



Общероссийский математический портал

Г. Ш. Тамасян, О методах наискорейшего и гиподифференциального спуска в одной задаче вариационного исчисления, *Выч. мет. программирование*, 2012, том 13, выпуск 1, 197–217

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.192.67.10

7 ноября 2024 г., 12:44:18



УДК 519.3

## О МЕТОДАХ НАИСКОРЕЙШЕГО И ГИПОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО СПУСКА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Г. Ш. Тамасян<sup>1</sup>

Предлагается описание решения вариационной задачи для функционала, зависящего от производной третьего порядка. Рассматриваемая проблема условной оптимизации с помощью теории точных штрафных функций сводится к безусловной задаче. Для построенной штрафной функции разработаны “прямые” численные методы наискорейшего и гиподифференциального спуска. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09–01–00360).

**Ключевые слова:** негладкий анализ, недифференцируемая оптимизация, субдифференциал, кодифференциал, точная штрафная функция, вариационное исчисление.

**Введение.** В настоящее время негладкий анализ [1–8] бурно развивается во всем мире и все глубже проникает во многие разделы прикладной и чистой математики, механики [9, 10], медицины [11]. В работах [12–16] с помощью аппарата теории точных штрафных функций [12, 13, 17] и недифференцируемой оптимизации решены различные задачи вариационного исчисления и теории управления [3, 18, 19]. Цель настоящей статьи — подробно проиллюстрировать подход, описанный в [13], на примере вариационной задаче для функционалов, зависящих от производных третьего порядка.

Рассматриваемая проблема условной оптимизации с помощью теории точных штрафных функций сводится к безусловной задаче. Построенная штрафная функция исследуется в рамках теории “классической” вариации [20–23], выводятся условия экстремума, а на их основе разработаны “прямые” численные методы (наискорейшего и гиподифференциального спуска).

**1. Постановка задачи.** Пусть  $T > 0$  фиксировано. Через  $P^3[0, T]$  обозначим класс дважды непрерывно дифференцируемых на  $[0, T]$  функций с кусочно-непрерывной и ограниченной на  $[0, T]$  третьей производной. Если  $x \in P^3[0, T]$  и  $t_0 \in [0, T]$  — точка разрыва функции  $x'''(t)$ , то для определенности будем считать, что

$$x'''(t_0) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{x''(t_0 + \alpha) - x''(t_0)}{\alpha}.$$

В точке  $t = T$  полагаем

$$x'''(T) = \lim_{\alpha \uparrow 0} \frac{x''(T + \alpha) - x''(T)}{\alpha}.$$

Исследуем на экстремум функционал

$$I(x) = \int_0^T F(x(t), x'(t), x''(t), x'''(t), t) dt,$$

где функцию  $F$  будем считать непрерывно дифференцируемой по всем своим аргументам на  $\mathbb{R}^4 \times [0, T]$ , а граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} x(0) &= x_{10}, & x'(0) &= x_{11}, & x''(0) &= x_{12}, \\ x(T) &= x_{20}, & x'(T) &= x_{21}, & x''(T) &= x_{22}, \end{aligned} \tag{1}$$

т.е. в граничных точках заданы значения не только функции, но и ее производных до второго порядка включительно.

Требуется найти  $x_* \in \Omega$ , такое, что

$$I(x_*) = \min_{x \in \Omega} I(x), \tag{2}$$

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, факультет прикладной математики – процессов управления, Петергоф, Университетский просп., д. 35, 198504, Санкт-Петербург; доцент, e-mail: grigoriytamasjan@mail.ru

где

$$\Omega = \{x \in P^3[0, T] \mid x(0) = x_{10}, x'(0) = x_{11}, x''(0) = x_{12}, x(T) = x_{20}, x'(T) = x_{21}, x''(T) = x_{22}\}. \quad (3)$$

Кривую  $x \in \Omega$  будем называть допустимой, а  $x_* \in \Omega$ , удовлетворяющей (2), назовем оптимальной.

**2. Эквивалентная постановка задачи.** Переформулируем поставленную выше задачу (2), (3). Обозначим через

$$z(t) = x'''(t), \quad z_2(t) = x''(t), \quad z_1(t) = x'(t);$$

тогда

$$\begin{aligned} z_2(t) &= x_{12} + \int_0^t z(\gamma) d\gamma, \\ z_1(t) &= x_{11} + \int_0^t z_2(\tau) d\tau = x_{11} + tx_{12} + \int_0^t \int_0^\tau z(\gamma) d\gamma d\tau, \\ x(t) &= x_{10} + \int_0^t z_1(\tau) d\tau = x_{10} + tx_{11} + \frac{t^2}{2} x_{12} + \int_0^t \int_0^\xi \int_0^\tau z(\gamma) d\gamma d\tau d\xi. \end{aligned} \quad (4)$$

Положим

$$\begin{aligned} Z = \left\{ z \in P[0, T] \mid x_{12} + \int_0^T z(\gamma) d\gamma = x_{22}, x_{11} + Tx_{12} + \int_0^T \int_0^\tau z(\gamma) d\gamma d\tau = x_{21}, \right. \\ \left. x_{10} + Tx_{11} + \frac{T^2}{2} x_{12} + \int_0^T \int_0^\xi \int_0^\tau z(\gamma) d\gamma d\tau d\xi = x_{20} \right\}, \quad (5) \end{aligned}$$

где  $P[0, T]$  — множество кусочно-непрерывных и ограниченных на отрезке  $[0, T]$  функций. Если  $t_0 \in [0, T]$  — точка разрыва функции  $z(t)$ , то для определенности полагаем

$$z(t_0) = \lim_{t \downarrow t_0} z(t), \quad z(T) = \lim_{t \uparrow T} z(t).$$

Введем функционал

$$\begin{aligned} f(z) = \int_0^T F \left( x_{10} + tx_{11} + \frac{t^2}{2} x_{12} + \int_0^t \int_0^\xi \int_0^\tau z(\gamma) d\gamma d\tau d\xi, \right. \\ \left. x_{11} + tx_{12} + \int_0^t \int_0^\tau z(\gamma) d\gamma d\tau, x_{12} + \int_0^t z(\gamma) d\gamma, z(t), t \right) dt. \quad (6) \end{aligned}$$

Покажем, что задача (2), (3)

$$I(x) \longrightarrow \min_{x \in \Omega} \quad (7)$$

эквивалентна задаче (5), (6)

$$f(z) \longrightarrow \min_{z \in Z} \quad (8)$$

в том смысле, что если  $x_* \in \Omega$  — решение задачи (7), то функция  $z_*(t) = x_*'''(t)$  является решением задачи (8); обратно, если  $z_* \in Z$  доставляет минимум функционалу  $f$  на множестве  $Z$ , то функция

$$x_*(t) = x_{10} + tx_{11} + \frac{t^2}{2} x_{12} + \int_0^t \int_0^\xi \int_0^\tau z_*(\gamma) d\gamma d\tau d\xi$$

является решением задачи (7).

Действительно, пусть  $x_* \in \Omega$  и

$$I(x_*) \leq I(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Положим  $z_*(t) = x_*'''(t)$  и возьмем любое  $z \in Z$ . Тогда функция

$$x(t) = x_{10} + tx_{11} + \frac{t^2}{2}x_{12} + \int_0^t \int_0^\xi \int_0^\tau z(\gamma) d\gamma d\tau d\xi$$

принадлежит пространству  $P^3[0, T]$  и удовлетворяет (1), т.е.  $x \in \Omega$ ; следовательно,

$$f(z_*) = I(x_*) \leq I(x) = f(z).$$

Поскольку  $z \in Z$  — произвольное, то  $f(z_*) = \min_{z \in Z} f(z)$ , т.е.  $z_*$  — решение задачи (8).

Пусть теперь  $z_* \in Z$  и  $f(z_*) \leq f(z)$  для всех  $z \in Z$ . Положим

$$x_*(t) = x_{10} + tx_{11} + \frac{t^2}{2}x_{12} + \int_0^t \int_0^\xi \int_0^\tau z_*(\gamma) d\gamma d\tau d\xi.$$

Возьмем любое  $x \in \Omega$ . Тогда функция  $z(t) = x'''(t)$  принадлежит пространству  $P[0, T]$  и из (4), (5) следует, что  $z \in Z$ , поэтому

$$I(x_*) = f(z_*) \leq f(z) = I(x).$$

Поскольку  $x \in \Omega$  — произвольное, то  $I(x_*) = \min_{x \in \Omega} I(x)$ , т.е.  $x_*$  — решение задачи (7).

Итак, если  $z_* \in Z$  — точка глобального минимума функционала  $f$  на множестве  $Z$ , то точка

$$x_*(t) = x_{10} + tx_{11} + \frac{t^2}{2}x_{12} + \int_0^t \int_0^\xi \int_0^\tau z_*(\gamma) d\gamma d\tau d\xi \in \Omega \tag{9}$$

является точкой глобального минимума функционала  $I(x)$  на  $\Omega$ ; обратно, если  $x_* \in \Omega$  — точка глобального минимума функционала  $I(x)$  на  $\Omega$ , то точка  $z_*(t) = x_*'''(t) \in Z$  является точкой глобального минимума  $f$  на  $Z$ .

**3. Точная штрафная функция.** Рассмотрим задачу минимизации функционала (6):

$$f(z) = \int_0^T F \left( x_{10} + tx_{11} + \frac{t^2}{2}x_{12} + \int_0^t \int_0^\xi \int_0^\tau z(\gamma) d\gamma d\tau d\xi, \right. \\ \left. x_{11} + tx_{12} + \int_0^t \int_0^\tau z(\gamma) d\gamma d\tau, x_{12} + \int_0^t z(\gamma) d\gamma, z(t), t \right) dt$$

на множестве  $Z \subset P[0, T]$ , заданном соотношением (5). Множество  $Z$  можно представить в эквивалентном виде

$$Z = \{z \in P[0, T] \mid \varphi(z) = 0\}, \tag{10}$$

где

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^3 \varphi_k(z), \tag{11}$$

$$\varphi_1(z) = \left| \int_0^T z(\gamma) d\gamma - x_{22} + x_{12} \right|, \quad \varphi_2(z) = \left| \int_0^T \int_0^\tau z(\gamma) d\gamma d\tau - x_{21} + x_{11} + Tx_{12} \right|,$$

$$\varphi_3(z) = \left| \int_0^T \int_0^\xi \int_0^\tau z(\gamma) d\gamma d\tau d\xi - x_{20} + x_{10} + Tx_{11} + \frac{T^2}{2}x_{12} \right|.$$

Пусть  $\lambda \geq 0$  фиксировано. Введем функцию

$$\Phi_\lambda(z) = f(z) + \lambda\varphi(z).$$

Функция  $\Phi_\lambda(z)$  называется *штрафной функцией*, а число  $\lambda$  — *штрафным параметром*. В [12, 13] формулируются теоремы, при выполнении которых  $\Phi_\lambda(z)$  является функцией точного штрафа.

Пусть  $y_1, y_2 \in P[0, T]$ . На множестве  $P[0, T]$  введем в рассмотрение следующие метрики:

$$\rho_1(y_1, y_2) = \max_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \int_0^\xi \int_0^\tau (y_1(\gamma) - y_2(\gamma)) d\gamma d\tau d\xi \right|,$$

$$\begin{aligned} \rho_2(y_1, y_2) = \max_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \int_0^\xi \int_0^\tau (y_1(\gamma) - y_2(\gamma)) d\gamma d\tau d\xi \right| + \max_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \int_0^\tau (y_1(\gamma) - y_2(\gamma)) d\gamma d\tau \right| + \\ + \max_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t (y_1(\gamma) - y_2(\gamma)) d\gamma \right| + \sup_{t \in [0, T]} |y_1(t) - y_2(t)|, \end{aligned}$$

$$\rho_3(y_1, y_2) = \sup_{t \in [0, T]} |y_1(t) - y_2(t)|.$$

Между метриками  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  и  $\rho_3$  существует следующая связь:

$$\begin{aligned} \rho_1(y_1, y_2) \leq \rho_2(y_1, y_2) \leq \left[ 1 + T + \frac{T^2}{2!} + \frac{T^3}{3!} \right] \rho_3(y_1, y_2), \\ \rho_1(y_1, y_2) \leq \frac{T^3}{3!} \rho_3(y_1, y_2), \quad \rho_3(y_1, y_2) \leq \rho_2(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Таким образом, метрика  $\rho_3$  мажорирует метрики  $\rho_2$  и  $\rho_1$ , а метрика  $\rho_2$  мажорирует метрики  $\rho_1$  и  $\rho_3$ . Отсюда следует, что метрики  $\rho_2$  и  $\rho_3$  эквивалентны.

Пусть  $\varepsilon > 0$ . Если  $z_* \in Z$  — точка локального минимума функционала  $f$  на множестве  $Z$ , то справедливы следующие включения:

$$\left\{ z \mid \rho_3(z, z_*) < \varepsilon \left[ \sum_{k=0}^3 \frac{T^k}{k!} \right]^{-1} \right\} \subset \left\{ z \mid \rho_2(z, z_*) < \varepsilon \right\} \subset \left\{ z \mid \rho_1(z, z_*) < \varepsilon \right\}.$$

Отсюда заключаем, что точка локального минимума функции  $f$  на множестве  $Z$  в метрике  $\rho_1$  является точкой локального минимума и в метрике  $\rho_2$ , и в метрике  $\rho_3$ . В силу эквивалентности метрик  $\rho_2$  и  $\rho_3$  точка локального минимума функции  $f$  в метрике  $\rho_2$  является точкой локального минимума и в метрике  $\rho_3$  (справедливо и обратное). Теперь нетрудно заметить, что если  $z_* \in Z$  является точкой локального минимума функционала  $f$  на множестве  $Z$  с метрикой  $\rho_1$ , то функция  $x_*(t)$  (см. 9) принадлежит множеству  $\Omega$  и является сильной экстремалью функционала  $I(x)$  на множестве  $\Omega$ .

Если же  $z_* \in Z$  является точкой локального минимума функционала  $f$  на множестве  $Z$  с метрикой  $\rho_2$  или  $\rho_3$ , то функция  $x_*(t)$  (см. 9) является слабой экстремалью функционала  $I(x)$  на множестве  $\Omega$ .

Далее нам потребуется следующая

**Теорема 1** [13]. Пусть функция  $f$  липшицева на множестве  $Z_\varepsilon = \{z \in P[0, T] \mid \varphi(z) < \varepsilon\}$  в метрике  $\rho_i$ . Если  $z_* \in Z$  — точка локального минимума функции  $f$  на множестве  $Z$  в метрике  $\rho_i$ , то найдется  $\lambda^* < \infty$ , такое, что при  $\lambda > \lambda^*$  точка  $z_*$  является точкой локального минимума функционала  $\Phi_\lambda(z) = f(z) + \lambda\varphi(z)$  на всем пространстве  $P[0, T]$  в той же метрике  $\rho_i$ .

Для доказательства теоремы 1 надо показать, что существуют  $a > 0$ ,  $\delta > 0$  и окрестность

$$B_\delta(z_*) = \{z \in P[0, T] \mid \rho_i(z, z_*) < \delta\}$$

точки  $z_*$ , такие, что

$$\varphi^\downarrow(z) = \liminf_{\substack{y \in P[0, T] \\ y \rightarrow z}} \frac{\varphi(y) - \varphi(z)}{\rho_i(y, z)} \leq -a < 0 \quad \forall z \in B_\delta(z_*) \setminus z_*. \quad (12)$$

**4. Классическая вариация функции  $\varphi$  и ее свойства.** Изучим подробнее свойства функции

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^3 \varphi_k(z) = \sum_{k=1}^3 |\bar{\varphi}_k(z)|,$$

где (см. (11))

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_1(z) &= \int_0^T z(\gamma) d\gamma - A_1, \quad A_1 = x_{22} - x_{12}, \\ \bar{\varphi}_2(z) &= \int_0^T \int_0^\tau z(\gamma) d\gamma d\tau - A_2, \quad A_2 = x_{21} - (x_{11} + Tx_{12}), \\ \bar{\varphi}_3(z) &= \int_0^T \int_0^\xi \int_0^\tau z(\gamma) d\gamma d\tau d\xi - A_3, \quad A_3 = x_{20} - \left(x_{10} + Tx_{11} + \frac{T^2}{2} x_{12}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Пусть  $z \in P[0, T]$  фиксировано,  $\varepsilon > 0$ . Выберем произвольное  $v \in P[0, T]$  и положим

$$z_\varepsilon(t) = z(t) + \varepsilon v(t). \tag{14}$$

Функция  $\Delta z_\varepsilon(t) = z_\varepsilon(t) - z(t) = \varepsilon v(t)$  называется *классической вариацией* кривой  $z$ .

Используя (4) и (14), получим вариации кривых  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$  и  $x(t)$ . Имеем

$$\begin{aligned} z_{2\varepsilon}(t) &= x_{12} + \int_0^t z_\varepsilon(\gamma) d\gamma = z_2(t) + \varepsilon \int_0^t v(\gamma) d\gamma, \\ z_{1\varepsilon}(t) &= x_{11} + \int_0^t z_{2\varepsilon}(\tau) d\tau = z_1(t) + \varepsilon \int_0^t \int_0^\tau v(\gamma) d\gamma d\tau, \\ x_\varepsilon(t) &= x_{10} + \int_0^t z_{1\varepsilon}(\tau) d\tau = x(t) + \varepsilon \int_0^t \int_0^\xi \int_0^\tau v(\gamma) d\gamma d\tau d\xi. \end{aligned} \tag{15}$$

Несложно убедиться в том, что справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^t v(\gamma) d\gamma dt &= \int_0^T (T-t)v(t) dt, \\ \int_0^T \int_0^t \int_0^\tau v(\gamma) d\gamma d\tau dt &= \int_0^T \frac{(T-t)^2}{2!} v(t) dt. \end{aligned} \tag{16}$$

Применяя классическую вариацию (14) и выражения (15), (16) из (13), имеем

$$\bar{\varphi}_1(z_\varepsilon) = \int_0^T z_\varepsilon(t) dt - A_1 = \bar{\varphi}_1(z) + \varepsilon \int_0^T v(t) dt, \tag{17}$$

$$\bar{\varphi}_2(z_\varepsilon) = \int_0^T \int_0^\tau z_\varepsilon(\gamma) d\gamma d\tau - A_2 = \bar{\varphi}_2(z) + \varepsilon \int_0^T \int_0^\tau v(\gamma) d\gamma d\tau = \bar{\varphi}_2(z) + \varepsilon \int_0^T (T-t)v(t) dt, \tag{18}$$

$$\bar{\varphi}_3(z_\varepsilon) = \int_0^T \int_0^\xi \int_0^\tau z_\varepsilon(\gamma) d\gamma d\tau d\xi - A_3 = \bar{\varphi}_3(z) + \varepsilon \int_0^T \int_0^\xi \int_0^\tau v(\gamma) d\gamma d\tau d\xi = \bar{\varphi}_3(z) + \varepsilon \int_0^T \frac{(T-t)^2}{2!} v(t) dt. \tag{19}$$

Если  $z \in Z$ , то  $\bar{\varphi}_1(z) = \bar{\varphi}_2(z) = \bar{\varphi}_3(z) = 0$ ; из (17)–(19) получаем явный вид производной функции  $\varphi(z)$  в точке  $z$  по направлению  $v$ :

$$\varphi'(z, v) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\varphi(z + \varepsilon v) - \varphi(z)}{\varepsilon} = \left| \int_0^T v(t) dt \right| + \left| \int_0^T (T-t)v(t) dt \right| + \left| \int_0^T \frac{(T-t)^2}{2!} v(t) dt \right|. \quad (20)$$

Несложно проверить, что это выражение можно переписать в форме

$$\varphi'(z, v) = \max_{\substack{w_k \in [-1, 1] \\ k=1,3}} \int_0^T \left[ w_1 + (T-t)w_2 + \frac{(T-t)^2}{2!} w_3 \right] v(t) dt. \quad (21)$$

Из (21) заключаем, что функция  $\varphi(z)$  субдифференцируема в точке  $z$ , причем ее субдифференциал  $\partial\varphi(z)$  имеет вид

$$\partial\varphi(z) = \text{co} \left\{ w_1 + (T-t)w_2 + \frac{(T-t)^2}{2!} w_3 \mid w_k \in [-1, 1], k = \overline{1, 3} \right\},$$

т.е.

$$\varphi'(z, v) = \max_{W \in \partial\varphi(z)} \int_0^T W(t)v(t) dt.$$

Пусть теперь  $z \notin Z$ , т.е.  $\varphi(z) > 0$ . Рассмотрим производную функции  $\varphi(z)$  в точке  $z$  по направлению  $v$  и покажем справедливость соотношения (12). Возможны следующие семь случаев.

1. Если  $\bar{\varphi}_1(z) \neq 0$ ,  $\bar{\varphi}_2(z) \neq 0$  и  $\bar{\varphi}_3(z) \neq 0$ , то

$$\varphi'(z, v) = \int_0^T \left[ w_1 + (T-t)w_2 + \frac{(T-t)^2}{2!} w_3 \right] v(t) dt, \quad (22)$$

где  $w_1 = \text{sign } \bar{\varphi}_1(z)$ ,  $w_2 = \text{sign } \bar{\varphi}_2(z)$  и  $w_3 = \text{sign } \bar{\varphi}_3(z)$ . Из (22) заключаем, что функция  $\varphi$  дифференцируема в точке  $z$  по Гато, причем ее градиент  $\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}$  представляется в виде

$$\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z} = \text{sign } \bar{\varphi}_1(z) + (T-t) \text{sign } \bar{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!} \text{sign } \bar{\varphi}_3(z).$$

2. Если  $\bar{\varphi}_1(z) = 0$ ,  $\bar{\varphi}_2(z) \neq 0$  и  $\bar{\varphi}_3(z) \neq 0$ , то

$$\varphi'(z, v) = \max_{w_1 \in [-1, 1]} \int_0^T \left[ w_1 + (T-t)w_2 + \frac{(T-t)^2}{2!} w_3 \right] v(t) dt, \quad (23)$$

где в зависимости от знака функций  $\bar{\varphi}_2(z)$  и  $\bar{\varphi}_3(z)$  имеем либо  $w_2 = 1$ ,  $w_3 = 1$ , либо  $w_2 = -1$ ,  $w_3 = 1$ , либо  $w_2 = 1$ ,  $w_3 = -1$ , либо  $w_2 = -1$ ,  $w_3 = -1$ . Из (23) заключаем, что функция  $\varphi$  субдифференцируема в точке  $z$ , причем ее субдифференциал  $\partial\varphi(z)$  принимает вид

$$\partial\varphi(z) = \text{co} \left\{ 1 + (T-t) \text{sign } \bar{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!} \text{sign } \bar{\varphi}_3(z), -1 + (T-t) \text{sign } \bar{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!} \text{sign } \bar{\varphi}_3(z) \right\}.$$

3. Аналогично, если  $\bar{\varphi}_1(z) \neq 0$ ,  $\bar{\varphi}_2(z) = 0$  и  $\bar{\varphi}_3(z) \neq 0$ , то

$$\partial\varphi(z) = \text{co} \left\{ \text{sign } \bar{\varphi}_1(z) + T - t + \frac{(T-t)^2}{2!} \text{sign } \bar{\varphi}_3(z), \text{sign } \bar{\varphi}_1(z) - (T-t) + \frac{(T-t)^2}{2!} \text{sign } \bar{\varphi}_3(z) \right\}.$$

4. Если  $\bar{\varphi}_1(z) \neq 0$ ,  $\bar{\varphi}_2(z) \neq 0$  и  $\bar{\varphi}_3(z) = 0$ , то

$$\partial\varphi(z) = \text{co} \left\{ \text{sign } \bar{\varphi}_1(z) + (T-t) \text{sign } \bar{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!}, \text{sign } \bar{\varphi}_1(z) + (T-t) \text{sign } \bar{\varphi}_2(z) - \frac{(T-t)^2}{2!} \right\}.$$

5. Если  $\bar{\varphi}_1(z) = 0$ ,  $\bar{\varphi}_2(z) = 0$  и  $\bar{\varphi}_3(z) \neq 0$ , то

$$\varphi'(z, v) = \max_{w_1, w_2 \in [-1, 1]} \int_0^T \left[ w_1 + (T-t)w_2 + \frac{(T-t)^2}{2!} w_3 \right] v(t) dt, \tag{24}$$

где в зависимости от знака функции  $\bar{\varphi}_3(z)$  имеем либо  $w_3 = 1$ , либо  $w_3 = -1$ . Из (24) заключаем, что функция  $\varphi$  субдифференцируема в точке  $z$ , причем ее субдифференциал  $\partial\varphi(z)$  имеет вид

$$\partial\varphi(z) = \text{co} \left\{ 1 + T - t + \frac{(T-t)^2}{2!} \text{sign } \bar{\varphi}_3(z), 1 - (T-t) + \frac{(T-t)^2}{2!} \text{sign } \bar{\varphi}_3(z), \right. \\ \left. -1 + T - t + \frac{(T-t)^2}{2!} \text{sign } \bar{\varphi}_3(z), -1 - (T-t) + \frac{(T-t)^2}{2!} \text{sign } \bar{\varphi}_3(z) \right\}. \tag{25}$$

6. Аналогично случаю 5, если  $\bar{\varphi}_1(z) = 0$ ,  $\bar{\varphi}_2(z) \neq 0$  и  $\bar{\varphi}_3(z) = 0$ , то

$$\partial\varphi(z) = \text{co} \left\{ 1 + (T-t) \text{sign } \bar{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!}, 1 + (T-t) \text{sign } \bar{\varphi}_2(z) - \frac{(T-t)^2}{2!}, \right. \\ \left. -1 + (T-t) \text{sign } \bar{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!}, -1 + (T-t) \text{sign } \bar{\varphi}_2(z) - \frac{(T-t)^2}{2!} \right\}.$$

7. Если  $\bar{\varphi}_1(z) \neq 0$ ,  $\bar{\varphi}_2(z) = 0$  и  $\bar{\varphi}_3(z) = 0$ , то

$$\partial\varphi(z) = \text{co} \left\{ \text{sign } \bar{\varphi}_1(z) + T - t + \frac{(T-t)^2}{2!}, \text{sign } \bar{\varphi}_1(z) + T - t - \frac{(T-t)^2}{2!}, \right. \\ \left. \text{sign } \bar{\varphi}_1(z) - (T-t) + \frac{(T-t)^2}{2!}, \text{sign } \bar{\varphi}_1(z) - (T-t) - \frac{(T-t)^2}{2!} \right\}. \tag{26}$$

Покажем справедливость соотношения (12) в каждом из семи случаев.

В случае 1 для любого  $\alpha > 0$  положим  $z_\alpha(t) = z(t) + \alpha v^*(t)$ , где

$$v^*(t) = - \left[ \text{sign } \bar{\varphi}_1(z) + (T-t) \text{sign } \bar{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!} \text{sign } \bar{\varphi}_3(z) \right].$$

Тогда, используя (17)–(19), получим

$$\varphi(z_\alpha) = \varphi(z) + \alpha \int_0^T \left[ \text{sign } \bar{\varphi}_1(z) + (T-t) \text{sign } \bar{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!} \text{sign } \bar{\varphi}_3(z) \right] v^*(t) dt = \\ = \varphi(z) - \alpha H_1^*(z) + o(\alpha), \tag{27}$$

где  $\frac{o(\alpha)}{\alpha} \xrightarrow{\alpha \downarrow 0} 0$  и

$$H_1^*(z) = T + T^2 \text{sign } \bar{\varphi}_1(z) \text{sign } \bar{\varphi}_2(z) + \frac{T^3}{3} (1 + \text{sign } \bar{\varphi}_1(z) \text{sign } \bar{\varphi}_3(z)) + \frac{T^4}{4} \text{sign } \bar{\varphi}_2(z) \text{sign } \bar{\varphi}_3(z) + \frac{T^5}{20}.$$

Заметим, что  $H_1^*(z) > 0$  для всех  $T > 0$ ,  $z \in P[0, T]$ .

Далее,

$$\rho_1(z_\alpha, z) = \max_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \int_0^\xi \int_0^\tau \alpha v^*(\gamma) d\gamma d\tau d\xi \right| = \\ = \alpha \max_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \int_0^\xi \int_0^\tau \left( \text{sign } \bar{\varphi}_1(z) + (T-\gamma) \text{sign } \bar{\varphi}_2(z) + \frac{(T-\gamma)^2}{2!} \text{sign } \bar{\varphi}_3(z) \right) d\gamma d\tau d\xi \right| = \\ = \alpha A_{11}(z), \tag{28}$$



$$\rho_2(z_\alpha, z) = \alpha A_{12}(z), \quad (29)$$

$$\rho_3(z_\alpha, z) = \sup_{t \in [0, T]} |\alpha v^*(t)| = \alpha \sup_{t \in [0, T]} \left| \text{sign } \bar{\varphi}_1(z) + (T-t) \text{sign } \bar{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!} \text{sign } \bar{\varphi}_3(z) \right| = \alpha A_{13}(z). \quad (30)$$

Из (12) имеем

$$\varphi^\perp(z) = \liminf_{\substack{y \in P[0, T] \\ y \rightarrow z}} \frac{\varphi(y) - \varphi(z)}{\rho_i(y, z)} \leq \liminf_{\alpha \downarrow 0} \frac{\varphi(z_\alpha) - \varphi(z)}{\rho_i(z_\alpha, z)} \quad \forall i = \overline{1, 3}. \quad (31)$$

Подставляя (27)–(30) в (31), получим

$$\varphi^\perp(z) \leq -\frac{H_1^*(z)}{A_{1i}(z)} < 0 \quad \forall i = \overline{1, 3}. \quad (32)$$

В случае 2 субдифференциал  $\partial\varphi(z)$ , в отличие от случая 1, не состоит из одной точки, поэтому вначале найдем  $\min_{\alpha \in \mathbb{R}} h(\alpha) = h(\alpha^*)$  (в частном случае решение этой задачи совпадает с решением задачи  $\|v\|^2 \rightarrow \min_{v \in \partial\varphi(z)}$ ), где

$$h(\alpha) = \int_0^T \left[ \alpha + (T-t) \text{sign } \bar{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!} \text{sign } \bar{\varphi}_3(z) \right]^2 dt.$$

Функция  $h(\alpha)$  является полиномом второго порядка (парабола с ветвями вверх), поэтому минимум достигается в единственной точке

$$\alpha^* = -\frac{T}{2} \left[ \text{sign } \bar{\varphi}_2(z) + \frac{T}{3} \text{sign } \bar{\varphi}_3(z) \right]. \quad (33)$$

Ниже нам потребуется следующее неравенство. Покажем, что

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left[ \alpha + \sum_{k=1}^2 \frac{(T-t)^k}{k!} \text{sign } \bar{\varphi}_{k+1}(z) \right] \left[ \alpha^* + \sum_{k=1}^2 \frac{(T-t)^k}{k!} \text{sign } \bar{\varphi}_{k+1}(z) \right] dt \geq \\ & \geq h(\alpha^*) = \int_0^T \left[ \alpha^* + (T-t) \text{sign } \bar{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!} \text{sign } \bar{\varphi}_3(z) \right]^2 dt \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (34)$$

Допустим противное. Предположим, что для некоторого  $\alpha_0 \in \mathbb{R}$  оказалось, что

$$\int_0^T \left[ \alpha_0 + \sum_{k=1}^2 \frac{(T-t)^k}{k!} \text{sign } \bar{\varphi}_{k+1}(z) \right] \left[ \alpha^* + \sum_{k=1}^2 \frac{(T-t)^k}{k!} \text{sign } \bar{\varphi}_{k+1}(z) \right] dt - h(\alpha^*) = -a < 0.$$

Для  $\alpha_\gamma = \alpha^* + \gamma(\alpha_0 - \alpha^*)$  имеем

$$\begin{aligned} h(\alpha_\gamma) &= \int_0^T \left[ \alpha_\gamma + (T-t) \text{sign } \bar{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!} \text{sign } \bar{\varphi}_3(z) \right]^2 dt = \\ &= \int_0^T \left[ \alpha^* + \gamma(\alpha_0 - \alpha^*) + (T-t) \text{sign } \bar{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!} \text{sign } \bar{\varphi}_3(z) \right]^2 dt = \\ &= \int_0^T \left( \left[ \alpha^* + (T-t) \text{sign } \bar{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!} \text{sign } \bar{\varphi}_3(z) \right]^2 + \right. \\ & \left. + 2\gamma(\alpha_0 - \alpha^*) \left[ \alpha^* + (T-t) \text{sign } \bar{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!} \text{sign } \bar{\varphi}_3(z) \right] + \gamma^2(\alpha_0 - \alpha^*)^2 \right) dt = \\ &= h(\alpha^*) + 2\gamma[-a] + o(\gamma). \end{aligned}$$

Так как  $a > 0$ , то при достаточно малых  $\gamma > 0$  окажется  $h(\alpha_\gamma) < h(\alpha^*)$ , что противоречит тому, что  $\alpha^*$  — точка минимума функции  $h(\alpha)$ . Итак, неравенство (34) доказано.

Возьмем  $v^*(t) = -\left[\alpha^* + (T-t)\text{sign}\bar{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!}\text{sign}\bar{\varphi}_3(z)\right]$  и для любого  $\alpha > 0$  положим  $z_\alpha(t) = z(t) + \alpha v^*(t)$ . Из (23) и (34) получим

$$\begin{aligned} \varphi'(z, v^*) &= \max_{w_1 \in [-1, 1]} \int_0^T \left[ w_1 + (T-t)\text{sign}\bar{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!}\text{sign}\bar{\varphi}_3(z) \right] v^*(t) dt \leq \\ &\leq \max_{w_1 \in \mathbb{R}} \int_0^T \left[ w_1 + (T-t)\text{sign}\bar{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!}\text{sign}\bar{\varphi}_3(z) \right] v^*(t) dt = \\ &= -\min_{w_1 \in \mathbb{R}} \int_0^T \left[ w_1 + (T-t)\text{sign}\bar{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!}\text{sign}\bar{\varphi}_3(z) \right] (-v^*(t)) dt = -h(\alpha^*) =: -H_2^*(z). \end{aligned} \quad (35)$$

Тогда

$$\varphi(z_\alpha) = \varphi(z) + \alpha\varphi'(z, v^*) + o(\alpha) \leq \varphi(z) - \alpha H_2^*(z) + o(\alpha), \quad (36)$$

где  $H_2^*(z) > 0$  для всех  $T > 0$ . Так как  $\alpha^* = -\frac{T}{2}\left[\text{sign}\bar{\varphi}_2(z) + \frac{T}{3}\text{sign}\bar{\varphi}_3(z)\right]$ , то  $v^*(t) = \left(t - \frac{T}{2}\right)\text{sign}\bar{\varphi}_2(z) - \left(\frac{T^2}{3} - Tt + \frac{t^2}{2}\right)\text{sign}\bar{\varphi}_3(z)$ .

Далее, аналогично первому случаю имеем

$$\rho_k(z_\alpha, z) = \alpha A_{2k}(z), \quad k = \overline{1, 3}. \quad (37)$$

Подставляя (35)–(37) в (31), получим

$$\varphi_i^1(z) \leq -\frac{H_2^*(z)}{A_{2i}(z)} < 0 \quad \forall i = \overline{1, 3}. \quad (38)$$

Аналогично доказываются случаи 3 и 4.

Рассмотрим случай 5. Как и в случае 2, вначале найдем  $\min_{\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}} h(\alpha_1, \alpha_2) = h(\alpha_1^*, \alpha_2^*)$ , где (см. (25))

$$h(\alpha_1, \alpha_2) = \int_0^T \left[ \alpha_1 + (T-t)\alpha_2 + \frac{(T-t)^2}{2!}\text{sign}\bar{\varphi}_3(z) \right]^2 dt.$$

Функция  $h(\alpha_1, \alpha_2)$  является положительно определенной квадратичной формой, поэтому минимум достигается в единственной точке. Действительно,

$$h(\alpha_1, \alpha_2) = T\alpha_1^2 + \frac{T^3}{3}\alpha_2^2 + T^2\alpha_1\alpha_2 + \frac{T^3}{3}\text{sign}\bar{\varphi}_3(z)\alpha_1 + \frac{T^4}{4}\text{sign}\bar{\varphi}_3(z)\alpha_2 + \frac{T^5}{20}.$$

Найдем частные производные функции  $h(\alpha_1, \alpha_2)$  по  $\alpha_1, \alpha_2$  и приравняем их к нулю. В результате получим линейную систему. Решением этой системы, которое существует и единственно, является точка минимума функции  $h(\alpha_1, \alpha_2)$ :

$$\alpha_1^* = \frac{T^2}{12}\text{sign}\bar{\varphi}_3(z), \quad \alpha_2^* = -\frac{T}{2}\text{sign}\bar{\varphi}_3(z).$$

Покажем, что

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left[ \alpha_1 + (T-t)\alpha_2 + \frac{(T-t)^2}{2!}\text{sign}\bar{\varphi}_3(z) \right] \left[ \alpha_1^* + (T-t)\alpha_2^* + \frac{(T-t)^2}{2!}\text{sign}\bar{\varphi}_3(z) \right] dt \geq \\ &\geq h(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = \int_0^T \left[ \alpha_1^* + (T-t)\alpha_2^* + \frac{(T-t)^2}{2!}\text{sign}\bar{\varphi}_3(z) \right]^2 dt \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (39)$$

Допустим противное. Предположим, что для некоторых  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 \in \mathbb{R}$  оказалось, что

$$\int_0^T \left[ \tilde{\alpha}_1 + (T-t)\tilde{\alpha}_2 + \frac{(T-t)^2}{2!} \operatorname{sign} \bar{\varphi}_3(z) \right] \left[ \alpha_1^* + (T-t)\alpha_2^* + \frac{(T-t)^2}{2!} \operatorname{sign} \bar{\varphi}_3(z) \right] dt - h(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = \int_0^T \left[ (\tilde{\alpha}_1 - \alpha_1^*) + (T-t)(\tilde{\alpha}_2 - \alpha_2^*) \right] \left[ \alpha_1^* + (T-t)\alpha_2^* + \frac{(T-t)^2}{2!} \operatorname{sign} \bar{\varphi}_3(z) \right] dt = -a < 0. \quad (40)$$

Далее, пусть  $\bar{\alpha}_1 = \alpha_1^* + \gamma(\tilde{\alpha}_1 - \alpha_1^*)$ ,  $\bar{\alpha}_2 = \alpha_2^* + \gamma(\tilde{\alpha}_2 - \alpha_2^*)$ , тогда (учитывая (40))

$$\begin{aligned} h(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) &= \int_0^T \left[ \bar{\alpha}_1 + (T-t)\bar{\alpha}_2 + \frac{(T-t)^2}{2!} \operatorname{sign} \bar{\varphi}_3(z) \right]^2 dt = \\ &= \int_0^T \left[ \alpha_1^* + (T-t)\alpha_2^* + \frac{(T-t)^2}{2!} \operatorname{sign} \bar{\varphi}_3(z) + \frac{(T-t)^2}{2!} \operatorname{sign} \bar{\varphi}_3(z) + \right. \\ &\quad \left. + \gamma \{ (\tilde{\alpha}_1 - \alpha_1^*) + (T-t)(\tilde{\alpha}_2 - \alpha_2^*) \} \right]^2 dt = h(\alpha_1^*, \alpha_2^*) + 2\gamma[-a] + o(\gamma). \end{aligned}$$

Так как  $a > 0$ , то при достаточно малых  $\gamma > 0$  окажется  $h(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) < h(\alpha_1^*, \alpha_2^*)$ , что противоречит тому, что  $\alpha^*$  — точка минимума функции  $h(\alpha_1, \alpha_2)$ . Итак, неравенство (39) доказано.

Возьмем  $v^*(t) = - \left[ \alpha_1^* + (T-t)\alpha_2^* + \frac{(T-t)^2}{2!} \operatorname{sign} \bar{\varphi}_3(z) \right]$  и для любого  $\alpha > 0$  положим  $z_\alpha(t) = z(t) + \alpha v^*(t)$ . Из (24) и (39) получим

$$\begin{aligned} \varphi'(z, v^*) &= \max_{w_1, w_2 \in [-1, 1]} \int_0^T \left[ w_1 + (T-t)w_2 + \frac{(T-t)^2}{2!} \operatorname{sign} \bar{\varphi}_3(z) \right] v^*(t) dt \leq \\ &\leq \max_{w_1, w_2 \in \mathbb{R}} \int_0^T \left[ w_1 + (T-t)w_2 + \frac{(T-t)^2}{2!} \operatorname{sign} \bar{\varphi}_3(z) \right] v^*(t) dt = \\ &= - \min_{w_1, w_2 \in \mathbb{R}} \int_0^T \left[ w_1 + (T-t)w_2 + \frac{(T-t)^2}{2!} \operatorname{sign} \bar{\varphi}_3(z) \right] (-v^*(t)) dt = \\ &= -h(\alpha_1^*, \alpha_2^*) =: -H_5^*(z). \end{aligned} \quad (41)$$

Тогда

$$\varphi(z_\alpha) = \varphi(z) + \alpha \varphi'(z, v^*) + o(\alpha) \leq \varphi(z) - \alpha H_5^*(z) + o(\alpha), \quad (42)$$

где  $H_5^*(z) > 0$  для всех  $T > 0$ . Так как  $\alpha_1^* = \frac{T^2}{12} \operatorname{sign} \bar{\varphi}_3(z)$ ,  $\alpha_2^* = -\frac{T}{2} \operatorname{sign} \bar{\varphi}_3(z)$ , то

$$v^*(t) = - \left( \frac{T^2}{12} - \frac{Tt}{2} + \frac{t^2}{2} \right) \operatorname{sign} \bar{\varphi}_3(z).$$

Далее, находим

$$\rho_k(z_\alpha, z) = \alpha A_{5k}(z), \quad k = \overline{1, 3}. \quad (43)$$

Подставляя (41)–(43) в (31), получим

$$\varphi^\perp(z) \leq - \frac{H_5^*(z)}{A_{5i}(z)} < 0 \quad \forall i = \overline{1, 3}. \quad (44)$$

Аналогично случаю 5 доказываются случаи 6 и 7.

Итак, справедливость теоремы 1 и оценки (12) вытекает из полученных выше неравенств (32), (38) и (44).

Таким образом, задача минимизации функционала  $f$  на множестве  $Z$  сведена к задаче минимизации функционала  $\Phi_\lambda(z)$  на всем пространстве  $P[0, T]$  при  $\lambda > \lambda^*$ .

**5. Классическая вариация функционала  $f(z)$ .** Для классической вариации (14), (15) имеем

$$\begin{aligned}
 f(z_\varepsilon) &= \int_0^T F(x_\varepsilon, z_{1\varepsilon}, z_{2\varepsilon}, z_\varepsilon, t) dt = \int_0^T F\left(x(t) + \varepsilon \int_0^t \int_0^\xi \int_0^\tau v(\gamma) d\gamma d\tau d\xi, \right. \\
 &\quad \left. z_1(t) + \varepsilon \int_0^t \int_0^\tau v(\gamma) d\gamma d\tau, z_2(t) + \varepsilon \int_0^t v(\gamma) d\gamma, z(t) + \varepsilon v(t), t\right) dt = \\
 &= \int_0^T F(x, z_1, z_2, z, t) dt + \varepsilon \int_0^T \left[ \frac{\partial F(t)}{\partial x} \int_0^t \int_0^\xi \int_0^\tau v(\gamma) d\gamma d\tau d\xi + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial F(t)}{\partial z_1} \int_0^t \int_0^\tau v(\gamma) d\gamma d\tau + \frac{\partial F(t)}{\partial z_2} \int_0^t v(\gamma) d\gamma + \frac{\partial F(t)}{\partial z} v(t) \right] dt + o(\varepsilon, v), \quad (45)
 \end{aligned}$$

где  $F(t) = F(x, z_1, z_2, z, t)$ ,  $\frac{o(\varepsilon, v)}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0$  равномерно по  $v$  при  $\sup_{t \in [0, T]} |v(t)| \leq 1$ .

Интегрируя по частям второе слагаемое в (45) и используя (16), имеем

$$\begin{aligned}
 f(z_\varepsilon) &= f(z) + \varepsilon \int_0^T \left[ \int_t^T \frac{(\gamma - t)^2}{2!} \frac{\partial F(\gamma)}{\partial x} d\gamma + \right. \\
 &\quad \left. + \int_t^T (\gamma - t) \frac{\partial F(\gamma)}{\partial z_1} d\gamma + \int_t^T \frac{\partial F(\gamma)}{\partial z_2} d\gamma + \frac{\partial F(t)}{\partial z} \right] v(t) dt + o(\varepsilon, v). \quad (46)
 \end{aligned}$$

Из (46) следует, что функционал  $f$  дифференцируем по Гато в точке  $z$ , а функция

$$Q(t, z) = \int_t^T \frac{(\gamma - t)^2}{2!} \frac{\partial F(\gamma)}{\partial x} d\gamma + \int_t^T (\gamma - t) \frac{\partial F(\gamma)}{\partial z_1} d\gamma + \int_t^T \frac{\partial F(\gamma)}{\partial z_2} d\gamma + \frac{\partial F(t)}{\partial z} \quad (47)$$

является “градиентом” Гато функционала  $f$  в точке  $z$ .

**6. Необходимые условия минимума.** Пусть  $z_* \in Z$  — точка локального минимума функционала  $f$  на множестве  $Z$ . В разделе 3 было установлено, что найдется такое  $\lambda^* < \infty$ , что при  $\lambda > \lambda^*$  точка  $z_*$  является точкой локального минимума функционала  $\Phi_\lambda(z) = f(z) + \lambda\varphi(z)$  на всем пространстве  $P[0, T]$ . Зафиксируем произвольное  $\lambda > \lambda^*$ . Пусть  $\varepsilon > 0$ , выберем  $v \in P[0, T]$  и положим

$$z_\varepsilon(t) = z_*(t) + \varepsilon v(t). \quad (48)$$

Поскольку  $\varphi(z_*) = 0$ , то для вариации (48) из (46) и (20) имеем

$$\Phi_\lambda(z_\varepsilon) = \Phi_\lambda(z_*) + \varepsilon \left[ \int_0^T Q(t, z_*) v(t) dt + \lambda \left\{ \left| \int_0^T v(t) dt \right| + \left| \int_0^T (T - t)v(t) dt \right| + \left| \int_0^T \frac{(T - t)^2}{2!} v(t) dt \right| \right\} \right], \quad (49)$$

где  $Q(t, z_*)$  — выражение (47) при  $z = z_*$ . Соотношение (49) можно переписать в виде

$$\Phi_\lambda(z_\varepsilon) = \Phi_\lambda(z_*) + \varepsilon \max_{\substack{w_k \in [-1, 1] \\ k=1, 3}} \int_0^T \left\{ Q(t, z_*) + \lambda \left[ w_1 + (T - t)w_2 + \frac{(T - t)^2}{2!} w_3 \right] \right\} v(t) dt. \quad (50)$$

Так как  $\rho_i(z_\varepsilon, z_*) \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0$  для всех  $i = \overline{1, 3}$ , то

$$\Phi_\lambda^\downarrow(z_*) = \liminf_{\rho_i(z, z_*) \rightarrow 0} \frac{\Phi_\lambda(z) - \Phi_\lambda(z_*)}{\rho_i(z, z_*)} \leq \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Phi_\lambda(z_\varepsilon) - \Phi_\lambda(z_*)}{\rho_i(z_\varepsilon, z_*)} = \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Phi_\lambda(z_* + \varepsilon v) - \Phi_\lambda(z_*)}{\varepsilon \|v\|_i},$$

где  $\|v\|_i = \rho_i(v, \mathbb{O})$ .

**Теорема 2** [13]. Для того чтобы  $z_* \in Z$  была точкой глобального или локального минимума функции  $f$  на множестве  $Z$  в метрике  $\rho_i$ , необходимо, чтобы

$$\Phi_\lambda^\downarrow(z_*) = \liminf_{\rho_i(z, z_*) \rightarrow 0} \frac{\Phi_\lambda(z) - \Phi_\lambda(z_*)}{\rho_i(z, z_*)} \geq 0.$$

Учитывая произвольность  $v \in P[0, T]$ , из (50) и теоремы 2, имеем

$$\max_{\substack{w_k \in [-1, 1] \\ k=\overline{1,3}}} \int_0^T \left\{ Q(t, z_*) + \lambda \left[ w_1 + (T-t)w_2 + \frac{(T-t)^2}{2!} w_3 \right] \right\} v(t) dt \geq 0 \quad \forall v \in P[0, T]. \quad (51)$$

Это условие является необходимым в любой из метрик  $\rho_i$  для всех  $i = \overline{1,3}$ .

**Теорема 3.** Соотношение (51) эквивалентно следующему условию: существуют  $w_k^* \in [-1, 1]$ ,  $k = \overline{1,3}$ , такие, что

$$Q(t, z_*) + \lambda \left[ w_1^* + (T-t)w_2^* + \frac{(T-t)^2}{2!} w_3^* \right] = 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (52)$$

**Доказательство.** Вначале покажем, что из (51) следует (52). Пусть выполнено (51). Найдем

$$\min_{\substack{w_k \in [-1, 1] \\ k=\overline{1,3}}} \int_0^T [Q(t, z_*) + \lambda g(t)]^2 dt = \min_{\substack{w_k \in [-1, 1] \\ k=\overline{1,3}}} h(w) = h(w^*),$$

где  $g(t) = w_1 + (T-t)w_2 + \frac{(T-t)^2}{2!} w_3$ ,  $w = (w_1, w_2, w_3)$ . Итак,

$$h(w) = \int_0^T [Q(t, z_*) + \lambda g(t)]^2 dt = \int_0^T [Q^2(t, z_*) + 2\lambda Q(t, z_*)g(t) + \lambda^2 g^2(t)] dt.$$

Необходимое условие минимума функции  $h$  в точке  $w^* = (w_1^*, w_2^*, w_3^*) \in [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$  имеет вид

$$(\text{grad } h(w^*), w - w^*) \geq 0 \quad \forall w_k \in [-1, 1], k = \overline{1,3},$$

т.е.

$$2\lambda \left( \int_0^T [Q(t, z_*) + \lambda g^*(t)] \text{grad } g^*(t) dt, w - w^* \right) \geq 0 \quad \forall w_k \in [-1, 1], k = \overline{1,3}; \quad (53)$$

здесь

$$g^*(t) = w_1^* + (T-t)w_2^* + \frac{(T-t)^2}{2!} w_3^*, \quad \text{grad } g^*(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ T-t \\ \frac{(T-t)^2}{2!} \end{pmatrix}, \quad w - w^* = \begin{pmatrix} w_1 - w_1^* \\ w_2 - w_2^* \\ w_3 - w_3^* \end{pmatrix}.$$

Так как  $(\text{grad } g^*(t), w - w^*) = g(t) - g^*(t)$ , то (53) примет вид

$$2\lambda \int_0^T [Q(t, z_*) + \lambda g^*(t)] [g(t) - g^*(t)] dt \geq 0 \quad \forall w_k \in [-1, 1], k = \overline{1,3}. \quad (54)$$

Пусть найдется хотя бы одно  $t \in [0, T]$ , при котором  $Q(t, z_*) + \lambda g^*(t) \neq 0$ ; тогда

$$\int_0^T [Q(t, z_*) + \lambda g^*(t)]^2 dt = a > 0. \quad (55)$$

Возьмем  $v^*(t) = -Q(t, z_*) - \lambda g^*(t)$ . Для любых  $w_k \in [-1, 1]$ ,  $k = \overline{1,3}$ , т.е. для произвольного полинома

$$g(t) = w_1 + (T-t)w_2 + \frac{(T-t)^2}{2!} w_3,$$

у которого  $\deg g(t) \leq 2$ , имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T [Q(t, z_*) + \lambda g(t)] v^*(t) dt &= \int_0^T [Q(t, z_*) + \lambda g(t)] [-Q(t, z_*) - \lambda g^*(t)] dt = \\ &= \int_0^T [Q(t, z_*) + \lambda g^*(t) + \lambda(g(t) - g^*(t))] [-Q(t, z_*) - \lambda g^*(t)] dt = \\ &= - \int_0^T [Q(t, z_*) + \lambda g^*(t)]^2 dt - \lambda \int_0^T [Q(t, z_*) + \lambda g^*(t)] (g(t) - g^*(t)) dt. \end{aligned}$$

Отсюда и из (54), (55) следует

$$\int_0^T [Q(t, z_*) + \lambda g(t)] v^*(t) dt \leq -a < 0 \quad \forall w_k \in [-1, 1], k = \overline{1, 3},$$

что противоречит (51).

Осталось показать, что из (52) вытекает (51). Пусть имеет место (52), т.е. для некоторых  $w_k^* \in [-1, 1]$ ,  $k = \overline{1, 3}$ , выполнено

$$Q(t, z_*) + \lambda g^*(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Тогда

$$\max_{\substack{w_k \in [-1, 1] \\ k = \overline{1, 3}}} \int_0^T \{Q(t, z_*) + \lambda g(t)\} v(t) dt \geq \int_0^T \{Q(t, z_*) + \lambda g^*(t)\} v(t) dt = 0 \quad \forall v \in P[0, T],$$

т.е. неравенство (51) выполнено.

**Следствие 1** [13]. Для того чтобы функция  $x_*(t) \in \Omega$  доставляла наименьшее значение функционалу  $I(x)$  на множестве  $\Omega$  (см. (3)), необходимо, чтобы существовал полином  $g(t)$ ,  $\deg g(t) \leq 2$ , такой, что

$$\int_t^T \frac{(\gamma - t)^2}{2!} \frac{\partial F^*(\gamma)}{\partial x} d\gamma + \int_t^T (\gamma - t) \frac{\partial F^*(\gamma)}{\partial x'} d\gamma + \int_t^T \frac{\partial F^*(\gamma)}{\partial x''} d\gamma + \frac{\partial F^*(t)}{\partial x'''} = -g(t) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (56)$$

Здесь  $F^*(t) = F(x_*, x'_*, x''_*, x'''_*, t)$ . Условие (56) является интегральным уравнением Эйлера для задачи (2), (3). Дифференцируя трижды выражение (56), получим условие

$$\frac{\partial F^*(t)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F^*(t)}{\partial x'} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial F^*(t)}{\partial x''} - \frac{d^3}{dt^3} \frac{\partial F^*(t)}{\partial x'''} = 0 \quad \forall t \in D(x'''_*), \quad (57)$$

где  $D(x'''_*)$  — множество точек непрерывности функции  $x'''_*(t)$ . Дифференциальное уравнение 6-го порядка (57) является уравнением Эйлера–Пуассона.

Так как задача минимизации функционала  $I(x)$  на множестве

$$\Omega_0 = \{x \in P^3[0, T] \mid x(0) = x_{10}, x'(0) = x_{11}, x''(0) = x_{12}\}$$

эквивалентна задаче минимизации функционала  $f(z)$  на всем пространстве  $P[0, T]$ , то из (46) имеем следующее необходимое условие минимума.

**Следствие 2** [13]. Для того чтобы функция  $x_* \in \Omega_0$  доставляла наименьшее значение функционалу  $I(x)$  на множестве  $\Omega_0$ , необходимо, чтобы

$$\int_t^T \frac{(\gamma - t)^2}{2!} \frac{\partial F^*(\gamma)}{\partial x} d\gamma + \int_t^T (\gamma - t) \frac{\partial F^*(\gamma)}{\partial x'} d\gamma + \int_t^T \frac{\partial F^*(\gamma)}{\partial x''} d\gamma + \frac{\partial F^*(t)}{\partial x'''} = 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (58)$$

Сравнивая (58) с интегральным условием Эйлера (56), видим, что отличие только в том, что полином  $g(t)$  (в случае отсутствия ограничений на правом конце) равен нулю.

**7. Направление наискорейшего спуска.** Используя классическую вариацию (14), получим

$$\Phi_\lambda(z_\varepsilon) = \Phi_\lambda(z) + \varepsilon H_\lambda(z, v) + o(\varepsilon), \quad (59)$$

где функцию  $H_\lambda(z, v)$  можно представить в виде

$$H_\lambda(z, v) = \max_{u \in \partial \Phi_\lambda(z)} \int_0^T u(t)v(t) dt, \quad (60)$$

где

$$Q(t, z) = \int_t^T \frac{(\gamma - t)^2}{2!} \frac{\partial F(\gamma)}{\partial x} d\gamma + \int_t^T (\gamma - t) \frac{\partial F(\gamma)}{\partial z_1} d\gamma + \int_t^T \frac{\partial F(\gamma)}{\partial z_2} d\gamma + \frac{\partial F(t)}{\partial z}, \quad (61)$$

$$\partial \Phi_\lambda(z) = Q(t, z) + \lambda [p(t) + \text{co}\{g(t), -g(t)\}],$$

$$p(t) = \sum_{k=1}^3 g_k(t) \text{sign } \bar{\varphi}_k(z), \quad g_k(t) = \frac{(T-t)^{k-1}}{(k-1)!}, \quad k = \overline{1, 3}, \quad I_0 = \{k \in \overline{1, 3} \mid \bar{\varphi}_k(z) = 0\},$$

$$g(t) = \left\{ \sum_{k=1}^3 g_k(t) w_k \mid w_k = 1, \text{ если } \bar{\varphi}_k(z) = 0; w_k = 0, \text{ если } \bar{\varphi}_k(z) \neq 0 \right\} = \sum_{k \in I_0} g_k(t) w_k.$$

Каждый элемент  $u \in \partial \Phi_\lambda(z)$  можно описать следующим образом:

$$u(t) = Q(t, z) + \lambda \left[ p(t) + \sum_{k \in I_0} g_k(t) \gamma_k \right], \quad \gamma_k \in \begin{cases} \text{co}\{-1, 1\}, & \text{если } \bar{\varphi}_k(z) = 0; \\ 0, & \text{если } \bar{\varphi}_k(z) \neq 0. \end{cases}$$

Найдем минимальный по норме субградиент  $u \in \partial \Phi_\lambda(z)$ , т.е. решим задачу

$$\min_{u \in \partial \Phi_\lambda(z)} \|u\|^2 = \min_{\gamma_k \in [-1, 1]} \int_0^T \left( Q(t, z) + \lambda \left[ p(t) + \sum_{k \in I_0} g_k(t) \gamma_k \right] \right)^2 dt = \|u^*\|^2. \quad (62)$$

Однако прежде вычислим

$$\begin{aligned} & \min_{\gamma_k \in \mathbb{R}} \int_0^T \left( Q(t, z) + \lambda \left[ p(t) + \sum_{k \in I_0} g_k(t) \gamma_k \right] \right)^2 dt = \\ & = \min_{\gamma_k \in \mathbb{R}} \int_0^T \left( \lambda^2 \sum_{k \in I_0} \sum_{j \in I_0} g_k(t) g_j(t) \gamma_k \gamma_j + 2\lambda [Q(t, z) + \lambda p(t)] \sum_{k \in I_0} g_k(t) \gamma_k + [Q(t, z) + \lambda p(t)]^2 \right) dt = \\ & = \min_{\gamma_k \in \mathbb{R}} \lambda^2 \gamma^T W \gamma + 2\lambda V \gamma + \int_0^T [Q(t, z) + \lambda p(t)]^2 dt, \quad (63) \end{aligned}$$

где  $W$  — матрица Грама, составленная из функций  $g_k(t)$ ,  $k \in I_0$ ;  $V$  — вектор столбец;  $\gamma$  — вектор столбец, составленный из  $\gamma_k$ ,  $k \in I_0$ , т.е.  $W = \left\{ \int_0^T g_k(t) g_j(t) dt \right\}$ ,  $k, j \in I_0$ ,  $V = \left\{ \int_0^T [Q(t, z) + \lambda p(t)] g_k(t) dt \right\}$ ,  $k \in I_0$ .

Определитель матрицы  $W$  отличен от нуля и положителен [24], так как матрица Грама  $W$  составлена из линейно независимых функций  $g_k(t)$ ,  $k \in I_0$ . Поэтому (63) имеет единственное решение (стационарную точку)

$$\tilde{\gamma} = -\frac{1}{\lambda} W^{-1} V.$$

Отсюда и из (62) заключаем, что

$$\gamma_k^* = \begin{cases} -1, & \text{если } \tilde{\gamma}_k < -1, \\ \tilde{\gamma}_k, & \text{если } \tilde{\gamma}_k \in [-1, 1], \\ 1, & \text{если } \tilde{\gamma}_k > 1, \end{cases} \quad k \in I_0,$$

и тогда функция  $G_\lambda(t, z) = u^* = Q(t, z) + \lambda \left[ p(t) + \sum_{k \in I_0} g_k(t) \gamma_k^* \right]$  является наименьшим (в метрике  $L_2$ ) суб-градиентом функционала  $\Phi_\lambda$  в точке  $z$ .

Если  $\|G_\lambda\| > 0$ , то функция  $u_\lambda(t, z) = -\frac{G_\lambda(t, z)}{\|G_\lambda\|}$ , где  $\|u\|^2 = \int_0^T u^2(t) dt$ , является направлением наискорейшего спуска функционала  $\Phi_\lambda$  в точке  $z$  в метрике  $L_2$ .

В случае, когда множество индексов  $I_0 = \emptyset$ , то субдифференциал функционала  $\Phi_\lambda$  в точке  $z$  содержит только одну точку и является дифференцируемым по Гато в точке  $z$ , причем его градиент имеет вид

$$G_\lambda(t, z) = Q(t, z) + \lambda p(t) = Q(t, z) + \lambda \sum_{k=1}^3 \frac{(T-t)^{k-1}}{(k-1)!} \text{sign } \bar{\varphi}_k(z).$$

Функция  $u_\lambda(t, z) = -\frac{G_\lambda(t, z)}{\|G_\lambda\|}$  является направлением наискорейшего спуска функционала  $\Phi_\lambda$  в точке  $z$ .

Наконец, рассмотрим случай  $\varphi(z) = 0$ , т.е. множество индексов  $I_0 = \overline{1, 3}$ . Функционал  $\Phi_\lambda$  субдифференцируем в точке  $z$ , причем

$$\partial\Phi_\lambda(z) = Q(t, z) + \lambda \text{co}\{g(t), -g(t)\}, \quad g(t) = \sum_{k=1}^3 \frac{(T-t)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Любой элемент  $u \in \partial\Phi_\lambda(z)$  можно представить в следующем виде:

$$u(t) = Q(t, z) + \lambda \sum_{k=1}^3 g_k(t) \gamma_k, \quad \gamma_k \in \text{co}\{-1, 1\}.$$

Найдем минимальный по норме субградиент  $u \in \partial\Phi_\lambda(z)$ :

$$\min_{u \in \partial\Phi_\lambda(z)} \|u\|^2 = \min_{\gamma_k \in [-1, 1]} \int_0^T \left( Q(t, z) + \lambda \sum_{k=1}^3 g_k(t) \gamma_k \right)^2 dt = \|u^*\|^2,$$

но сперва вычислим

$$\begin{aligned} \min_{\gamma_k \in \mathbb{R}} \int_0^T \left( Q(t, z) + \lambda \sum_{k=1}^3 g_k(t) \gamma_k \right)^2 dt &= \\ &= \min_{\gamma_k \in \mathbb{R}} \int_0^T \left( \lambda^2 \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_k(t) g_j(t) \gamma_k \gamma_j + 2\lambda Q(t, z) \sum_{k=1}^3 g_k(t) \gamma_k + Q^2(t, z) \right) dt = \\ &= \min_{\gamma_k \in \mathbb{R}} \lambda^2 \gamma^T W \gamma + 2\lambda V \gamma + \int_0^T Q^2(t, z) dt, \quad (64) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} W &= \begin{pmatrix} \int_0^T g_1^2(t) dt & \int_0^T g_1(t)g_2(t) dt & \int_0^T g_1(t)g_3(t) dt \\ \int_0^T g_2(t)g_1(t) dt & \int_0^T g_2^2(t) dt & \int_0^T g_2(t)g_3(t) dt \\ \int_0^T g_3(t)g_1(t) dt & \int_0^T g_3(t)g_2(t) dt & \int_0^T g_3^2(t) dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & \frac{T^2}{2!} & \frac{T^3}{3!} \\ \frac{T^2}{2!} & \frac{T^3}{3} & \frac{T^4}{8} \\ \frac{T^3}{3!} & \frac{T^4}{8} & \frac{T^5}{20} \end{pmatrix}, \\ V &= \begin{pmatrix} \int_0^T Q(t, z)g_1(t) dt \\ \int_0^T Q(t, z)g_2(t) dt \\ \int_0^T Q(t, z)g_3(t) dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^T Q(t, z) dt \\ \int_0^T Q(t, z)(T-t) dt \\ \int_0^T Q(t, z)\frac{(T-t)^2}{2!} dt \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Так как матрица  $W$  положительно определенная, то (64) имеет единственное решение

$$\gamma^* = -\frac{1}{\lambda} W^{-1}V. \quad (65)$$

При достаточно больших  $\lambda$  имеем  $|\gamma_k^*| \leq 1$  для всех  $k = \overline{1, 3}$ . Следовательно, при таких  $\lambda$  выполнено соотношение

$$G(t, z) = u^*(t) = Q(t, z) + \lambda \sum_{k=1}^3 g_k(t) \gamma_k^*. \quad (66)$$

Подставляя в (66) значение  $\gamma^*$  из (65), получаем, что  $G(t, z)$  не зависит от  $\lambda$ . Если  $\|G(t, z)\| > 0$ , то  $u(t, z) = -\frac{G(t, z)}{\|G\|}$  является направлением наискорейшего спуска функционала  $\Phi_\lambda$  в точке  $z$ .

**8. Метод наискорейшего спуска.** Пусть  $z_* \in Z$  — точка минимума функционала  $\Phi_\lambda(z)$  на  $P[0, T]$ , тогда  $\varphi(z_*) = 0$ . Как следует из теоремы 3, необходимое условие (51) эквивалентно существованию  $w_k^* \in [-1, 1]$ ,  $k = \overline{1, 3}$ , для которых

$$Q(t, z_*) + \lambda \left[ w_1^* + (T-t)w_2^* + \frac{(T-t)^2}{2!} w_3^* \right] = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Это условие, в свою очередь, эквивалентно тому, что

$$0 \in \partial\Phi_\lambda(z_*). \quad (67)$$

Точка  $z_*$ , в которой выполнено условие (67), называется стационарной.

Итак, если точка  $z \in P[0, T]$  не является стационарной точкой функционала  $\Phi_\lambda$ , то можно найти направление наискорейшего спуска функционала  $\Phi_\lambda$  в точке  $z$ . Таким образом, возникает естественная идея описать следующий метод наискорейшего спуска для нахождения стационарных точек, т.е. точек, удовлетворяющих условию (67).

Выберем произвольное  $z^0 \in P[0, T]$ . Пусть уже найдено  $z^k \in P[0, T]$ . Если  $\varphi(z^k) = 0$  и выполнено условие (67), то точка  $z^k$  является стационарной и процесс прекращается.

Если же  $\varphi(z^k) \neq 0$  или  $\varphi(z^k) = 0$ , но условие (67) не выполнено, то возьмем функцию  $G_{k\lambda}(t) = G_\lambda(t, z^k)$  — наименьший по норме субградиент функционала  $\Phi_\lambda$  в точке  $z^k$ .

Далее решается задача одномерной минимизации

$$\min_{\beta \geq 0} \Phi_\lambda(z^k - \beta G_{k\lambda}) = \Phi_\lambda(z^k - \beta_k G_{k\lambda}).$$

Теперь положим  $z^{k+1} = z^k - \beta_k G_{k\lambda}$ . Имеем  $\Phi_\lambda(z^{k+1}) < \Phi_\lambda(z^k)$ .

К сожалению, описанный процесс может и не привести к стационарной точке, поскольку субдифференциальное отображение  $\partial\Phi_\lambda(z)$  не является непрерывным будучи функцией от  $z$  в метрике Хаусдорфа [1, 6].

Однако в данном случае метод наискорейшего спуска можно скорректировать таким образом, чтобы обеспечить сходимость. Для этого заметим, что если  $z \in Z$ , т.е.  $\varphi(z) = 0$ , то при достаточно больших  $\lambda$  наименьший по норме субградиент функционала  $\Phi_\lambda$  в точке  $z$  имеет вид (см. (65), (66))

$$G(t, z) = Q(t, z) + \sum_{k=1}^3 g_k(t) \tilde{\gamma}_k^*, \quad (68)$$

где

$$Q(t, z) = \int_t^T \frac{(\gamma-t)^2}{2!} \frac{\partial F(\gamma)}{\partial x} d\gamma + \int_t^T (\gamma-t) \frac{\partial F(\gamma)}{\partial z_1} d\gamma + \int_t^T \frac{\partial F(\gamma)}{\partial z_2} d\gamma + \frac{\partial F(t)}{\partial z},$$

$$\tilde{\gamma}_k^* = \lambda \gamma_k^* = -W^{-1}V, \quad g_k(t) = \frac{(T-t)^{k-1}}{(k-1)!} \quad \forall k = \overline{1, 3}.$$

Покажем, что если  $z \in Z$  и  $\tilde{z}(t) = z(t) - \alpha G(t, z)$ , то  $\tilde{z} \in Z$ . Действительно (см. (11), (17)–(19)),

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tilde{z}) &= \left| \overline{\varphi}_1(z) + \alpha \int_0^T G(t, z) dt \right| = \alpha \left| \int_0^T G(t, z) dt \right| = \alpha \left| \int_0^T \left( Q(t, z) + \sum_{k=1}^3 g_k(t) \tilde{\gamma}_k^* \right) dt \right| = \\ &= \alpha \left| \int_0^T Q(t, z) g_1(t) dt + \sum_{k=1}^3 \tilde{\gamma}_k^* \int_0^T g_k(t) dt \right| = \alpha \left| \int_0^T Q(t, z) dt + T \tilde{\gamma}_1^* + \frac{T^2}{2!} \tilde{\gamma}_2^* + \frac{T^3}{3!} \tilde{\gamma}_3^* \right|, \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(\tilde{z}) &= \left| \overline{\varphi}_2(z) + \alpha \int_0^T (T-t) G(t, z) dt \right| = \alpha \left| \int_0^T (T-t) G(t, z) dt \right| = \\ &= \alpha \left| \int_0^T (T-t) \left[ Q(t, z) + \sum_{k=1}^3 g_k(t) \tilde{\gamma}_k^* \right] dt \right| = \alpha \left| \int_0^T Q(t, z) g_2(t) dt + \sum_{k=1}^3 \tilde{\gamma}_k^* \int_0^T g_2(t) g_k(t) dt \right| = \\ &= \alpha \left| \int_0^T (T-t) Q(t, z) dt + \frac{T^2}{2!} \tilde{\gamma}_1^* + \frac{T^3}{3} \tilde{\gamma}_2^* + \frac{T^4}{8} \tilde{\gamma}_3^* \right|, \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(\tilde{z}) &= \left| \overline{\varphi}_3(z) + \alpha \int_0^T \frac{(T-t)^2}{2!} G(t, z) dt \right| = \alpha \left| \int_0^T \frac{(T-t)^2}{2!} G(t, z) dt \right| = \\ &= \alpha \left| \int_0^T \frac{(T-t)^2}{2!} \left[ Q(t, z) + \sum_{k=1}^3 g_k(t) \tilde{\gamma}_k^* \right] dt \right| = \alpha \left| \int_0^T Q(t, z) g_3(t) dt + \sum_{k=1}^3 \tilde{\gamma}_k^* \int_0^T g_3(t) g_k(t) dt \right| = \\ &= \alpha \left| \int_0^T \frac{(T-t)^2}{2!} Q(t, z) dt + \frac{T^3}{3!} \tilde{\gamma}_1^* + \frac{T^4}{8} \tilde{\gamma}_2^* + \frac{T^5}{20} \tilde{\gamma}_3^* \right|. \end{aligned} \quad (71)$$

Несложно проверить, что (69)–(71) можно записать в матричной форме таким образом:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(\tilde{z}) \\ \varphi_2(\tilde{z}) \\ \varphi_3(\tilde{z}) \end{pmatrix} = \alpha |W \tilde{\gamma}^* + V|.$$

Здесь модуль берется от каждого элемента вектора и выражение под модулем является с точностью до постоянного множителя градиентом минимизируемой функции в (64). Тогда из (65) следует, что  $\varphi_1(\tilde{z}) = \varphi_2(\tilde{z}) = \varphi_3(\tilde{z}) = 0$ . Итак, мы показали, что  $\varphi(\tilde{z}) = 0$ , т.е.  $\tilde{z} \in Z$ . Из этого наблюдения вытекает следующая модификация метода наискорейшего спуска.

Выберем произвольное  $z^0 \in P[0, T]$  так, чтобы  $\varphi(z^0) = 0$ , к примеру,  $z^0(t) = x'''(t)$ , где  $x(t)$  — интерполяционный полином Эрмита [16], удовлетворяющий (1). Пусть уже найдено  $z^k \in Z$ . Если при этом выполнено условие (67), то точка  $z^k$  является стационарной и процесс прекращается.

Если же условие (67) не выполнено, то возьмем функцию  $G_{k\lambda}(t) = G_\lambda(t, z^k)$  — наименьший по норме субградиент функционала  $\Phi_\lambda$  в точке  $z^k$ . При достаточно больших  $\lambda$  он равен выражению в (68).

Как отмечалось выше, при всех  $\alpha$  имеем  $\varphi(z^k - \alpha G_{k\lambda}) = 0$ , т.е.  $z^k - \alpha G_{k\lambda} \in Z$ . Найдем

$$\min_{\beta \geq 0} \Phi_\lambda(z^k - \beta G_{k\lambda}) = \min_{\beta \geq 0} f(z^k - \beta G_{k\lambda}) = f(z^k - \beta_k G_{k\lambda}).$$

Теперь положим  $z^{k+1} = z^k - \beta_k G_{k\lambda}$ . Имеем  $z^{k+1} \in Z$ ,  $f(z^{k+1}) < f(z^k)$ .

Далее продолжается аналогично. В результате построим последовательность точек  $\{z^k\} \subset Z$ . Если эта последовательность конечна (состоит из конечного числа точек), то по построению последняя полученная точка является стационарной. Если же последовательность  $\{z^k\}$  содержит бесконечное количество точек,

то учитывая, что функция  $G(t, z)$  (см. (68)) непрерывна как функция  $z$ , можно показать, что описанный метод сходится в следующем смысле:  $\|G(t, z^k)\| \rightarrow 0$ . Здесь  $\|G\| = \int_0^T G^2 dt$ ; следовательно,  $G(t, z^k) \rightarrow 0$  в метрике  $L_2$ . Вопрос о существовании предельных точек последовательности  $\{z^k\}$  остается открытым.

**9. Метод гиподифференциального спуска.** Вместо разложения (59) для вариации (14) из (20) и (46) можно получить другое представление. Имеем

$$\Phi_\lambda(z_\varepsilon) = \Phi_\lambda(z) + H_\lambda(\varepsilon, z, v) + o(\varepsilon),$$

где

$$\begin{aligned} H_\lambda(\varepsilon, z, v) = & \varepsilon \int_0^T Q(t, z)v(t) dt + \\ & + \lambda \left[ \max \left\{ \overline{\varphi}_1(z) - |\overline{\varphi}_1(z)| + \varepsilon \int_0^T g_1(t)v(t) dt, -\overline{\varphi}_1(z) - |\overline{\varphi}_1(z)| - \varepsilon \int_0^T g_1(t)v(t) dt \right\} + \right. \\ & + \max \left\{ \overline{\varphi}_2(z) - |\overline{\varphi}_2(z)| + \varepsilon \int_0^T g_2(t)v(t) dt, -\overline{\varphi}_2(z) - |\overline{\varphi}_2(z)| - \varepsilon \int_0^T g_2(t)v(t) dt \right\} + \\ & \left. + \max \left\{ \overline{\varphi}_3(z) - |\overline{\varphi}_3(z)| + \varepsilon \int_0^T g_3(t)v(t) dt, -\overline{\varphi}_3(z) - |\overline{\varphi}_3(z)| - \varepsilon \int_0^T g_3(t)v(t) dt \right\} \right]. \quad (72) \end{aligned}$$

Функции  $Q(t, z)$ ,  $\overline{\varphi}_k(z)$  и  $g_k(t)$  при  $k = \overline{1, 3}$  заданы соответственно соотношениями (61), (13) и (60).

Из (72) следует, что функционал  $\Phi_\lambda(z)$  гиподифференцируем в точке  $z$  и его гиподифференциал имеет вид

$$\begin{aligned} d\Phi_\lambda(z) = & [0, Q(t, z)] + \lambda \{ \text{co}\{[\overline{\varphi}_1(z) - |\overline{\varphi}_1(z)|, g_1(t)], [-\overline{\varphi}_1(z) - |\overline{\varphi}_1(z)|, -g_1(t)]\} + \\ & + \text{co}\{[\overline{\varphi}_2(z) - |\overline{\varphi}_2(z)|, g_2(t)], [-\overline{\varphi}_2(z) - |\overline{\varphi}_2(z)|, -g_2(t)]\} + \\ & + \text{co}\{[\overline{\varphi}_3(z) - |\overline{\varphi}_3(z)|, g_3(t)], [-\overline{\varphi}_3(z) - |\overline{\varphi}_3(z)|, -g_3(t)]\}. \end{aligned}$$

Отметим, что отображение  $d\Phi_\lambda(z)$  является непрерывным в метрике Хаусдорфа [1, 6]. Нетрудно также показать, что необходимое условие минимума функции  $\Phi_\lambda(z)$  (см. (67)) эквивалентно условию

$$[0, 0_{P[0, T]}] \in d\Phi_\lambda(z). \quad (73)$$

Найдем гипогradient функционала  $\Phi_\lambda(z)$ :

$$\min_{u \in d\Phi_\lambda(z)} \|u\|^2 = \min_{\substack{\beta_k \in [0, 1] \\ k=\overline{1, 3}}} \|u(\beta_1, \beta_2, \beta_3)\|^2 = u(\beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^*), \quad (74)$$

где

$$\begin{aligned} u(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = & [0, Q(t, z)] + \lambda(\beta_1[\overline{\varphi}_1(z) - |\overline{\varphi}_1(z)|, g_1(t)] + (1 - \beta_1)[-\overline{\varphi}_1(z) - |\overline{\varphi}_1(z)|, -g_1(t)] + \\ & + \beta_2[\overline{\varphi}_2(z) - |\overline{\varphi}_2(z)|, g_2(t)] + (1 - \beta_2)[-\overline{\varphi}_2(z) - |\overline{\varphi}_2(z)|, -g_2(t)] + \\ & + \beta_3[\overline{\varphi}_3(z) - |\overline{\varphi}_3(z)|, g_3(t)] + (1 - \beta_3)[-\overline{\varphi}_3(z) - |\overline{\varphi}_3(z)|, -g_3(t)]) = \\ = & [(2\beta_1 - 1)\lambda\overline{\varphi}_1(z) + (2\beta_2 - 1)\lambda\overline{\varphi}_2(z) + (2\beta_3 - 1)\lambda\overline{\varphi}_3(z) - \lambda\varphi(z), \\ & Q(t, z) + (2\beta_1 - 1)\lambda g_1(t) + (2\beta_2 - 1)\lambda g_2(t) + (2\beta_3 - 1)\lambda g_3(t)]. \end{aligned}$$

Положим  $\mu_k = (2\beta_k - 1)\lambda$ ,  $k = \overline{1, 3}$ . Тогда в этих обозначениях  $|\mu_k| \leq \lambda$ ,  $k = \overline{1, 3}$  и

$$u_1(\mu_1, \mu_2, \mu_3) := u(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \left[ \sum_{k=1}^3 \mu_k \overline{\varphi}_k(z) - \lambda\varphi(z), Q(t, z) + \sum_{k=1}^3 \mu_k g_k(t) \right].$$

Задача (74) эквивалентна задаче

$$\min_{u \in d\Phi_\lambda(z)} \|u\|^2 = \min_{\substack{\mu_k \in [-\lambda, \lambda] \\ k=\overline{1, 3}}} \|u_1(\mu_1, \mu_2, \mu_3)\|^2.$$

Сперва найдем

$$\min_{\substack{\mu_k \in \mathbb{R} \\ k=1,3}} \|u_1(\mu_1, \mu_2, \mu_3)\|^2,$$

здесь  $u_1 = [q_1, q_2]$ ,  $q_1 \in \mathbb{R}$ ,  $q_2 \in P[0, T]$ ,  $\|u_1\|^2 = q_1^2 + \int_0^T q_2^2(t) dt$ .

Положим

$$h(\mu_1, \mu_2, \mu_3) := \|u_1(\mu_1, \mu_2, \mu_3)\|^2 = \left( \sum_{k=1}^3 \mu_k \bar{\varphi}_k(z) - \lambda \varphi(z) \right)^2 + \int_0^T \left( Q(t, z) + \sum_{k=1}^3 \mu_k g_k(t) \right)^2 dt.$$

Приравняем к нулю производные функции  $h(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  по  $\mu_1, \mu_2$  и  $\mu_3$ . Получим систему

$$A\mu = \eta, \tag{75}$$

где

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}, \quad \psi(z) = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1(z) \\ \bar{\varphi}_2(z) \\ \bar{\varphi}_3(z) \end{pmatrix}, \quad \bar{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \end{pmatrix}, \quad \varphi(z) = \sum_{k=1}^3 |\bar{\varphi}_k(z)|,$$

$$A = \int_0^T \bar{g}(t) \bar{g}^T(t) dt + \psi(z) \psi^T(z), \quad \eta = \lambda \varphi(z) \psi(z) - \int_0^T Q(t, z) \bar{g}(t) dt.$$

Видим, что матрица  $A$  не зависит от  $\lambda$  и симметричная, так как является суммой двух симметричных матриц, одна из которых матрица Грама. Поэтому при достаточно малых абсолютных значениях  $\bar{\varphi}_k(z)$ ,  $k = \overline{1, 3}$ , имеем  $\det A > 0$ , и система (75) имеет единственное решение

$$\mu^* = A^{-1} \eta.$$

При достаточно больших  $\lambda$  и малых  $\varphi(z)$ . таких, что и  $\lambda \varphi(z)$  малы, имеем  $|\mu_k^*| \leq \lambda$ ,  $k = \overline{1, 3}$ . Следовательно, при таких  $\lambda$  получим

$$u_1(\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*) := u(\beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^*) = \left[ \sum_{k=1}^3 \mu_k^* \bar{\varphi}_k(z) - \lambda \varphi(z), Q(t, z) + \sum_{k=1}^3 \mu_k^* g_k(t) \right].$$

Функция  $q_2^*(t, z) = Q(t, z) + \sum_{k=1}^3 \mu_k^* g_k(t)$  является гипогradientом функционала  $\Phi_\lambda(z)$ . Если  $\|q_2^*\| > 0$ , т.е.

точка  $z$  не является стационарной, то направление  $G_\lambda(t, z) = -\frac{q_2^*(t, z)}{\|q_2^*(t, z)\|}$  является направлением спуска функционала  $\Phi_\lambda$  в точке  $z$ . В отличие от направления наискорейшего спуска, направление  $G_\lambda(t, z)$ , будучи функцией от  $z$ , является непрерывным.

Таким образом, если точка  $z \in P[0, T]$  не является стационарной точкой функционала  $\Phi_\lambda$ , то можно найти направление спуска функционала  $\Phi_\lambda$  в точке  $z$ . Опишем следующий метод гиподифференциального спуска для нахождения стационарных точек, т.е. точек, удовлетворяющих условию (67) или (73).

Выберем произвольное  $z \in P[0, T]$ . Пусть уже найдено  $z_k \in P[0, T]$ . Если  $\varphi(z_k) = 0$  и выполнено условие (67) (или (73)), то точка  $z_k$  является стационарной и процесс прекращается. Если же условие (67) не выполнено, то возьмем функцию  $G_{k\lambda}(t) = q_2^*(t, z)$  — гипогradient функционала  $\Phi_\lambda$  в точке  $z_k$ . Далее решаем задачу одномерной минимизации

$$\min_{\beta \geq 0} \Phi_\lambda(z^k - \beta G_{k\lambda}) = \Phi_\lambda(z^k - \beta_k G_{k\lambda})$$

и положим  $z^{k+1} = z^k - \beta_k G_{k\lambda}$ . Имеем  $\Phi_\lambda(z^{k+1}) < \Phi_\lambda(z^k)$ . Пользуясь непрерывностью в метрике Хаусдорфа гиподифференциального отображения как функции от  $z$ , можно показать, что описанный метод сходится в следующем смысле:  $\|u\| \rightarrow 0$ , где  $u$  задано в (74). Вопрос о существовании предельных точек последовательности  $\{z^k\}$  остается открытым.

Указанный метод можно модернизировать. Пусть  $z \in Z$ , т.е.  $\varphi(z) = 0$ . Этого всегда можно добиться, взяв в качестве  $x(t)$  интерполяционный полином Эрмита [16], удовлетворяющий (1); тогда  $z(t) = x'''(t)$ .

Из (75) имеем

$$A = \int_0^T \bar{g}(t) \bar{g}^T(t) dt, \quad \eta = - \int_0^T Q(t, z) \bar{g}(t) dt,$$

поскольку  $\bar{\varphi}_k(z) = 0$ ,  $k = \overline{1, 3}$ .

Тогда решение системы (75) совпадает с решением (65), так как матрицы  $A$  и  $W$ , а также векторы  $\eta$  и  $V$  соответственно равны. Значит, направление  $G_\lambda(t, z)$  в методе гиподифференциального спуска совпадает с направлением наискорейшего спуска (68). Аналогично можно показать, что если  $z \in Z$  и  $\tilde{z}(t) = z(t) - \alpha G_\lambda(t, z)$ , то  $\tilde{z} \in Z$ . В том числе в методе гиподифференциального спуска также имеет место  $z^k - \alpha G_{k\lambda} \in Z$ .

**Пример.** Определить экстремаль функционала

$$I(x) = \int_0^1 (x'''(t))^2 dt,$$

удовлетворяющую условиям

$$x(0) = x'(0) = 0, \quad x''(0) = 1, \quad x(1) = \frac{1}{2}, \quad x'(1) = 1, \quad x''(1) = 1.$$

В качестве начальной точки удовлетворяющей краевым условиям, выберем полином  $z^0(t) = 600t^3 - 900t^2 + 360t - 30$ . Имеем значение функционалов  $I(z^0) = 128.57$ ,  $\varphi(z^0) = 0$  и  $\|G(t, z^0)\| = 22.7$ , где  $G(t, z^0) = 2z^0(t) = 1200t^3 - 1800t^2 + 720t - 60$ . Далее, строим точку  $z^0(t) - \beta G(t, z^0)$  и решаем задачу одномерной минимизации  $I(z^0(t) - \beta G(t, z^0))$  по  $\beta \geq 0$ . Получаем, что  $z^1(t) = z^0(t) - \frac{1}{2}G(t, z^0) = 0$  при  $\beta = \frac{1}{2}$ . В точке  $z^1(t) = 0$  находим, что  $I(z^1) = 0$ ,  $\varphi(z^1) = 0$  и  $\|G(t, z^1)\| = 0$ , т.е. минимизирующая последовательность сошлась к стационарной точке  $x(t) = \frac{1}{2}t^2$ . Заметим, что в данном примере величина шага спуска  $\beta$  вычисляется аналитически.

**Заключение.** В настоящей статье продемонстрировано применение негладкого анализа и теории точных штрафных функций для решения вариационной задачи для функционала, зависящего от производной третьего порядка. Получены необходимые условия экстремума и на их основе разработаны “прямые” численные методы минимизации, а именно методы наискорейшего и гиподифференциального спуска. Показано, что если в качестве начальной точки выбрать произвольную допустимую кривую, то методы наискорейшего и гиподифференциального спуска “эквивалентны”.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.
2. Rockafellar R.T. Convex analysis. Princeton: Princeton Univ. Press, 1997.
3. Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R. Nonsmooth analysis and control theory. Berlin: Springer, 1998.
4. Shor N.Z. Nondifferentiable optimization and polynomial problems. Berlin: Springer, 1998.
5. Иоффе А.Д. Метрическая регулярность и субдифференциальное исчисление // Успехи матем. наук. 2000. т. 55, вып. 3. 103–162.
6. Giannessi F., Maugeri A., Pardalos P.M. Equilibrium problems: nonsmooth optimization and variational inequality models. Berlin: Springer, 2001.
7. Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Выпуклый анализ и его приложения. М.: Эдиториал, 2003.
8. Alart P., Maitinneuve O., Rockafellar R.T. Nonsmooth mechanics and analysis: theoretical and numerical advances. Berlin: Springer, 2006.
9. Moreau J.J., Panagiotopoulos P.D. Nonsmooth mechanics and applications. Berlin: Springer, 1988.
10. Dem'yanov V.F., Stavroulakis G.E., Polyakova L.N., Panagiotopoulos P.D. Quasidifferentiability and nonsmooth modelling in mechanics, engineering and economics. Dordrecht: Kluwer Academic, 1996.
11. Демьянов В.Ф., Демьянова В.В., Кокорина А.В., Моисеенко В.М. Прогнозирование эффективности химиотерапии при лечении онкологических заболеваний // Вестн. Санкт-Петербургского ун-та. Серия 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2006. № 4. 30–36.

12. Демьянов В.Ф. Точные штрафные функции в задачах негладкой оптимизации // Вестн. Санкт-Петербургского ун-та. Сер. 1. 1994. № 4. С. 21–27.
13. Демьянов В.Ф. Условия экстремума и вариационные задачи. М.: Высшая школа, 2005.
14. Demjanov V.F., Giannessi F., Tamasyan G.Sh. Variational control problems with constraints via exact penalization // Nonconvex optimization and its applications. Vol. 79. Variational Analysis and Applications / Eds. F. Giannessi and A. Maugeru. New York: Springer, 2005. 301–342.
15. Demjanov V.F., Tamasyan G.Sh. Exact penalty functions in isoperimetric problems // Optimization. 2011. **60**, Issue 1. 153–177.
16. Демьянов В.Ф., Тамасян Г.Ш. О прямых методах решения вариационных задач // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2010. **16**, № 5. 36–47.
17. Еремин И.И. Метод “штрафов” в выпуклом программировании // Докл. АН СССР. 1967. **143**, № 4. 748–751.
18. Demjanov V.F., Giannessi F., Karelin V.V. Optimal control problems via exact penalty functions // J. Global Optim. 1998. **12**, N 3. 215–223.
19. Карелин В.В. Штрафные функции в одной задаче управления // Автомат. и телемех. 2004. № 3. 137–147.
20. Гюнтер Н.М. Курс вариационного исчисления. М.: Гостехиздат, 1941.
21. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.
22. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.
23. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966.
24. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
25. Утешев А.Ю., Тамасян Г.Ш. К задаче полиномиального интерполирования с кратными узлами // Вестн. Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. 2010. Вып. 3. 76–85.

Поступила в редакцию  
16.01.2012

---