца, являющейся скрещенным произведением данной алгебры Каца на локально компактную группу относительно некоторого ее действия на алгебре Каца [18], — играет дуальный вес на скрещенном произведении алгебры фон Неймана на алгебру Каца. Для его введения нам потребуется ряд понятий.

Прежде всего введем понятие веса, относительно инвариантного для данного действия. Пусть N — алгебра фон Неймана, $\mathbf{K}$ — алгебра Каца, π — правое действие $\mathbf{K}$ на N и ψ — некоторый вес из $P(N)$. Вес ψ называется $\hat{\Delta}^{-1}$*—относительно инвариантным для* π (где $\hat{\Delta}$ — модулярный оператор, связанный с весом Хаара $\hat{\varphi}$ алгебры Каца $\mathbf{K}^{\wedge}$, дуальной к алгебре Каца $\mathbf{K}$; см. раздел 2 § 2), если выполняются следующие условия (относительно второго условия можно нетривиальным образом убедиться, что оно имеет смысл): 1) $(\psi\otimes\iota)(\pi(x))=\psi(x)\hat{\Delta}^{-1}$ для любого $x\in N_+$; 2) $(\psi\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{1/4}\xi})(\pi(y^*)(x\otimes 1))=(\psi\otimes(\omega_{\hat{\Delta}^{-1/4}\xi}\circ\varkappa))\times$ $\times((y^*\otimes 1)\pi(x))$ для всех $x, y\in\mathfrak{N}_\psi$ и всех векторов ξ из пересечения $D(\hat{\Delta}^{1/4})\cap D(\hat{\Delta}^{-1/4})$. Это определение содержательно: в частном случае, если G — локально компактная группа, α — действие группы на алгебре фон Неймана N, а $\psi\in P(N)$, то вес ψ тогда и только тогда оказывается $\hat{\Delta}^{-1}$-относительно инвариантным для соответствующего действию α правого действия π_α алгебры Каца $KA(G)$ (в смысле только что данного определения), когда $\psi\circ\alpha_s=\Delta_G^{-1}(s)\psi$ для всех $s\in G$, где Δ_G — модуль группы G (т. е. непрерывная производная Радона — Никодима правой меры Хаара по левой). В частности, обычный вес Хаара на алгебре фон Неймана $M=L_\infty(G)$ является $\hat{\Delta}^{-1}$-относительно инвариантным для действия, определяемого коумножением Γ.

Кроме того, нам понадобятся следующие понятия и сведения об операторнозначных весах на алгебрах фон Неймана. ***Расширенной положительной частью*** $\hat{N}_+$ алгебры фон Неймана N называется множество всех полунепрерывных снизу аддитивных положительно однородных отображений положительной части N_*^+ преддвойственного к $\mathbf{N}$ пространства N_* (т. е. множества положительных нормальных функционалов на N) в расширенную полуось $[0, +\infty]$ (с обычным условием $0\cdot+\infty=0$). *Операторнозначным весом* на алгебре фон Неймана N со значениями в ее подалгебре фон Неймана P называется отображение T положительной части N_+ алгебры фон Неймана N в расширенную положительную часть $\hat{P}_+$, алгебры фон Неймана P, причем отображение T должно быть аддитивным, положительно однородным и удовлетворять условию $T(a^*xa)=u^*T(x)a$ для всех $x\in N_+$, $a\in P$. Для операторнозначных весов понятия *точности, нормальности* и *полуконечности* определяются совершенно аналогично обычным весам (ср. раздел 1 § 1). Оказывается, что если T — точный нормальный полуконечный вес из алгебры фон Неймана N в ее подалгебру Неймана P, то для любого веса $\varphi\in P(P)$ композиция $\varphi\circ T$ есть вес из $P(N)$.

Пусть теперь N — алгебра фон Неймана, $\mathbf{K}$ — алгебра Каца,

π — правое действие $\mathbf{K}$ на N, N^{π} — алгебра π-инвариантных элементов (т. е. $N^{\pi}=\{x:\pi(x)=(x)\otimes 1\}$). Тогда отображение $T_{\pi}=(\iota\otimes\varphi)\pi$ (где $\mathbf{K}=\{M, \Gamma, \varkappa, \varphi\}$) есть точный нормальный полуконечный операторнозначный вес на N со значениями в N^{π}. Пусть $\psi\in P(N)$ и $\tilde{\psi}=\psi\circ\pi^{-1}\circ T_{\tilde{\pi}}$; тогда $\tilde{\psi}$ содержится в $P(W^*(\pi))$.

Вес $\tilde{\psi}$ называется *дуальным к* ψ весом на скрещенном произведении. Отображение $\psi\to\psi^{\sim}$ есть взаимно однозначное соответствие между множеством $P(N)$ и множеством Δ^{-1}-относительно инвариантных для дуального действия $\tilde{\pi}$ элементов множества $P(W^*(\pi))$.

5. Двойное скрещенное произведение и теоремы двойственности. Пусть π — правое действие алгебры Каца $\mathbf{K}=(M, \Gamma, \varkappa, \Phi)$ на алгебре фон Неймана N, реализованной в гильбертовом пространстве H_N. Пусть $\pi^{\sim}$ — действие, дуальное к π. Тогда скрещенное произведение $W^*(\pi^{\sim})$ изоморфно тензорному произведению $N\otimes L(H)$. А именно, если θ — автоморфизм алгебры фон Неймана $L(H_N\otimes H\otimes H)$, порожденный оператором $1_{H_N}\otimes(\hat{J}\otimes\hat{J})\sigma W^*\sigma(\hat{J}\otimes\hat{J})$, то отображение $\theta(\pi\otimes\iota)$ есть изоморфизм алгебр фон Неймана $N\otimes L(H)$ и $W^*(\pi^{\sim})$. Кроме того, отображение $(\iota\otimes\sigma)(\pi\otimes\iota)$ определяет правое действие алгебры Каца $\mathbf{K}$ на произведении $N\otimes L(H)$, причем унитарный оператор $1_{H_N}\otimes\sigma W^*\sigma$ является $(\iota\otimes\sigma)(\pi\otimes\iota)$-коциклом, а бидуальное действие $\pi^{\sim\sim}$ оказывается эквивалентным действию $(\iota\otimes\sigma)(\pi\otimes\iota)$; а именно, имеет место равенство $\pi^{\sim\sim}\sim(\iota\otimes\sigma)(\pi\otimes\iota)(\theta(\pi\otimes\iota), v, 1_{H_N}\otimes\sigma W^*\sigma)$, где v — отображение алгебры фон Неймана M на ее коммутант M', определенное формулой $v(x)=JJ^{\hat{}}xJ^{\hat{}}J=J^{\hat{}}JxJJ^{\hat{}}$ для всех $x\in M$ (ср. раздел 2 § 2). Это — *общая теорема двойственности для скрещенных произведений.*

Рассмотрим более подробно частный случай правого действия «групповой» алгебры Каца $\mathrm{KA}(G)$, где G — локально компактная группа. Пусть N — алгебра фон Неймана, α — действие группы G на N. Пусть γ — действие группы G на тензорном произведении $N\otimes L(L_2(G))$, определенное группой автоморфизмов $\gamma_g=\alpha_g\otimes\mathrm{Ad}\lambda(g)$, $g\in G$. Теорема двойственности утверждает, что действие $\pi_{\alpha}^{\sim\sim}$ сильно эквивалентно действию π_{γ}.

В случае, если локально компактная группа G является абелевой (а этот случай встречается в приложениях наиболее часто), оказывается возможным следующее видоизменение общей теоремы двойственности, ориентированное на теорему двойственности Понтрягина (именно этот частный случай называется *теоремой двойственности Такесаки*). Пусть $\hat{G}$ — группа характеров группы G. Напомним, что ограничение на алгебру фон Неймана $L(G)$ оператора $\mathrm{Ad}\,\mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ — оператор Фурье—Планшереля из $L_2(G)$ в $L_2(\hat{G})$, есть нормализованный биективный K-морфизм алгебры Каца $\mathrm{KS}(G)$ на алгебру Каца $\mathrm{KA}(\hat{G})$. Поэтому существует такое правое действие β алгебры Каца $\mathrm{KA}(\hat{G})$ на скрещенном произведении $W^*(\tau_\alpha)$, что $\beta \approx \tau_\alpha(\iota, \mathrm{Ad}\,\mathcal{F} | L(G))$, и такое (непрерывное) действие $\hat{\alpha}$ группы $\hat{G}$ на алгебре фон Неймана $W^*(\tau_\alpha)$, что $\tau_{\hat{\alpha}} = \beta$. Кроме того, существует такой изоморфизм скрещенного произведения $W^*(\tau_\alpha)$ на тензорное произведение $N \otimes L(L_2(G))$, переводящий бидуальное действие $\alpha^{\wedge\wedge}$ группы G на скрещенном произведении $W^*(\tau_{\hat{\alpha}})$ в действие $\gamma = \alpha \otimes \mathrm{Ad}\,\lambda$ группы G на $N \otimes L(L_2(G))$. Этот результат может быть следующим образом уточнен в терминах, непосредственно связанных с действием группы. Пусть алгебра фон Неймана N реализована в гильбертовом пространстве H_N и пусть π_α — представление алгебры фон Неймана N в гильбертовом пространстве $H_N \otimes L_2(G)$ (канонически отождествленном с $L_2(G, H_N)$), заданное формулой $\pi_\alpha(x)\xi(g) = \alpha_g(x)\xi(g)$, $g \in G$, $\xi \in H_N \otimes L_2(G)$. Пусть u — унитарное представление группы G в пространстве $H_N \otimes L_2(G)$, заданное (при аддитивной записи абелевой групповой операции) формулой $u(g)\xi(h) = \xi(g+h)$, g, $h \in G$, $\xi \in H_N \otimes L_2(G)$, так что скрещенное произведение $N \times_\alpha G$ есть алгебра фон Неймана в пространстве $H_N \otimes L_2(G)$, порожденная семействами операторов $\pi_\alpha(N)$ и $u(G)$. Пусть v — унитарное представление группы характеров $G^\wedge$ группы G в пространстве $H_N \otimes L_2(G)$, определенное равенством $(v(\chi)\xi)(g) = \overline{\chi(g)}\xi(g)$, $g \in G$, $\chi \in \hat{G}$, $\xi \in L_2(G; H_N)$. Тогда автоморфизм $\mathrm{Ad}\,v(\chi)$ алгебры фон Неймана $L(H_N \otimes L_2(G))$ оставляет на месте элементы вида $\pi_\alpha(x)$, $x \in N$, и переводит элементы $u(g)$ в $\chi(g)u(g)$, $g \in G$, $\chi \in \hat{G}$, поэтому ограничение $\mathrm{Ad}\,v(\chi)|_{N \times_\alpha G}$ есть автоморфизм алгебры фон Неймана $N \times_\alpha G$, и отображение $\chi \to \tilde{\alpha}_\chi = \mathrm{Ad}\,v(\chi)|_{N \times_\alpha G}$ определяет (непрерывное) действие $\alpha^\sim$ группы $\hat{G}$ на скрещенном произведении $N \times_\alpha G$. *Теорема двойственности* утверждает, что двойное скрещенное произведение $(N \times_\alpha G) \times_{\tilde{\alpha}} \hat{G}$ изоморфно тензорному произведению $N \otimes L(L_2(G))$, причем при этом изоморфизме действие $\alpha^{\sim\sim}$ группы G на произведении $(N \times_\alpha G) \times_{\tilde{\alpha}} \hat{G}$ переходит в действие $g \to \beta_g = \alpha_g \otimes \otimes \mathrm{Ad}\,\lambda(g)$, $g \in G$, группы G на тензорном произведении. $N \otimes L(L_2(G))$

В заключение этого раздела рассмотрим исключительно важный в приложениях случай, когда алгебра фон Неймана N является собственно бесконечной (т. е. на N нет ненулевых нормальных следовых состояний), а алгебра фон Неймана M алгебры Каца $\mathrm{K} = \{M, \Gamma, \varkappa, \varphi\}$, реализованная стандартным образом в гильбертовом пространстве H, имеет сепарабельное преддвойственное пространство M_* (в этом случае гильбертово пространство H также сепарабельно). Оказывается, что в этом случае двойное скрещенное произведение $W^*(\pi^\sim)$ изоморфно исходной алгебре фон Неймана N, и при этом изоморфизме бидуальное действие $\pi^{\sim\sim}$ эквивалентно исходному действию π.

Таким образом, в рассматриваемом частном случае теорема двойственности для скрещенных произведений приобретает черты «настоящей» двойственности.

Опишем последний результат более точно. Построим изоморфизм Φ алгебры фон Неймана N в тензорное произведение $N\otimes L(H)$ следующим образом. Пусть (e_n) — последовательность попарно ортогональных проекторов из алгебры фон Неймана N с единичной суммой, причем каждый из проекторов (e_n) эквивалентен единичному проектору; пусть (v_m) — семейство частично изометрических операторов в N, осуществляющих эквивалентность проектора e_m единичному проектору (так что $v_m^*v_m=1$, $v_mv_m^*=e_m$ для всех m и автоматически $v_i^*v_j=0$ при $i\neq j$); пусть (u_{ij}) — семейство матричных единиц в $L(H)$ (т. е. $u_{ij}\eta=(\eta, f_j)f_i$, $\eta\in H$, для некоторого ортонормированного базиса $\{f_i\}$ в H). Тогда оператор Φ можно задать формулой $\Phi(x)=\sum\limits_{i,j}(v_i^*xv_j)\otimes u_{ij}$, $x\in N$, причем $\Phi^{-1}(x\otimes 1)=\sum v_ixv_i^*$ для всех $x\in N$. Положим $\delta=(\Phi\otimes\iota)\pi\circ\Phi^{-1}$, $V=\sum\limits_n(v_n\otimes 1)\pi(v_n^*)$, $U=(\Phi\otimes\iota)(V)$. Тогда имеет место равенство $U\delta(x\otimes 1)U^*=(\iota\otimes\sigma)(\pi(x)\otimes 1)$, $x\in N$, т. е. $(\iota\otimes\sigma)(\pi\otimes\iota)\sim\pi(\Phi, \iota, U)$, что в сочетании с формулой $\pi^{\sim\sim}\sim(\iota\otimes\sigma)(\pi\otimes\iota)(\theta(\pi\otimes\iota, v, I_{H_N}\otimes\sigma W^*\sigma)$ и приводит к эквивалентности действий $\pi^{\sim\sim}$ и π.

§ 4. ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Действия однопараметрических групп и факторы типа III. Пусть N — алгебра фон Неймана, φ — вес из $P(N)$, σ^φ — соответствующая модулярная группа автоморфизмов. Тогда скрещенное произведение $N\times_{\sigma^\varphi}\mathbf{R}$ является полуконечной алгеброй фон Неймана, и тензорное произведение $N\otimes L_2(\mathbf{R})$ естественно изоморфно двойному скрещенному произведению $(N\times_{\sigma^\varphi}\mathbf{R})\times_{\sigma^{\hat\varphi}}\mathbf{R}$ (где $\hat\varphi$ — дуальный к φ вес); при этом алгебра $N\times_{\sigma^\varphi}\mathbf{R}$ канонически вкладывается в $N\otimes L(L_2(\mathbf{R}))$ как алгебра неподвижных точек относительно действия $\sigma_t^\varphi\otimes\mathrm{Ad}\,\lambda(t)$, $t\in\mathbf{R}$.

Пусть теперь N — фактор типа III и пусть $S(N)$ — соответствующий инвариант Конна (т. е. $S(N)$ — пересечение спектров модулярных операторов Δ_φ по всем $\varphi\in P(N)$). Множество $S(N)\diagdown\{0\}$ есть замкнутая подгруппа группы положительных вещественных чисел по умножению, так что $S(N)$ есть одно из множеств $\{0, 1\}$: $\{0, \{\lambda^n\}; 0<\lambda<1\}$; $[0, +\infty)$; в зависимости от этого фактор N называется фактором типа III_0, III_λ $(0<\lambda<1)$, III_1. Подсчет инварианта $S(N)$ облегчается теоремой Конна: если централизатор веса $\varphi\in P(N)$ (т. е. алгебра точек, неподвижных относительно действия модулярной группы этого веса) является фактором, то $S(N) = \mathrm{Sp}(\Delta_\varphi)$.

Рассмотрим скрещенное произведение $P = N \times_{\sigma^\varphi} \mathbf{R}$, где σ^φ — модулярная группа автоморфизмов, связанная с весом φ. Это — полуконечная алгебра фон Неймана, не зависящая (с точностью до изоморфизма) от выбора веса $\varphi \in P(N)$. Пусть $\{\theta_s, s \in \mathbf{R}\}$ — действие группы $\mathbf{R}$, дуальное к σ^φ. Тогда существует след τ на P, удовлетворяющий условию $\tau \circ \theta_s = e^{-s}\tau$ для всех $s \in \mathbf{R}$. Вследствие теоремы двойственности любой фактор типа III изоморфен скрещенному произведению некоторой алгебры фон Неймана P типа II_∞ на однопараметрическую группу автоморфизмов (θ_s), причем ограничение действия $\overline{\overline{\theta}}$ на центр Z_P алгебры фон Неймана P эргодично, но не изоморфно группе сдвигов в $L_\infty(\mathbf{R})$, и существует такой след $\tau \in P(P)$, что $\tau \circ \theta_s = e^{-s}\tau$ для всех $s \in \mathbf{R}$. Обратно, пусть задан набор из полуконечной алгебры фон Неймана P, действия $\overline{\overline{\theta}}$ группы $\mathbf{R}$ на P и такого точного нормального полуконечного следа τ на P, что $\tau \circ \theta_s = e^{-s}\tau$ для всех $s \in \mathbf{R}$. Если произведение $N = P \times_\theta \mathbf{R}$ есть фактор, то θ эргодически действует на центре Z_P алгебры P. Пусть N — фактор. Тогда для любого вещественного t число e^{-t} содержится в $S(N)$ в том и только том случае, если ограничение θ_t на Z_P тождественно; в частности, N есть фактор типа III_1 тогда и только тогда, когда P — фактор. Фактор N является фактором типа III тогда и только тогда, когда интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\theta_s(x))\,ds$ расходится для всех ненулевых x из $(Z_P)_+$ и ω из $(Z_P)_*^+$; в частности, если N — фактор типа III, то P — алгебра типа II_∞. Набор (P, θ, τ) определяется алгеброй фон Неймана N однозначно в следующем смысле: если $(\overline{P}, \overline{\theta}, \overline{\tau})$ — другой набор с теми же свойствами, $\overline{N}$ есть $\overline{P} \times_{\overline{\theta}} \mathbf{R}$, то N изоморфна $\overline{N}$ в том и только том случае, если существует изоморфизм π алгебры фон Неймана P на $\overline{P}$, удовлетворяющий условию $\pi \circ \theta_s \circ \pi^{-1} = \overline{\theta}_s$ для всех $s \in \mathbf{R}$. Это разложение $N = P \times_\theta \mathbf{R}$ называется *непрерывным разложением* факторов типа III; известны многочисленные приложения этого разложения к изучению строения факторов типа III_λ, $\lambda > 0$, и их автоморфизмов.

Для факторов типа III_λ, $0 < \lambda < 1$, имеет место также и дискретный аналог последнего результата. А именно, пусть P — фактор типа III_λ, $0 < \lambda < 1$. Тогда существует такой фактор P типа II_∞ и такой автоморфизм $\theta \in \mathrm{aut}\,P$, что для некоторого следа $\tau \in P(P)$ выполняется соотношение $\tau \circ \theta = \lambda\tau$ и фактор N изоморфен скрещенному произведению фактора P на группу $\mathbf{Z}$ относительно действия $n \to \theta^n$, $n \in \mathbf{Z}$. Любой фактор типа III_λ, $0 < \lambda < 1$, может быть получен такой конструкцией, и две пары (P_1, θ_1) и (P_2, θ_2) тогда и только тогда приводят к изоморфным факторам, когда они соответствуют одному и тому же числу λ, причем существует такой изоморфизм π фактора P_1 на P_2, что образы автоморфизмов $\pi\theta_1\pi^{-1}$ и θ_2 в фактор-группе группы симметричных автоморфизмов фактора N_2 по нормальному делителю внутренних автоморфизмов сопряжены (это отношение называется отношением *внешней сопряженности*).

Кроме того, все факторы типа III_0 могут быть получены (с точностью до изоморфизма) как *факторы Кригера*, т. е. как скрещенные произведения абелевой алгебры фон Неймана на группу целых чисел.

Приведенные в этом разделе результаты связаны со следующей общей теоремой о типе скрещенного произведения. Пусть N — алгебра фон Неймана, G — локально компактная группа, α — действие группы G на N; для полуконечности скрещенного произведения $W^*(\pi_\alpha)$ достаточно (а если группа G действует свободно на центре алгебры фон Неймана N, то и необходимо), чтобы существовал такой след $\tau \in P(N)$, что $\tau \circ \alpha(g) = \Delta(g)\tau$ для всех $g \in G$, где Δ — модуль группы G.

Отметим в заключение этого пункта интересный результат о вещественной структуре в факторах типа III_λ, $0<\lambda<1$, с сепарабельным преддвойственным пространством, представляющий интерес в связи с рядом общих вопросов теории алгебр фон Неймана и теории йордановых банаховых алгебр. Этот результат связан с изучением инволютивных антиавтоморфизмов алгебр фон Неймана и демонстрирует естественность языка скрещенных произведений в задачах, формально не требующих их привлечения. Пусть P — фактор типа III_λ, $0<\lambda<1$, с сепарабельным преддвойственным пространством, θ — инволютивный симметричный антиавтоморфизм фактора P. Тогда имеет место одна из двух ситуаций: либо существует подфактор N типа II_∞ в факторе P, инвариантный относительно θ, причем канонический след τ на N также θ-инвариантен, существует автоморфизм γ фактора N, удовлетворяющий условию $\tau \circ \gamma = \lambda\tau$, и существует инволютивный симметричный антиавтоморфизм ψ фактора N, коммутирующий с γ, для которых пара (P, θ) изоморфна паре $(N \times_\gamma \mathbf{Z}, \tilde{\psi})$, где $\tilde{\psi}$ — единственный инволютивный симметричный антиавтоморфизм скрещенного произведения $N \times_\gamma \mathbf{Z}$, удовлетворяющий условиям $\tilde{\psi}\tau_\alpha = \tau_\alpha\tilde{\psi}$ и $\tilde{\psi}(\lambda(g)) = \lambda(g)^*$ для всех $g \in G$; либо существует такой фактор N типа II_∞ со следом τ и такой симметричный антиавтоморфизм β фактора N, удовлетворяющий условию $\tau \circ \beta = \sqrt{\lambda}\tau$, что пара (P, θ) эквивалентна паре $((N \oplus N^{\mathrm{op}}) \times_\gamma \mathbf{Z}, \tilde{\psi})$, где N^{op} — алгебра фон Неймана, противоположная N (т. е. $N^{\mathrm{op}} = N$ как банахово пространство с обращением порядка сомножителей: $(xy)_{\mathrm{op}} = yx$ для всех $x, y \in N^{\mathrm{op}}$), $\gamma(x, y) = (\beta(y), \beta(x))$ и $\psi(x, y) = (y, x)$ для всех $x, y \in N$.

2. Пространства L_p относительно веса. Пусть N — алгебра фон Неймана с сепарабельным преддвойственным пространством, φ_0 — фиксированное точное нормальное состояние на N и $\sigma_t = \sigma_t^{\varphi_0}$ — соответствующая модулярная группа, и пусть $P = N \times_\sigma \mathbf{R}$. Это скрещенное произведение является полуконечной алгеброй фон Неймана; пусть τ — соответствующий след из $P(P)$, а $\tilde{\sigma} = \theta$ — соответствующее дуальное действие группы $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$ на P, удовлетворяющее условию $\tau \circ \theta_s = e^{-s}\tau$ для всех $s \in \mathbf{R}$ (ср. раздел 1). Пусть φ — вес из $P(N)$ и пусть $\tilde{\varphi}$ — соответствующий дуальный вес на P (см. раздел 4 § 3). Пусть h_φ — производная Радона — Никодима веса $\tilde{\varphi}$ по τ (т. е. $\varphi(x) = \tau(xh_\varphi)$ для всех $x \in \mathfrak{N}_\varphi$). Оператор h_φ оказывается τ-измеримым в том и только том случае, когда $\varphi \in N_*^+$, и пространство $L_p(\varphi)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, определяется по Хаагерупу [31] как семейство таких τ-измеримых присоединенных к P операторов K, что $\theta_s(K) = e^{-s/p}K$ для всех $s \in P$, или как семейство таких замкнутых операторов K, присоединенных к P, полярное разложение которых $K = u|K|$ удовлетворяет условиям $u \in N$ и $|K| = h_\varphi^{1/p}$ для некоторого однозначно определенного элемента $\varphi \in N_*^+$. Эти пространства не зависят от выбора φ_0 (с точностью до изоморфизма) и изоморфны надлежащим интерполяционным пространствам между алгеброй фон Неймана N и ее преддвойственным пространством N_* (изоморфным пространству $L_1(\varphi)$).

3. Аналог соответствия Галуа между подгруппами и подалгебрами. Для иллюстрации результата этого типа (а им посвящено много работ — [6, 7, 43, 47, 73]) рассмотрим это соответствие в частном случае действий абелевых групп. Пусть N — алгебра фон Неймана, G — локально компактная абелева группа, α — действие группы G на N, $\tilde{\alpha}$ — дуальное действие группы характеров $\hat{G}$ группы G на скрещенном произведении $N \times_\alpha G$. Тогда существует естественное взаимно однозначное соответствие между замкнутыми подгруппами группы G и множеством $\tilde{\alpha}$-инвариантных подалгебр фон Неймана P в $N \times_\alpha G$, содержащих $\pi_\alpha(N)$; а именно, любой такой подалгебре P можно поставить в соответствие подгруппу H в G, являющуюся аннулятором множества таких $\tau \in \hat{G}$, что $\tilde{\alpha}_\tau(x) = x$ для всех $x \in P$, и тогда $P = N \times_\alpha H$.

4. Спектры действий. Теорема об относительном коммутанте и ее приложения. Существует несколько полезных понятий спектра для действия локально компактной группы на алгебре фон Неймана, и связи между различными понятиями спектра весьма многообразны.

Мы ограничимся обсуждением простейшей ситуации, относящейся к случаю, когда действующая на алгебре фон Неймана группа является абелевой.

Пусть N — алгебра фон Неймана, G — локально компактная абелева группа, α — действие группы G на N. Пусть $f \in L_1(G)$, $x \in N$ и $\theta_\alpha(f)(x)$ — такой элемент в N, что $\varphi(\theta_\alpha(f))(x)) = \int\limits_G f(g)\varphi(\alpha_g(x))\,dg$ для всех $\varphi \in N_*$. Отображение θ_α есть сжимающий гомоморфизм групповой алгебры $L_1(G)$ в алгебру ультраслабо непрерывных линейных операторов на N, так что $\theta_\alpha^{-1}(0)$ — замкнутый идеал в $L_1(G)$. Пусть $\mathrm{sp}(\alpha)$ — подмножество группы характеров $\hat{G}$ группы G, состоящее из таких $\chi \in \hat{G}$, что $\hat{f}(\chi) = 0$ для всех $f \in \theta_\alpha^{-1}(0)$. Множество $\mathrm{sp}(\alpha)$ называется *спектром Арвесона* действия α.

Следующие понятия являются аналогами понятия существенного спектра. Пусть N^α — алгебра α-инвариантных элементов в N, e — ненулевой проектор в N^α, $\alpha^{(e)}$ — действие группы G на алгебре фон Неймана eNe, являющееся ограничением действия α на (α-инвариантное) подпространство eNe. Тогда спектр Конна $\Gamma(\alpha)$ (соответственно спектр Борхерса $\Gamma_B(\alpha)$) действия α *определяется как пересечение спектров Арвесона действий* α^e по всем ненулевым проекторам e в N^α (соответственно по всем проекторам e в N^α с единичным центральным носителем). Мы не будем приводить самостоятельных результатов о спектрах Борхерса и ограничимся замечанием, что $\Gamma(\alpha) \subset \Gamma_B(\alpha)$, а если α эргодически действует на центре алгебры фон Неймана N (т. е. единственными α-инвариантными центральными элементами являются скалярные кратные единицы N), то $\Gamma_B(\alpha) = \Gamma(\alpha)$.

Спектр Конна $\Gamma(\alpha)$ является замкнутой подгруппой в группе характеров группы G и несет полезную информацию о ряде свойств действия α. В частности, $\Gamma(\alpha) = \hat{G}$ тогда и только тогда, когда все точки центра Z_N алгебры N являются α-инвариантными, т. е. α тождественно на Z_N. В связи с этим следующие условия эквивалентны: 1) N — фактор; 2) α тождественно на центре Z_N, а дуальное действие $\hat{\alpha}$ эргодично на центре скрещенного произведения $N \times_\alpha G$; 3) $\Gamma(\hat{\alpha}) = G$ и $\hat{\alpha}$ эргодично на центре произведения $N \times_\alpha G$. Аналогично, $N \times_\alpha G$ является фактором тогда и только тогда, когда $\Gamma(\alpha) = \hat{G}$ и α эргодично на центре Z_N алгебры N. Если N — фактор и группа $\hat{G}/\Gamma(\alpha)$ компактна, то аннулятор подгруппы $\Gamma(\alpha) \subset \hat{G}$ в группе G совпадает с множеством таких $g \in G$, что автоморфизм α_g порождается некоторым унитарным оператором из алгебры фон Неймана N^α α-инвариантных элементов N. В важном частном случае, когда действие α определяется группой σ^φ модулярных автоморфизмов, связанной с весом $\varphi \in P(N)$, спектр $\Gamma(\sigma^\varphi)$ совпадает для всех $\varphi \in P(N)$ с семейством натуральных логарифмов ненулевых элементов инварианта Конна $S(N)$.

Ряд результатов спектрального характера связан со следующим утверждением, часто называемым *теоремой об относительном коммутанте*. Пусть N — алгебра фон Неймана, G — локально компактная группа, α — действие группы G на N; следующие условия эквивалентны: 1) выполняется так называемое *свойство относительного коммутанта*, т. е. имеет место равенство $\alpha(Z_N)' \cap (N \times_\alpha G) = \alpha(N)$; 2) действие группы G на центре Z_N алгебры N *свободно* (т. е. для любого компакта K в G, не содержащего единичного элемента, и любого ненулевого проектора $p \in Z_N$ существует такой ненулевой проектор $q \in Z_N$, $q \leqslant p$, что $\alpha_g(q)q = 0$ для всех $g \in K$). Свойство относительного коммутанта влечет выполнение целого ряда соотношений и равенств (в частности, равенства $\alpha(N)' \cap (N \times_\alpha G) = \alpha(Z_N)$ и совпадения центра скрещенного произведения $W^*(\pi_\alpha)$ с алгеброй $\pi_\alpha(Z_N^\alpha)$, в связи с чем алгебра фон Неймана $W^*(\pi_\alpha)$ при наличии свойства относительного коммутанта, является фактором тогда и только тогда, когда действие α на центре Z_N эргодично). С другой стороны, свойство относительного коммутанта выполняется автоматически в ряде важных частных случаев, например, если G абелева, а действие группы α на центре Z_N эргодично и точно (так что нееденичные элементы группы действуют нетривиально, а нескалярные элементы центра не инвариантны). Приведем пример применения свойства относительного коммутанта. Пусть N_1, N_2 — алгебры фон Неймана, α_1, α_2 — действия локально компактной абелевой группы G на N_1, N_2 соответственно, обладающие свойством относительного коммутанта, и пусть $\alpha_1 \otimes \alpha_2$ — действие — произведение (т. е. $(\alpha_1 \otimes \alpha_2)_g = (\alpha_1)_g \otimes \otimes (\alpha_2)_g$ для всех $g \in G$) группы G на $N_1 \times N_2$; тогда $\Gamma(\alpha_1 \otimes \alpha_2)$ совпадает с множеством таких характеров $\chi \in \hat{G}$, что $(\hat{\alpha}_1)_\chi \otimes \iota$ тривиально на множестве $\hat{\alpha}$-инвариантных элементов центра тензорного произведения $M_1 \otimes M_2$ скрещенных произведений $M_i = N_i \times_{\alpha_i} G$, $i = 1, 2$, где $\hat{\alpha}_\chi = (\hat{\alpha}_1)_\chi \otimes (\hat{\alpha}_2)_{-\chi}$ для всех $\chi \in \hat{G}$. Этот результат имеет, в свою очередь, интересные приложения к теории действий с чисто точечным спектром относительно данного нормального состояния φ (т. е. действий с линейной оболочкой спектральных подпространств, плотной в $L_2(N, \varphi)$). С его помощью можно, например, убедиться в том, что если тензорное произведение фактора N и фактора типа III_λ, $0 < \lambda < 1$ (с сепарабельными преддвойственными пространствами) изоморфно исходному фактору N, то либо N есть фактор типа $\mathrm{III}_{\lambda^{1/k}}$ для некоторого натурального k, либо N — фактор типа III_1.

5. Скрещенные произведения алгебр фон Неймана и представления групп. Пусть H — топологическая группа, L — ее замкнутый нормальный делитель и пусть $G = H/L$ — локально компактная топологическая группа. Пусть π — сильно непрерывное унитарное представление группы L в гильбертовом пространстве H_π. Пусть $M(\pi)$ (или просто M) — алгебра фон Неймана, порожденная семейством операторов представления π. Пусть μ — левая мера Хаара на G, $L_2(H_\pi, H, L)$ — пополнение векторного пространства $K(H_\pi, H, L)$ (таких непрерывных функций $\xi: H \to H_\pi$, что $\xi(hl) = \pi(l)^* \xi(h)$ для всех $l \in L$ и $h \in H$, а функция ξ на группе G, определяемая равенством $hL \to \to \|\xi(h)\|$, $h \in H$, имеет компактный носитель) относительно скалярного произведения $(\xi_1, \xi_2) = \int\limits_G (\xi_1(h), \xi_2(h)) d\mu(hL)$, $\xi_1, \xi_2 \in K(H_\pi, H, L)$. Представление U^π группы H в $L_2(H_\pi, H, L)$, индуцированное представлением π, определяется тогда формулой $(U^\pi(h)\xi)(h_1) = \xi(h^{-1}h_1)$, $h, h_1 \in H$, $\xi \in K(H_\pi, H, L)$. Пусть $I(M(\pi), H, L)$ — алгебра фон Неймана, порожденная семейством операторов индуцированного представления.

Представление π называется *квазиинвариантным* относительно действия группы H, если для любого $h \in H$ существует (автоматически единственный) симметричный автоморфизм β_h алгебры фон Неймана $M(\pi)$, удовлетворяющий условию $\beta_h(\pi(l)) = = \pi(hlh^{-1})$ для всех $l \in L$, причем отображение $h \to \beta_h(x)$ группы H в алгебру фон Неймана M является ультраслабо непрерывным для всех $x \in M$. В частности, если M — алгебра фон Неймана, G — локально компактная группа, α — действие группы G на M, H — полупрямое произведение унитарной группы $U(M)$ на группу G относительно действия α и L есть унитарная группа $U(M)$, то единичное представление $L = U(M)$ квазиинвариантно относительно действия группы H (с $\beta_{(u,g)}(x) = \alpha_g(uxu^*)$ для $(u, g) \in \in H = U(M) \times_\alpha G$, $x \in M$). Вообще, если H — полупрямое произведение $H = L \times_\alpha P$ нормального делителя L и подгруппы P, то существование семейства β_h, обеспечивающего квазиинвариантность представления π, равносильно существованию такого поточечно ультрасильно непрерывного отображения $p \to \tilde{\alpha}_p$ группы P в группу симметричных автоморфизмов алгебры фон Неймана $M(\pi)$, что $\tilde{\alpha}_p(\pi(l)) = \pi(\alpha_p(l))$ для всех $l \in L$.

Пусть H — полупрямое произведение группы L и некоторой локально компактной группы G относительно действия α группы G на L и пусть π — сильно непрерывное унитарное представление группы L в гильбертовом пространстве H_π, квазиинвариантное относительно действия группы H. Пусть $\tilde{\alpha}: g \to \tilde{\alpha}_g$ — соответствующее действие группы G на алгебре фон Неймана $M(\pi)$. Тогда алгебра фон Неймана $I(M(\pi), H, L)$ пространственно изоморфно скрещенному произведению алгебры фон Неймана $M(\pi)$ на группу G относительно действия $\tilde{\alpha}$.

В связи с этим фактом теория скрещенных произведений алгебр фон Неймана может рассматриваться как часть теории алгебр фон Неймана, порожденных индуцированными представлениями топологических групп. С этой точки зрения понятие скрещенного произведения весьма узко. Уже в классе представлений, индуцированных с нормального делителя, не расщепляющего группу, для описания алгебры фон Неймана индуцированного представления приходится усложнять конструкцию скрещенного произведения, вводя так называемые скрученные скрещенные произведения, алгебры вида $R(G, A, \alpha, v)$ [74, 81], алгебры систем ковариантности [55, 56, 67] и ряд других равноценных понятий [8, 68, 77, 79]. Для произвольных же индуцированных представлений требуется более общая конструкция; один из вариантов такой конструкции был предложен недавно М. Ю. Симаковым вместе с соответствующим обобщением теоремы двойственности, что позволяет получать, например, результаты о типе индуцированного представления.

§ 5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Теорема двойственности для алгебр Каца и теория двойственности для скрещенных произведений изложены в основном по Еноку и Шварцу [22—26, 62, 63] (см. также Накагами [44] и Де Каньер [18]—[20]); модификация для действий и кодействий групп — в основном по обзору Накагами и Такесаки [47]; приложения — по статьям [11, 14, 16, 64, 72, 78; 4, 5, 31, 39, 6, 7, 43, 73; 32, 33, 35, 41, 45, 51, 71, 52, 57, 58].

Язык теории скрещенных произведений алгебр фон Неймана гораздо богаче введенного выше. Одним из фундаментальных понятий, заслуживающим в настоящее время отдельного обзора, является понятие потока весов Конна—Такесаки [17]. Оно тесно связано с теорией действий групп и теорией скрещенных произведений алгебр фон Неймана; так, с помощью понятия потока весов можно описать факторы типа III_0 как скрещенные произведения алгебр фон Неймана типа II_∞ (определенного класса) на группу $\mathbf{Z}$. За рамками обзора остались также: структура групп автоморфизмов [14, 16, 72]; инвариант Конна для факторов типа II и его приложения к скрещенным произведениям [12, 36], теория интегрируемых, полудуальных и доминантных действий групп на алгебрах фон Неймана (в частности, в связи с теорией дуальных действий) [22, 24, 47, 50]; вопросы гармонического анализа на группах и алгебрах Каца в связи с теорией двойственности [18, 20, 37], и различные варианты и обобщения теории двойственности, в том числе — выходящие за рамки естественного формализма алгебр Каца [34, 40].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голодец В. Я.*, Скрещенные произведения неймановских алгебр. Успехи мат. наук, 1971, *26*, № 5, 3—50 (РЖМат, 1972, 3Б619)

2. *Кац Г. И.*, Кольцевые группы и принцип двойственности. Тр. Моск. мат. о-ва, 1963, *12*, 259—301; 1965, *13*, 84—113 (РЖМат, 1964, 9Б453; 1966, 7Б450)

3. *Кириллов А. А.*, Динамические системы, факторы и представления групп. Успехи мат. наук, 1967, *22*, № 5, 67—80 (РЖМат, 1968, 4Б717)
4. *Трунов Н. В.*, Пространства L_p, ассоциированные с весом. В сб.: Конструктивная теория функций и функциональный анализ, Казань, 1981, № 3, 88—93 (РЖМат, 1982, 3Б846)
5. *Шерстнев А. Н.*, К общей теории меры и интеграла в алгебрах Неймана. Изв. вузов, Математика, 1982, *8*, 20—35 (РЖМат, 1982, 12Б1064)
6. *Choda H.*, Correspondences between von Neumann algebras and discrete automorphism groups. Lect. Notes Math., 1978, *650*, 41—54 (РЖМат, 1979, 3Б701)
7. —, *Takehana H.*, Correspondences between subgroups and subalgebras in crossed products. Math. jap., 1981, *26*, № 2, 161—170 (РЖМат, 1981, 10Б779)
8. *Choda M.*, Extensions of the inner automorphism group of a factor. — Publ. RIMS Kyoto Univ., 1978, *14*, № 3, 731—739 (РЖМат, 1979, 10Б927)
9. —, A characterization of crossed products of factors by discrete outer automorphism groups. J. Math. Soc. Japan, 1979, *31*, № 2, 257—261 (РЖМат, 1979, 12Б866)
10. —, Crossed product and property *T*. Math. jap., 1981, *26*, № 5, 557—567 (РЖМат, 1982, 4Б941)
11. *Connes A.*, Une classification des facteurs de type III. Ann. sci. Ecole norm. supér., 1973, *6*, № 2, 133—252 (РЖМат, 1974, 3Б768)
12. —, Sur la classification des facteurs de type II. Comptes rendus Ac. sci., 1975, *281*, № 1, A13—A15 (РЖМат, 1975, 12Б944)
13. —, A factor not anti-isomorphic to itself. Bull. London Math. Soc., 1975, *7*, № 2, 171—174 (РЖМат, 1976, 2Б760); Ann. Math., 1975, *101*, № 3, 536—554 (РЖМат, 1976, 1Б653)
14. —, On the classification of von Neumann algebras and their automorphisms. Symp. math. Inst. naz. alta mat. Vol. *20*, London, — N. Y., 1976 (1977), 435—478 (РЖМат, 1978, 3Б749)
15. —, On the spatial theory of von Neumann algebras. J. Funct. Anal., 1980, *35*, № 2, 153—164 (РЖМат, 1980, 8Б751)
16. —, Classification of factors. Oper. Algebras and Appl. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., 1982, *38*, 43—109 (РЖМат, 1983, 8Б979)
17. —, *Takesaki M.*, The flow of weights on factors of type III. Tôhoku Math. J., 1977, *29*, № 4, 473—575 (РЖМат, 1978, 3Б754)
18. *De Cannière J.*, Produit croisé d'une algèbre de Kac par une groupe localement compact. Bull. Soc. Math. France, 1979, *107*, № 4, 337—372 (РЖМат, 1980, 6Б1026)
19. —, On the intrinsic group of a Kac algebra. Proc. London. Math. Soc. 1980, *40*, № 1, 1—20 (РЖМат, 1980, 8Б754)
20. —, *Enock M.*, *Schwartz J.-M.*, Algèbres de Fourier associées à une algèbre de Kac. Math. Ann., 1979, *245*, № 1, 1—22 (РЖМат, 1980, 4Б962)
21. *Digernes T.*, Poinds dual sur une produit croisé. C. r. Acad. sci., 1974, *A278*, № 14, 937—940 (РЖМат, 1974, 10Б771)
22. *Enock M.*, Produit croisé d'une algèbre de von Neumann par une algèbre de Kac. J. Funct. Anal., 1977, *26*, № 1, 16—47 (РЖМат, 1978, 5Б641)
23. —, *Schwartz J.-M.*, Une dualité dans les algèbres de von Neumann. Bull. Soc. math. France 1975, 1—144 (РЖМат, 1976, 10Б705)
24. —, —, Produit croisé d'une algèbre de von Neumann par une algèbre de Kac. II. Publ. RIMS Kyoto Univ., 1980, *16*, № 1, 189—232 (РЖМат, 1980, 10Б770)
25. —, —, Actions d'une algèbre de Kac sur une algèbre de von Neumann et représentations. C. r. Acad. sci., 1980, AB291, № 12, A631—A633 (РЖМат, 1981, 6Б953)
26. —, —, Systémes dynamiques généralisés et correspondances. J. Oper. Theory, 1984, *11*, 273—303
27. *Haagerup U.*, The standard form of the von Neumann algebras. Math. scand., 1975, *37*, № 2, 271—283 (РЖМат, 1976, 10Б704)
28. —, On the dual weights for crossed products of von Neumann algebras.

Math. scand., 1978, *43*, № 1, 99—118, 119—140 (РЖМат, 1980, 4Б956, 4Б957)
29. —, Operator-valued weights and crossed products. — Symp. math. Inst. naz. alta mat. Vol. *20*, London — N. Y., 1976 (1977), 241—251 (РЖМат, 1978, 3Б746)
30. —, Operator valued weights in von Neumann algebras. J. Funct. Anal., 1979, *32*, № 2, 175—206; *33*, № 3, 339—361 (РЖМат, 1979, 11Б849; 1980, 4Б955)
31. —, L_p-spaces associated with an arbitrary von Neumann algebra. Colloq. int. CNRS, 1979, *274*, 175—184 (РЖМат, 1980, 8Б744)
32. *Haga Y.*, On a relative commutant of a von Neumann algebra in its crossed product. J. Fac. Eng. Sci. Ibaraki Univ., 1977, *25*, 165—169 (РЖМат, 1978, 10Б933)
33. *Halpern H.*, Spectral representations for abelian automorphism groups of von Neumann algebras. J. Funct. Anal., 1980, *36*, № 3, 313—342 (РЖМат, 1980, 11Б922)
34. *Heeswijck L. v.*, Duality in tre theory of crossed products. Math. scand., 1979, *44*, № 2, 313—329 (РЖМат, 1980, 11Б925)
35. *Herman R. H.*, *Longo R.*, A note on Г-spectrum of an automorphism group. Duke Math. J., 1980, *47*, № 1, 27—32 (РЖМат, 1980, 11Б923)
36. *Jones V. F. R.*, Actions of finite groups on the hyperfinite II_1 factor. Mem. Amer. Math. Soc., 1980, *237*, 1—70 (РЖМат, 1981, 4Б872)
37. *Katayama Y.*, Isomorphisms of the Fourier algebras in crossed products. Pacif. J. Math., 1980, *86*, № 2, 505—511 (РЖМат, 1981, 3Б674)
38. *Kirchberg E.*, Representations of coinvolutive Hopf-W^*-algebras and non abelian duality. Bull. Acad. Pol. sci. Sér. sci. math. Astron. et phys., 1977, *25*, № 2, 117—122 (РЖМат, 1978, 2Б742)
38. *Kosaki H.*, Applications of the complex interpolation method to a von Neumann algebra: non-commutative L_p-spaces. J. Funct. Anal., 1984, *56*, № 1, 29—78 (РЖМат, 1984, 8Б1071)
40. *Landstad M.*, Duality theory for covariant systems. Trans. Amer. Math. Soc., 1979, *248*, № 2, 223—267 (РЖМат, 1979, 11Б847)
41. *Nakagami Y.*, Essential spectrum $\Gamma(\beta)$ of a dual action on a von Neumann algebra. Pacif. J. Math., 1977, *70*, № 2, 437—439 (РЖМат, 1978, 12Б1282)
42. —, Dual action on a von Neumann algebra and Takesaki's duality for a locally compact group. Publ. RIMS Kyoto Univ., 1977, *12*, № 3, 727—775 (РЖМат, 1978, 3Б743)
43. —, Co-action and Galois correspondence in von Neumann algebras. Colloq. int. CNRS, 1979, *274*, 285—290 (РЖМат, 1980, 8Б746)
44. —, Some remarks on crossed products of von Neumann algebras by Kac algebras. Yokohama Math. J., 1979, *27*, № 2, 141—162 (РЖМат, 1980, 8Б744)
45. —, *Oka Y.*, On Connes spectrum Г of a tensor product of actions on von Neumann algebras. Yokohama Math. J., 1978, *26*, № 2, 189—200 (РЖМат, 1979, 5Б801)
46. —, *Sutherland C.*, Takesaki's duality for regular extensions of von Neumann algebras. Pacif. J. Math., 1979, *83*, № 1, 221—229 (РЖМат, 1980, 6Б1021)
47. —, *Takesaki M.*, Duality for crossed products of von Neumann algebras. Lect Notes Math., 1979, *731*, 1—139 (РЖМат, 1980, 4Б954К)
48. *Ocneanu A.*, Actions des groupes moyennables sur les algèbres de von Neumann. Comptes rendus Acad. sci., 1980, *AB291*, № 6, A399—A401 (РЖМат, 1981, 4Б870)
49. —, A Rohlin type theorem for groups acting on a von Neumann algebras. Proc. 4th Conf., Oper. Theory, Timisoara, 1980, 49—65 (РЖМат, 1982, 1Б1154)
50. *Paschke W. L.*, Integrable group actions on von Neumann algebras. — Math. Scand., 1977, *40*, № 2, 234—248 (РЖМат, 1978, 6Б715)
51. —, Relative commutant of a von Noumann algebra in its crossed product by a group action. Math. Z., 1978, *163*, № 1, 5—13 (РЖМат, 1979, 5Б800)

52. *Pedersen N. V.*, On the left regular representation of a separable locally compact group. J. Funct. Anal., 1981, *43*, № 3, 368—393 (РЖМат, 1982, 3Б849)
53. —, *Takesaki M.* The Radon Nikodym theorem for von Neumann algebras. Acta Math., 1973, *130*, № 1—2, 55—87 (РЖМат, 1973, 6Б761)
54. *Roberts J. E.*, Cross products of a von Neumann algebras by group duals. Symp. math. Inst. naz. alta mat. Vol. *20*, London — N. Y., 1976(1977), 335—363 (РЖМат, 1978, 4Б581)
55. *Rousseau R.*, The covariance algebra of an extended covariant system. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1979, *85*, № 2, 271—280 (РЖМат, 1979, 10Б926)
56. —, Le commutant d'une algèbre de covariance. — Rev. roum. math. pures et appl., 1980, *25*, № 3, 445—471 (РЖМат, 1980, 11Б758)
57. —, Crossed products of von Neumann algebras and semi-direct product of groups. Proc. Kon. ned. akad. wetensch., 1981, *A84*, № 1, 105—116 (РЖМат, 1981, 7Б859)
58. —, Quasi-invariance and induced representations. Quart. J. Math. Oxford. 1983, *34*, № 2, 491—505
59. —, *Van Daele A.*, Crossed products of commutation systems. Math. Ann., 1979, *239*, № 1, 7—20 (РЖМат, 1979, 8Б843)
60. *Sauvageot J.-L.*, Sur les type du produit croisé d'une algèbre de von Neumann par use groupe localement compact. Bull. Soc. Math. France, 1977, *105*, № 4, 349—368 (РЖМат, 1978, 10Б932)
61. *Schwartz J.-M.*, Relations entre «ring-groups» et algèbres de Kac. Bull. sci. math., 1976(1977), *100*, № 4, 289—300 (РЖМат, 1977, 10Б836)
62. —, Kac algebras. Colloq. int. CNRS, 1979, *274*, 343—351 (РЖМат, 1980, 8Б743)
63. —, Sur la structure des algèbres de Kac. J. Funct. Anal., 1979, *34*, № 3, 370—406; Proc. London Math. Soc., 1980, *41*, № 3, 465—480 (РЖМат, 1980, 7Б611; 1981, 5Б750)
64. *Stacey P. J.*, Real structure in σ-finite factors of type III_λ where $0<\lambda<1$. Proc. London Math. Soc. 1983, *47*, № 2, 275—284 (РЖМат, 1984, 1Б1054)
65. *Stratila S.*, On the tensor product of weights on W^*-algebras. Acta Sci. Math., 1979, *41*, № 3—4, 385—390 (РЖМат, 1980, 8Б738)
66. —, Twisted Plancherel theorem for weights. A non commutative case. Colloq. int. CNRS, 1979, *274*, 353—359 (РЖМат, 1980, 8Б747)
67. —, *Voiculescu D., Zsido L.*, On crossed products. — Rev. roum. math. pures et appl., 1976, *21*, № 10, 1411—1449; 1977, *22*, № 1, 83—117 (РЖМат, 1977, 6Б743, 11Б858)
68. *Sutherland C.*, Cohomology and extensions of von Neumann algebras. Publ. RIMS Kyoto Univ., 1980, *16*, № 1, 105—133, 135—174 (РЖМат, 1980, 9Б704; 9Б705)
69. *Takesaki M.*, Duality in crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III. Acta Math., 1973, *131*, 249—310
70. —, Duality and von Neumann algebras. — Lect. Notes Math., 1972, *247*, 665—786 (РЖМат, 1972, 7Б800)
71. —, Relative commutant theorem in crossed products and the exact sequence for the automorphism group of a factor of type III. — Symp. math. Inst. naz. alta mat. Vol. *20*, London — N. Y., 1976(1977), 179—186 (РЖМат, 1978, 3Б742)
72. —, Automorphisms and von Neumann algebras of type III. — Oper. Algebras and Appl. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc. Vol. *38*. Pt. 2, London — N. Y., 1980(1982), 111—135 (РЖМат, 1983, 8Б980)
73. —, *Tatsuuma N.*, Duality and subgroups. Ann. of Math. 1971, *93*, № 2, 344—364; J. Funct. Anal., 1972, *11*, № 2, 184—190 (РЖМат, 1971, 11Б895; 1973, 2Б769)
74. *Tamaki K.*, On certain automorphisms of R(G, A, α, v). J. Fac. Eng. Ibaraki Univ., 1979, *27*, 197—200 (РЖМат, 1980, 8Б756)
75. —, Comments on an isomorphism between crossed products of von Neu-

mann algebras by finite groups. J. Fac. Eng. Ibaraki Univ., 1980, *28*, 141—145 (РЖМат, 1981, 9Б747)
76. *Tatsuuma N.*, A duality theorem for locally compact groups. J. Math. Kyoto Univ., 1967, *6*, 187—293
77. *Van Daele A.*, A framework to study commutation problems. Bull. Soc. Math. France, 1978, *106*, № 3, 289—309 (РЖМат, 1979, 5Б799)
78. —, Continuous crossed products and type III von Neumann algebras. London Math. Soc. Lect. Notes Ser., 1978, *31*, 1—68 (РЖМат, 1979, 1Б601)
79. —, Fixed points and commutation theorems. Lect. Notes Math., 1978, *650*, 140—144 (РЖМат, 1979, 3Б702)
80. *Voiculescu D.*, Amenability and Katz algebras. Colloq. int. CNRS, 1979, *274*, 451—457 (РЖМат, 1980, 8Б755)
81. *Watatani Y.*, Extensions of the inner automorphism groups of a von Neumann algebra. Math. jap., 1978, *23*, № 2, 205—210 (РЖМат, 1979, 10Б928)
82. *Zsido L.*, Invariance and dual weights. Colloq. int. CNRS, 1979, *274*, 529—533 (РЖМат, 1980, 8Б752)