Так как

$$R_{n,m}(f)=R_{n,m}(H_{2n+m})+R_{n,m}(r_{2n+m}),\quad R_{n,m}(H_{2n+m})=0,$$

то

$$|R_{n,m}(f)|\le M\frac{(b-a)^{2n+m}}{(2n+m)!}\int_a^b p(x)\,dx .$$

Литература

1. Кузьмина А.Л. О точечно-интервальных квадратурных формулах.- В сб.: Конструктивная теория функций и функциональный анализ. Вып. II. Казань, 1979, с. 44 - 51.

2. Кузьмина А.Л. Интервальные квадратурные формулы с кратными узловыми интервалами.- Изв. вузов. Матем., 1980, № 7, с. 39 - 44.

А.Л.Кузьмина

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННО-КВАДРАТУРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Пусть $f(x)\in C[a,b]$ и задана матрица узлов

$$x_k^{(n)},\quad x_k^{(n)}\in[a,b],\quad k=\overline{1,n},\quad n=1,2,\dots . \qquad (1)$$

Положим

$$L_n(f)=\sum_{k=1}^{n}A_k^{(n)}f(x_k^{(n)}),$$

где

$$A_k^{(n)}=\int_a^b \ell_k^{(n)}(x)\,dx,$$

$\ell_k^{(n)}(x)$ - фундаментальные многочлены Лагранжа.

Рассмотрим интерполяционно-квадратурный процесс вида

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx L_n(f),\quad n=1,2,\dots . \qquad (2)$$

Если для каждой функции $f(x) \in C[a,b]$

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

то говорят, что интерполяционно-квадратурный процесс (2) сходится в $C[a,b]$.

Известно, что для сходимости (2) необходимо и достаточно, чтобы

$$\| L_n \| = \sum_{k=1}^{n} | A_k^{(n)} | \leq M$$

для всех n, M – некоторая постоянная.

Возьмем расширенную матрицу узлов.

$$(x_k^{(n)})_1^n \cup (\alpha_p^{(n)})_1^m, \quad m=m(n),\ n=1,2,\dots, \tag{3}$$

где матрица

$$(\alpha_p^{(n)})_1^m, \quad m=m(n), \quad n=1,2,\dots, \tag{3^I}$$

есть "расширение" матрицы (I).

Будем говорить, что интерполяционно-квадратурный процесс (2) обладает свойством устойчивости относительно (3$'$), если он сходится и сходится процесс вида (2) с расширенной матрицей узлов (3).

В этой заметке даются условия, налагаемые на (I) и (3), при которых (2) обладает свойством устойчивости.

Доказывается, что (2) обладает свойством устойчивости, если (I) – матрица узлов Лежандра, а (3$'$) – любая матрица узлов с $m=m(n)<n$. Если же в (3) $m=m(n)\geq n$, то, какова бы ни была матрица (I), (2), вообще говоря, свойством устойчивости не обладает. Если (I) и (3) $(m=m(n)\leq 2)$ – матрицы узлов Чебышева, то (2) обладает свойством устойчивости.

I. Прежде всего, представим $L_n(f)$ в виде

$$L_n(f) = \sum_{k=1}^{n} B_k^{(n)} f(x_1^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}),$$

где

$$B_k^{(n)} = \int_a^b (x-x_1^{(n)})\cdot\ldots\cdot(x-x_{k-1}^{(n)})\,dx, \quad k>1,$$

$$B_1^{(n)} = b - a,$$

$f(x_1^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)})$ – разностное отношение порядка $k-1$,

при этом

$$f(x_1^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{f(x_i^{(n)})}{\omega'_{n,k}(x_i^{(n)})},$$

$$\omega_{n,k}(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - x_i^{(n)}).$$

Тогда для матрицы (3)

$$L_{n,m}(f) = L_n(f) + R_{n,m}(f), \qquad (4)$$

где

$$R_{n,m}(f) = \sum_{p=1}^{m} B_{n+p}^{(n)} f(x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}, \alpha_1^{(n)}, \ldots, \alpha_p^{(n)}).$$

Из (4) следует, что (2) обладает свойством устойчивости тогда и только тогда, когда

$$\| R_{n,m} \| \le K, \quad m = m(n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

K – некоторая постоянная.

Так как

$$R_{n,m}(f) = \sum_{p=1}^{m} B_{n+p}^{(n)} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k^{(n)})}{\omega'_{n,n}(x_k^{(n)}) \pi_{n,p}(x_k^{(n)})} + \sum_{i=1}^{p} \frac{f(\alpha_i^{(n)})}{\omega_{n,n}(\alpha_i^{(n)}) \pi'_{n,p}(\alpha_i^{(n)})} \right],$$

где

$$\pi_{n,p}(x) = \prod_{i=1}^{p} (x - \alpha_i^{(n)}),$$

то обычным образом находим

$$\| R_{n,m} \| = \sum_{k=1}^{n} \left| \sum_{p=1}^{m} \frac{B_{n+p}^{(n)}}{\omega'_{n,n}(x_k^{(n)}) \pi_{n,p}(x_k^{(n)})} \right| + \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{p=i}^{m} \frac{B_{n+p}^{(n)}}{\omega_{n,n}(\alpha_i^{(n)}) \pi'_{n,p}(\alpha_i^{(n)})} \right|.$$

Ясно, что ограниченность сумм

$$\sum_{p=1}^{m} |B_{n+p}^{(n)}| \Big[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|\omega_{n,n}'(x_k^{(n)})\,\pi_{n,p}(x_k^{(n)})|} + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{|\omega_{n,n}(\alpha_i^{(n)})\,\pi_{n,p}'(\alpha_i^{(n)})|} \Big]$$

является достаточным условием того, чтобы (2) обладал свойством устойчивости.

2. Пусть $[a,b]=[-1,1]$, (1) – матрица узлов Лежандра, (3) – произвольная матрица с $m=m(n)<n$.

Так как

$$B_{n+p}^{(n)} = \int_{-1}^{1} \omega_{n,n}(x)\,\pi_{n,p}(x)\,dx = 0\ ,\quad p=\overline{1,m}\ ,$$

то

$$L_{n,m}(f) = L_n(f)\ .$$

Следовательно, (2) с матрицей узлов Лежандра обладает свойством устойчивости относительно любой матрицы (3′), если $m=m(n)<n$.

Если (1) – произвольная матрица узлов и $m=m(n)\geqslant n$, то можно взять (3′), так, чтобы (3) была матрицей с равноотстоящими узлами и содержала точки -1 и $+1$.

Тогда, как это следует из одной теоремы [1, с. 634–641], $\|L_{n,m}\|$ не ограничены и, значит, (2) свойством устойчивости, вообще говоря, не обладает.

Заметим, что если (1) – матрица узлов Лежандра, то (2) будет обладать свойством устойчивости относительно некоторых (3′), $m=m(n)\geqslant n$ [2].

3. Пусть (1) – матрица узлов Чебышева – $x_k^{(n)}=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi$, $k=\overline{1,n}$, $n=1,2,\ldots$, а (3′) – матрица $(-1;1)$.

Так как

$$|B_{n+p}^{(n)}| \leq \frac{A}{n^2\cdot 2^{n-1}}\ ,\quad p=1,2\ ,\ n=1,2,\ldots\ ,$$

A – некоторая постоянная, то

$$\|R_{n,2}\| = \sum_{k=1}^{n} \Big| \frac{B_{n+1}^{(n)}}{\omega_{n,n}'(x_k^{(n)})(x_k^{(n)}+1)} + \frac{B_{n+2}^{(n)}}{\omega_{n,n}'(x_k^{(n)})(x_k^{(n)2}-1)} \Big| +$$

$$+\left|\frac{B_{n+1}^{(n)}}{2\,\omega_{n,n}(-1)}+\frac{B_{n+2}^{(n)}}{2\,\omega_{n,n}(1)}\right|+\left|\frac{B_{n+2}^{(n)}}{2\,\omega_{n,n}(1)}\right|,\ n=1,2,\dots,$$

ограничены в совокупности.

Таким образом, в этом случае (2) обладает свойством устойчивости.

Если узлы $\alpha_p^{(n)}$, $p=1,2$, $n=1,2,\dots$, – любые симметричные корни многочлена (степени $n-1$) Чебышева 2-го рода, то

$$\|R_{n,2}\|=\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{B_{n+1}^{(n)}}{\omega_{n,n}'(x_k^{(n)})(x_k^{(n)}-\alpha_1^{(n)})}+\frac{B_{n+2}^{(n)}}{\omega_{n,n}'(x_k^{(n)})(x_k^{(n)}-\alpha_1^{(n)})(x_k^{(n)}-\alpha_2^{(n)})}\right|+$$

$$+\left|\frac{B_{n+1}^{(n)}}{\omega_{n,n}(\alpha_1^{(n)})(\alpha_1^{(n)}-\alpha_2^{(n)})}+\frac{B_{n+2}^{(n)}}{\omega_{n,n}(\alpha_2^{(n)})(\alpha_2^{(n)}-\alpha_1^{(n)})}\right|+\left|\frac{B_{n+2}^{(n)}}{\omega_{n,n}(\alpha_2^{(n)})(\alpha_2^{(n)}-\alpha_1^{(n)})}\right|,\ n=1,2,\dots$$

ограничены в совокупности, так как

$$|B_{n+p}^{(n)}|\le\frac{A}{n^2\cdot 2^{n-1}},\quad p=1,2,\ n=1,2,\dots.$$

Если узлы $\alpha_1^{(n)}$, $n=1,2,\dots$, – корни многочлена (степени $n-1$) Чебышева 2-го рода, то

$$\|R_{n,1}\|=\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{B_{n+1}^{(n)}}{\omega_{n,n}'(x_k^{(n)})(x_k^{(n)}-\alpha_1^{(n)})}\right|+\left|\frac{B_{n+1}^{(n)}}{\omega_{n,n}(\alpha_1^{(n)})}\right|,\ n=1,2,\dots,$$

также ограничены в совокупности, так как

$$|B_{n+1}^{(n)}|\le\frac{A}{n^2\cdot 2^{n-1}},\quad n=1,2,\dots.$$

Таким образом, (2) с матрицей узлов Чебышева обладает свойством устойчивости относительно (3′), если (3′) – $(\alpha_p^{(n)})_1^2$, $n=1,2,\dots$, $\alpha_p^{(n)}$, $p=1,2$ – любые симметричные корни многочлена (степени $n-1$) Чебышева 2-го рода или (3′) – $\alpha_1^{(n)}$, $n=1,2,\dots$, $\alpha_1^{(n)}$ – любой корень многочлена (степени $n-1$) Чебышева 2-го рода.

Литература

1. Натансон И.П. Конструктивная теория функций.– М.-Л., 1949, с.688.

2. Giovanni Monegato. Positivity of the weigtes of extended Gauss-Legendre quadrature rules. – Mathem. Comput., 1978, v. 32, N141, p. 243-245.

Ф.Ф.Майер

ПОДЧИНЕНИЕ В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ОДНОЛИСТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В настоящей статье решается задача нахождения наилучшей мажоранты в некоторых классах аналитических функций и даются приложения этих результатов к исследованию однолистности интегральных представлений, являющихся решениями обратных краевых задач.

§ 1. Говорят (например, [1, с.356]), что регулярная в круге $E=\{\zeta:|\zeta|<1\}$ функция $S(\zeta)$ подчинена однолистной функции $S_0(\zeta)$, и пишут $S(\zeta)<S_0(\zeta)$, если $S(0)=S_0(0)$ и $S(E)<S_0(E)$. Назовем функцию $S_0(\zeta)$ мажорантой класса $\mathcal{Y}$ функций $S(\zeta)$, если $S(\zeta)<S_0(\zeta)$ для любой функции $S(\zeta)\in\mathcal{Y}$. Если $S_0(\zeta)$– мажоранта, и $S_0(\zeta)<\tilde{S}_0(\zeta)$ для всех мажорант $\tilde{S}_0(\zeta)$ класса $\mathcal{Y}$, то $S_0(\zeta)$ назовем наилучшей мажорантой класса $\mathcal{Y}$.

Очевидно, наилучшая мажоранта, если она существует, единственна с точностью до вращения плоскости ζ. Кроме того, если $S_0(\zeta)$ – мажоранта класса $\mathcal{Y}$ и $S_0(\zeta)\in\mathcal{Y}$, то $S_0(\zeta)$ – наилучшая мажоранта. Нахождение наилучших мажорант различных классов функций позволяет до конца решить ряд экстремальных задач на этих классах.

Основой для дальнейшего служит следующая

Лемма. Если $\zeta S'(\zeta)<\zeta R'(\zeta)$, где функция $\zeta R'(\zeta)$ однолистна и звездообразна в E, а функция $S(\zeta)$ имеет разложение $S(\zeta)=b_n\zeta^n+b_{n+1}\zeta^{n+1}+\dots$, $n\geq 1$, $\zeta\in E$, то $S(\zeta)<\frac{1}{n}R(\zeta)$.