A. V. Kitaev, Asymptotic description of the fourth Painleve equation solutions on the Stokes rays analogies,
*Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1988, Volume 169, 84–90

А.В.Китаев

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ РЕШЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ НА АНАЛОГАХ ЛУЧЕЙ СТОКСА

Цель данной заметки анонсировать некоторые результаты, полученные методом изомонодромных деформаций (см. 5 ), для четвертого уравнения Пенлеве:

$$w_{xx} = \frac{w_x^2}{2w} + \frac{3}{2}w^3 + 4xw^2 + 2(x^2 - \mu)w + \frac{\nu}{w}. \qquad (I)$$

Определим комплексное многообразие $M_4$, в терминах которого дадим описание асимптотик уравнения (I). По коэффициентам $\mu$ и $\nu$ уравнения (I) находим комплесные числа $\beta$ и $\gamma$ :

$$\beta = \frac{i}{4}(\mu - \sqrt{-2\nu}), \quad \gamma = \frac{i}{4}(\mu + 3\sqrt{-2\nu}).$$

В этих формулах ветвь корня $\sqrt{-2\nu}$ фиксирована произвольно. Комплексное многообразие $M_4$ зададим в $\mathbb{C}^4$ с координатами $z_\ell$, $\ell = -2, -1, 0, 1$, уравнениями:

$$\begin{aligned} z_0 + z_{-2} &= e^{4\pi i\gamma} z_1 z_{-1} + 1 - 2\,sh(2\pi i\beta) e^{2\pi i\gamma} \\ z_1 + z_{-1} &= e^{-4\pi i\gamma} z_0 z_{-2} + 1 + 2\,sh(2\pi i\beta) e^{-2\pi i\gamma}. \end{aligned} \qquad (2)$$

По координатам $z_\ell$ определим комплексные числа $\kappa_\ell$ формулами:

$$z_\ell \neq 0;\ (-1)^\ell \kappa_\ell = \frac{1}{2\pi i} \ln z_\ell; \quad z_\ell = 0 :\ (-1)^\ell \kappa_\ell = -\infty,$$

фиксировав $\operatorname{Im} \kappa_\ell$ нестрогим неравенством

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{2}{3} \operatorname{Im}\gamma - \operatorname{Im}\kappa_\ell < \frac{1}{2}.$$

В случае $(-1)^\ell \kappa_\ell = -\infty$ $\operatorname{Im}\kappa_\ell$ не определена. Далее под координатами точек $M_4$ будем иметь в виду именно $\{\kappa_\ell\}_{\ell=-2,-1,0,1}$. На многообразии $M_4$ определим области $\Omega_m^\ell$ $(m = 1,2,3;\ \ell = -2,-1,0,1)$ и части их границ $n_p^\ell$ $(p = m, 4)$ следующим образом:

$$\zeta \in \Omega_m^\ell \subset M_4 : \left| \frac{2}{3} \operatorname{Im}\gamma - \operatorname{Im}\kappa_\ell - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-2} |m-1|/3 \right| < \frac{1}{6},$$

$$\zeta \in n_4^\ell : (-1)^\ell \kappa_\ell = -\infty, \quad n_1^\ell \equiv \overline{\Omega}_1^\ell \cap \overline{\Omega}_2^\ell \setminus n_4^\ell,$$

$$n_2^l \equiv \overline{\Omega_1^l} \cap \overline{\Omega_3^l} \setminus n_4^l, \quad n_3^l \equiv \overline{\Omega_3^l} \setminus (\Omega_3^l \cup n_2^l \cup n_4^l).$$

С целью сокращения записи некоторых асимптотических формул сделаем соглашение: в тех случаях, когда в нижеследующих асимптотических формулах не написана асимптотическая оценка, имеется в виду, что она равна $O(\tau^{-\delta} V(\tau))\ (\delta > 0)$, где $V(\tau)$ величина, имеющая порядок младшего из выписанных членов.

Любой точке $\zeta \in M_4$ соответствует решение уравнения (I) $w(x) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} F(\tau)$, $2\sqrt{\tau}\, x = \tau$, которое при

$$\tau \to \infty, \quad \arg \tau = \pi l/2, \quad l = -2, -1, 0, 1.$$

имеет одно из следующих асимптотических поведений в зависимости от того, какой из областей $\Omega_m^l$ или части границы $n_p^l$ принадлежит точка $\zeta$ :

$$\zeta \in \Omega_1^l : F \sim \frac{1}{\tau}\left(a_l + b_l e^{\varphi_l(\zeta)} + c_l e^{-\varphi_l(\zeta)}\right),$$

$$\zeta \in \Omega_2^l : F \sim -\frac{\tau}{1-(-1)^l b_l^{-1} e^{-\varphi_l(\zeta)}},$$

$$\zeta \in \Omega_3^l : F \sim -\frac{\tau}{1-(-1)^l c_l^{-1} e^{\varphi_l(\zeta)}},$$

$$\zeta \in n_1^l : F \sim e^{-\frac{i\pi l}{2}} b_l e^{\varphi_l^\circ} + O\left(\frac{1}{\tau}\right),$$

$$\zeta \in n_2^l : F \sim e^{-\frac{i\pi l}{2}} c_l e^{-\varphi_l^\circ} + O\left(\frac{1}{\tau}\right),$$

$$\zeta \in n_3^l : F \sim -\tau - e^{-\frac{i\pi l}{2}} c_l^{-1} e^{\varphi_l^\circ} -$$

$$-e^{\frac{i\pi l}{2}} (i + 2(\beta + \gamma - \kappa_l)) c_l e^{-\varphi_l^\circ} + O\left(\frac{1}{\tau}\right),$$

$$\zeta \in n_4^\ell : F \sim -\frac{\tau}{3} + O(1),$$

$$\varphi_\ell(\gamma) = i\left\{\frac{\tau^2}{4} - d_\ell \ln|\tau|\right\}, \quad \varphi_\ell^0 = i\left\{\frac{\tau^2}{4} - \operatorname{Re} d_\ell \ln|\tau|\right\},$$

$$\varphi_\ell(\gamma) = \varphi_\ell\left(\gamma - \frac{i}{2}\right), \quad \chi_\ell(\gamma) = \varphi_\ell\left(\gamma + \frac{i}{2}\right),$$

$$a_\ell = 2(2\kappa_\ell + \beta - \gamma), \quad d_\ell = 4\left(\gamma - \frac{3}{2}\kappa_\ell\right), \quad b_\ell c_\ell = (\beta - \gamma + \kappa_\ell),$$

$$b_\ell = \frac{2i(2\pi)^{3/2} \exp\left\{(-1)^\ell \pi\left(\frac{3}{2}\kappa_\ell - \gamma\right) + i(2\gamma - \kappa_\ell)\ln 2\right\}}{\rho_\ell \Gamma(i\kappa_\ell)\Gamma\left(\frac{1}{2} - i(\beta + \gamma - \kappa_\ell)\right)\Gamma(i(\beta - \gamma + \kappa_\ell))},$$

$$c_\ell = -\frac{2i(2\pi)^{3/2} \exp\left\{(-1)^\ell \pi\left(\frac{3}{2}\kappa_\ell - \gamma\right) - i(2\gamma - \kappa_\ell)\ln 2\right\}}{q_\ell \Gamma(-i\kappa_\ell)\Gamma\left(\frac{1}{2} + i(\beta + \gamma - \kappa_\ell)\right)\Gamma(-i(\beta - \gamma + \kappa_\ell))},$$

$$\rho_0 = \rho_1 = e^{2\pi(\kappa_0 - \kappa_1)} - 1,$$

$$\rho_{-2} = \rho_{-1} = e^{2\pi(\kappa_{-2} - \kappa_{-1})} - 1,$$

$$q_0 = q_{-1} = e^{2\pi(\kappa_0 - \kappa_{-1})} - 1,$$

$$q_{-2} = q_1 = e^{2\pi(\kappa_{-2} - \kappa_{-1})} - 1.$$

В тех случаях, когда одна из $\Gamma$ – функций в формулах для $b_\ell$ и $c_\ell$ обращается в $\infty$ либо возникает неопределенность (при $q_\ell \rho_\ell = 0$ с целью ее раскрытия следует использовать определение $M_4$ см. (2)), либо $b_\ell c_\ell = 0$, при этом некоторые из выписанных формул не дают главного члена асимптотики. В последнем случае следует использовать формулу для $\zeta \in \Omega_1^\ell$, продолженную по $\zeta$ в соответствующую область $\Omega_\kappa^\ell$ $(\kappa = 2, 3)$.

Параметр однопараметрических семейств решений, отвечающих кривым $n_4^\ell$ $(\ell = -2, -1, 0, 1)$, содержится лишь при экспоненциально

малом члене, который здесь не выписан. Таким образом, каждое из этих семейств "притягивается" к соответствующему решению, асимптотика которого на направлении $arg\tau = \pi l/2$ строится в виде ряда по целым убывающим степеням $\tau$. Первый член этого ряда $\left(-\frac{\tau}{3}\right)$ приведен выше.

Прокомментируем теперь каким образом включаются в это описание решений уравнения (I) однопараметрические семейства решений, выражающиеся через функции параболического цилиндра [I], а также рациональные решения (см., например [2]). Начнем с рациональных решений. Известно, что существуют лишь два типа таких решений. Один тип рациональных решений существует лишь при тех коэффициентах $\mu$ и $\nu(\beta,\gamma)$ уравнения (I), при которых точка с координатами $K_{-2} = K_{-1} = K_0 = K_1 = -\infty$ принадлежит многообразию $M_4$. Такие $\mu, \nu(\beta,\gamma)$ нетрудно найти с помощью (2):

$$\mu = n + m, \quad \nu = -2\left(\frac{1}{3} + n - m\right),$$

где $n$ и $m$ произвольные целые числа. При любых фиксированных таким образом $\mu$ и $\nu$ четыре кривые $n_4^l$ пересекаются в единственной точке с указанными выше координатами. Этой точке как раз и соответствует рациональное решение, которое, разумеется, имеет асимптотику $W(x) \sim -\frac{2x}{3} + O(1)$. Другой тип рациональных решений, которые выражаются через полиномы Эрмита существует лишь в том случае, когда коэффициенты $\mu$ и $\nu(\gamma,\beta)$ уравнения (I) удовлетворяют условию:

$$\mu = l - 1, \quad \nu = -2(l-2n)^2, \quad l \neq 2n, \qquad (3)$$

$l, n$ – произвольные целые числа. При этом условии на $\mu$ и $\nu(\gamma,\beta)$ точка с координатами $K_{-2} = K_{-1} = K_0 = K_1 = 0$ принадлежит $M_4$, как это легко следует из соотношений (2). Этой точке как раз и соответствует рациональное решение, имеющее асимптотику $W(x) \sim -2x + O(1)$. Легко видеть, что точка с координатами $K_{-2} = K_{-1} = K_0 = K_1 = 0$ принадлежит $M_4$ при более общих нежели (3) условиях на $\mu$ и $\nu$:

$$\mu = -4\beta i + \kappa, \quad \nu = -2\kappa^2,$$

$\kappa \neq 0$, $\kappa = \pm 1, \pm 2, \pm \ldots$, $\beta$ – произвольное комплексное число, либо

$$\mu = -2\beta i + \kappa - \frac{1}{2}, \quad \nu = -2\left(2\beta i + \kappa - \frac{1}{2}\right)^2,$$

где $K$ – произвольное целое число, а $\beta$ – произвольное комплексное число $(2\beta i + K - 1/2 \neq 0)$ . При этих коэффициентах уравнение (I) имеет однопараметрическое семейство решений выражающееся через функции параболического цилиндра. Для однозначной параметризации этого семейства к многообразию $M_4$ к точке с координатами $K_{-2} = K_{-1} = K_0 = K_1 = 0$ следует приклеить $CP^1$ . Отметим, что все эти факты получаются внутренними средствами метода изомонодромных деформаций и не требует апелляции к построениям работ [I] , [2] (подробно это показано в [3] ).

Решений, имеющих другие асимптотики на указанных направлениях, четвертое уравнение Пенлеве не имеет. Отметим также, что найденные асимптотики дифференцируемы по $\tau$ и по заданной асимптотике решения на любом из направлений $arg\,\tau = \pi l/2$ однозначно определяется асимптотика того же решения на любом другом из этих направлений, вместе с соответствующими явными формулами связи асимптотических параметров. Исключение составляют лишь решения, отвечающие кривым $n_4^l$ , впрочем и для них существуют эвристические соображения, которые позволяют выписать формулы связи и в этом случае.

Четвертый трансцендент Пенлеве является нелинейным обобщением функций параболического цилиндра. Лучи $arg\,\chi = -\pi/4 + arg\tau = \ldots$ $= -\pi/4 + \pi l/2$ являются лучами Стокса для этих функций. Для четвертого уравнения Пенлеве эти лучи интересны тем, что на них общие эллиптические асимптотики решений вырождаются в "тригонометрические" и носят тем самым "осциллирующий" характер. Отметим, что впервые на существование таких лучей для уравнений Пенлеве указывал П.Бутру [4] . Задание главного члена асимптотики решения на этих лучах однозначно определяет само решение (по крайней мере для всех основных типов решений). Существует и другая мотивация называть лучи $arg\,\tau = \pi l/2$ аналогами лучей Стокса.

В заключение сделаем несколько замечаний, связанных с получением анонсированного результата. Введенная выше функция $F(\tau, \zeta)$ $(\zeta \in M_4)$ связана с изомонодромными деформациями $\theta(\tau)$ и $K(\tau)$ коэффициентов следующего линейного обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\Psi_\lambda = \left\{ -2i\sigma_3\left(4\lambda^3 + \tau\lambda + 2K\theta\lambda + \frac{\beta}{\lambda}\right) + \begin{pmatrix} 0 & 8\lambda^2\theta + 2\tau\theta + 4i\theta_\tau \\ 8\lambda^2 K + 2\tau K - 4iK_\tau & 0 \end{pmatrix} \right\} \Psi \qquad (4)$$

следующим образом $F(\tau)=\theta(\tau)\,K(\tau)$ . Общая идеология метода изомонодромных деформаций изложена в монографии [5] . В работе [6] показано как получить асимптотическую формулу для $F(\tau,\zeta)$ при $\zeta\in\Omega_1^0$ $(arg\,\tau=0)$ в частном случае $\beta=0$, $K=\pm\theta$ . Формулы в остальных случаях получены на основе техники аналогичной развитой в [7] для полного третьего уравнения Пенелеве (в частности используется реализация преобразований Бэклунда для уравнения (I) в виде преобразований Шлезингера уравнения (4)). Наконец, формулы, связывающие асимптотики на различных лучах Стокса, получаются с помощью рассмотрения действия группы точечных преобразований на многообразии $M_4$ .

## Литература


I. Громак В.Н. - Дифф.уравн., I978, т.I4, с.2I3I-2I35.
2. Громак В.И. - Дифф.уравн., I987, т.23, с.760-768.
3. Китаев А.В. Канд.дисс., Л., ЛГУ, I988.
4. Boutroux P. - Ann. Sci.L'Ecole Norm.Sup., 1913, v.30, p.255-376; 1914, v.31, p.99-159.
5. Its A.R., Novokshenov V.Ju. The Isomonodromic Deformation Method in the Theory of Painlevé Equations. Lect. Notes in Math., v.1191. Springer-Verlag: Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo. 1986.
6. Китаев А.В. - ТМФ, I985, т.64, с.347-369.
7. Китаев А.В. - Матем.сб., I987, т.I34 (I76), с.42I-444.



**A.V.Kitaev. Asymptotic description of the fourth Painlevé equation solutions on the Stokes rays analogies.**

**It is announced the full description of asymptotic behavior of the fourth Painlevé equation solutions in the neighbourhood of irregular singular point $x=\infty$ on the following directions:** $arg\,x=-\pi/4+n\ell/2$, $\ell=-2,-1,0,1$.

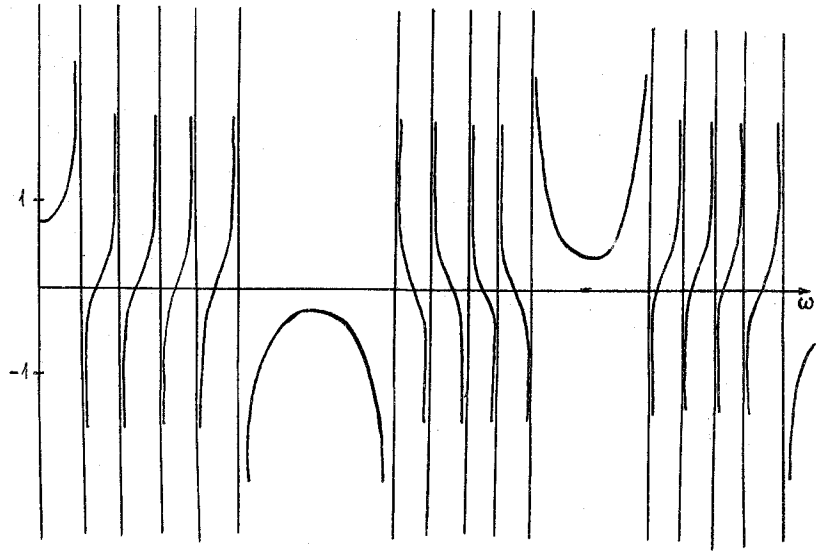


Рис.I

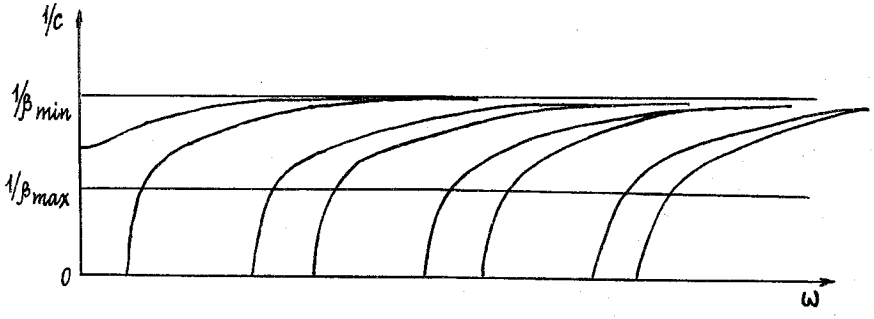


Рис.2