*Б. С. БРОНШТЕЙН*

# НЕОГРАНИЧЕННОСТЬ СУММАТОРНОЙ ФУНКЦИИ ОДНОГО ОБОБЩЕННОГО ХАРАКТЕРА

## Введение

Обобщенным характером называется мультипликативная функция, принимающая значения, равные по модулю нулю или единице.

Н. Г. Чудаков и А. К. Павлючук поставили вопрос об условиях ограниченности суммы обобщенного характера по натуральному ряду.

В настоящей работе этот вопрос решен для одного частного случая обобщенных характеров.

Именно справедлива следующая теорема:

*Если обобщенный характер* $\widetilde{h}(n)$ *отличается от некоторого неглавного характера Дирихле* $h(n, m)$ *только на кратных конечного числа простых чисел (т. е. на числах вида* $kp_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_s^{\alpha_s}$, *где хоть одно* $\alpha_i > 0$*) и не совпадает ни с каким неглавным характером Дирихле, то его сумматорная функция, т. е.* $\sum\limits_{n\leqslant x}\widetilde{h}(n)$ *неограничена.*

Эта теорема доказана в конце работы (теорема 2) с помощью теорем 1 и 1[a].

Далее теорема обобщается для некоторых бесконечных последовательностей простых чисел.

## § 1

Пусть $h(n, m)$ — характер Дирихле с модулем $m$; $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{x}h(n)$ — его сумматорная функция; характер отличен от главного.

Изменим значение характера на простом числе $p$: вместо $h(p)=\alpha$ возьмем $\widetilde{\alpha}$; $|\widetilde{\alpha}|=1$; случай $\alpha=0$ не интересен, ибо дает новый характер Дирихле.

Изменим, далее, значение характера на всех кратных $p$ так, чтобы новая функция оставалась мультипликативной; на прочих числах натурального ряда оставим $h(n)$ без изменений. Мы получим таким образом обобщенный характер $\widetilde{h}(n)$; при этом $\widetilde{h}(p)=\widetilde{\alpha}$. Пусть $\widetilde{S}(x)=\sum\limits_{n=1}^{x}\widetilde{h}(n)$ — его сумматорная функция. Покажем неограниченность $\widetilde{S}(x)$ при $\widetilde{\alpha}\neq\alpha$.

Выведем формулу, связывающую $\widetilde{S}(x)$ и $S(x)$:

$$\widetilde{S}(x)-S(x)=\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{p}\right]}\{\widetilde{h}(kp)-h(kp)\}=\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{p}\right]}\widetilde{h}(k)\widetilde{h}(p)-\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{p}\right]}h(k)h(p)=$$

$$=\widetilde{h}(p)\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{p}\right]}\widetilde{h}(k)-h(p)\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{p}\right]}h(k)=\widetilde{h}(p)\Big\{\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{p}\right]}h(k)+\sum_{k_1=1}^{\left[\frac{x}{p^2}\right]}[\widetilde{h}(k_1p)-h(k_1p)]\Big\}$$

(фигурная скобка есть преобразованный первый член);

$$-h(p)\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{p}\right]}h(k)=[\widetilde{h}(p)-h(p)]\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{p}\right]}h(k)+\widetilde{h}(p)\sum_{k_1=1}^{\left[\frac{x}{p^2}\right]}[\widetilde{h}(k_1p)-h(k_1p)].$$

Но последняя сумма опять преобразуется так же, как первоначальная; получим:

$$[\widetilde{h}(p)-h(p)]\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{p}\right]}h(k)+\widetilde{h}(p)[\widetilde{h}(p)-h(p)]\sum_{k_1=1}^{\left[\frac{x}{p^2}\right]}h(k_1)+$$

$$+\widetilde{h}^2(p)\sum_{k_2=1}^{\left[\frac{x}{p^3}\right]}[\widetilde{h}(k_2p)-h(k_2p)]=\dots$$

и т. д., пока антье не превратится в нуль. $\widetilde{h}(p)-h(p)\neq 0$, разделив на него, получим формулу:

$$\frac{\widetilde{S}(x)-S(x)}{\widetilde{h}(p)-h(p)}=S\left(\frac{x}{p}\right)+\widetilde{h}(p)S\left(\frac{x}{p^2}\right)+\widetilde{h}^2(p)S\left(\frac{x}{p^3}\right)+\dots \tag{1}$$

или, вводя новое обозначение для правой части, окончательно получим:

$$\frac{\widetilde{S}(x)-S(x)}{\widetilde{h}(p)-h(p)}=P(x,\widetilde{h}(p))=P(x). \tag{1'}$$

**Замечание.** Для случая $p>m$ неограниченность $\widetilde{S}(x)$ легко доказать непосредственно из формулы (1): можно выбрать $x$ так, чтобы вместо

$$S\left(\frac{x}{p}\right),\quad S\left(\frac{x}{p^2}\right),\dots$$

получить любую наперед заданную систему из нулей и единиц.

## § 2

**Лемма 1.** Пусть $(m, p)=1$; тогда найдется такое натуральное $k$, что

a) $\left[\frac{km}{p}\right]+1$ взаимно просто с $m$;

b) $(k, p)=1$;

c) предпоследний знак в $p$-ичном разложении числа $k$ меньше, чем $p-1$, т. е.

$$km=\delta_0p^{\mu}+\delta_1p^{\mu-1}+\dots+\delta_{\mu-1}p+\delta_{\mu},$$

где $$\delta_{\mu}>0;\quad \delta_{\mu-1}<p-1.$$

**Доказательство.** Найдутся (в силу взаимной простоты $m$ и $p$) положительные целые числа $u$ и $v$ такие, что $pu - mv = 1$; $(m, u) = 1$, $(p, v) = 1$; тогда

$$mv = pu - 1; \quad \left[\frac{mv}{p}\right] + 1 = u.$$

Очевидно, $k = v$ будет удовлетворять условиям a), b), ибо $(m, u) = 1$, $(p, k) = 1$. Если же оно условию c) не удовлетворяет, то положим $k = v + pmz$, а $z$ легко подобрать так, чтобы c) выполнялось.

## § 3

**Лемма 2.** Пусть $(m, p) = 1$, тогда найдется хотя бы одно $N$ такое, что $P(Nm) \neq 0$.

**Доказательство.** Предположим противное: для всех $n$ $P(nm) = 0$; в частности, и для $n = k$ из леммы 1.

Пусть $km = \delta_0 p^\mu + \delta_1 p^{\mu-1} + \ldots + \delta_{\mu-1} p + \delta_\mu$

$$\delta_\mu > 0; \quad \delta_{\mu-1} < p - 1.$$

Возьмем любое число $\delta$, удовлетворяющее условию $\delta < p \leqslant \delta_\mu + \delta$; обозначим $\delta_\mu + \delta = p + \gamma_0$.

Очевидно, в $p$-ичной системе счисления

$$km + \delta = \delta_0 p^\mu + \delta_1 p^{\mu-1} + \ldots + \delta_{\mu-2} p^2 + (\delta_{\mu-1} + 1)\, p + \gamma_0.$$

Далее, со знака $\delta$ наверное начинается разложение некоторого кратного $m$, например, $lm$:

$$lm = \delta p^\eta + \gamma_1 p^{\eta-1} + \ldots + \gamma_\eta.$$

Построим тогда

$$z = \delta_0 p^{\mu+\eta} + \delta_1 p^{\mu+\eta-1} + \ldots + (\delta_{\mu-1} + 1)\, p^{1+\eta} + \gamma_0 p^\eta + \gamma_1 p^{\eta-1} + \ldots + \gamma_\eta. \quad (2)$$

$z = kmp^\eta + lm$ и делится на $m$. Образуем $P(z)$, причем сумму удобнее записать в обратном порядке:

$$P[z, \tilde{h}(p)] = \sum_{\nu=1}^{\mu+\eta} \tilde{h}^{\nu-1} S(p)\left(\frac{z}{p^\nu}\right) = \sum_{\nu=\mu+\eta}^{1} \tilde{h}^{\nu-1} S\left(\frac{z}{p^\nu}\right) =$$

$$= \tilde{h}^{\mu+\eta-1}(p) S(\delta_0) + \tilde{h}^{\mu+\eta-2}(p) S(\delta_0 p + \delta_1) + \ldots +$$

$$+ \underline{\tilde{h}^\eta(p) S(\delta_0 p^{\mu-1} + \delta_1 p^{\mu-2} + \ldots + (\delta_{\mu-1} + 1)) +}$$

$$+ \tilde{h}^{\eta-1}(p) S\{\delta_0 p^\mu + \ldots (\delta_{\mu-1} + 1)\, p + \gamma_0\} + \ldots + S(\delta_0 p^{\mu+\eta-1} + \ldots + \gamma_{\eta-1}).$$

Заметим, что первые члены представляют собой

$$\tilde{h}^\eta(p) \sum_{\nu=\mu}^{1} \tilde{h}^{\nu-1}(p) S\left(\frac{km}{p^\nu}\right),$$

кроме подчеркнутого члена, где будет $S\left(\left[\frac{km}{p}\right] + 1\right)$, поэтому первые члены дадут

$$P(km)\, \tilde{h}^\eta(p) + \tilde{h}^\eta(p)\, h\left(\left[\frac{km}{p}\right] + 1\right).$$

В последующих членах в аргументе содержится кратное $km$ ($km + \delta$, $kmp + \delta p + \gamma_1$ и т. д.), его можно откинуть в силу периодичности $S(x)$. Тогда эти члены дадут $\tilde{h}^{\eta-1} S(\delta) + \tilde{h}^{\eta-2} S(\delta p + \gamma_1)$, т. е. $P(lm)$.

Итак,

$$P(z, \tilde{h}(p)) = \tilde{h}^{\eta}(p)\, P\{(km, \tilde{h}(p)\} + \tilde{h}^{\eta}(p)\, h\left(\left[\frac{km}{p}\right] + 1\right) + P(lm, \tilde{h}(p)).$$

Мы предположили, что $P(nm) = 0$ для всех $n$, поэтому $\tilde{h}^{\eta}(p)\, h\left(\left[\frac{km}{p}\right] + 1\right) = 0$; $h\left(\left[\frac{km}{p}\right] + 1\right) = 0$; этого быть не может, так как $\left[\frac{km}{p}\right] + 1$ взаимно просто с $m$ (свойство а) леммы 1).

Противоречие получено, и лемма 2 доказана.

**Замечание.** Нетрудно видеть, что для некоторого $N$ $|P(Nm, \tilde{h}(p))| \geqslant \frac{1}{3}$; при этом, например, $N$ — одно из чисел $k$, $l$ или $kp^{\eta} + l$.

## § 4

**Теорема 1.** *При наших предположениях* $[\tilde{h}(p) \neq h(p); |\tilde{h}(p)| = 1; (p, m) = 1]$ — $\tilde{S}(x)$ *неограничена.*

**Доказательство.** Пусть $N$ — число из леммы 2; положим

$$Nm = \delta_0 p^{\mu} + \delta_1 p^{\mu-1} + \ldots + \delta_{\mu}.$$

Образуем число $x$:

$$x = (\delta_0 p^{\mu} + \delta_1 p^{\mu-1} + \ldots + \delta_{\mu})\, p^{n_1} + (\delta_0 p^{\mu} + \ldots + \delta_{\mu})\, p^{n_2} + \ldots + (\delta_0 p^{\mu} + \ldots + \delta_{\mu})\, p^{n_y}, \qquad (3)$$

где

$$n_2 + \mu < n_1, \quad n_3 + \mu < n_2, \quad n_4 + \mu < n_3 \text{ и т. д.},$$

а в остальном $n_i$ — какие угодно целые. При образовании $\left[\frac{x}{p^t}\right]$, $n_{i+1} < t \leqslant n_i$, существенен только член $(\delta_0 p^{\mu} + \ldots + \delta_{\mu})\, p^{n_i}$, ибо предыдущие дадут целое кратное $m$, а последующие — меньше 1. Поэтому $\left[\frac{x}{p^k}\right]$ сравнимы по модулю $m$ со следующими числами (если $k$ убывает):

$$\begin{aligned}
&\delta_0;\ \delta_0 p + \delta_1;\ \ldots\ \delta_0 p^{\mu-1} + \ldots + \delta_{\mu-1};\ \underbrace{0;\ 0;\ \ldots\ 0;}_{n_1+1}\\
&\delta_0;\ \delta_0 p + \delta_1;\ \ldots\ \delta_0 p^{\mu-1} + \ldots + \delta_{\mu-1};\ \underbrace{0;\ 0;\ \ldots\ 0;}_{n_2+1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\delta_0;\ \delta_0 p + \delta_1;\ \ldots\ \delta_0 p^{\mu-1} + \ldots + \delta_{\mu-1};\ \underbrace{0;\ 0\ \ldots\ 0}_{n_y+1}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует:

$$P(x, \tilde{h}(p)) = S(\delta_0)\, \tilde{h}^{n_1+\mu-1}(p) + S(\delta_0 p + \delta_1)\, \tilde{h}^{n_1+\mu-2}(p) + \ldots + S(\delta_0 p^{\mu-1} + \ldots + \delta_{\mu-1})\, \tilde{h}^{n_1}(p) + 0 + 0 + \ldots + 0 + S(\delta_0)\, \tilde{h}^{n_2+\mu-1}(p) + \ldots + S(\delta_0 p^{\mu-1} + \ldots + \delta_{\mu-1})\, \tilde{h}^{n_2}(p) + 0 + 0 + \ldots = P(Nm)\,[\tilde{h}^{n_1}(p) + \tilde{h}^{n_2}(p) + \ldots + \tilde{h}^{n_y}(p)].$$

Первый сомножитель не зависит от $n_i$ и числа $y$; по лемме 2 он не равен 0 (и его модуль $\geqslant \frac{1}{3}$).

Второй же сомножитель при надлежащем выборе числа $x$ имеет порядок числа слагаемых в нем, т. е. $y$ (например, можно отбирать только те степени $\tilde{h}(p)$, аргументы которых заключены между $\varphi_0$ и $\varphi_0 + \frac{\pi}{6}$; или $\varphi_0$ и

$\varphi_0 + \pi - \theta$ и т. д.). Поэтому $|P(x, h(p))| > cy$, т. е. неограничена; а в силу формулы (1′)

$$\frac{\widetilde{S}(x) - S(x)}{\widetilde{h}(p) - h(p)} = P(x, \widetilde{h}(p)),$$

$\widetilde{S}(x)$ неограничена (ибо $S(x)$ ограничена). Точнее

$$\widetilde{S}(x) = S(x) + [\widetilde{h}(p) - h(p)]\, P(x),$$

$$|\widetilde{S}(x)| > |\widetilde{h}(p) - h(p)|\, cy - |S(x)| > c_1 y, \quad (x > x_0),$$

но $y$ (при соответствующем $x$) может быть взято сколь угодно большим.

**Замечание 1.** Нетрудно показать, что $\widetilde{S}(x) = \Omega(\ln x)$; для этого достаточно в доказательстве сохранять степени $\widetilde{h}(p)$ в том секторе, где средняя плотность их попадания не меньше, чем во всем круге (размеры сектора брать меньше $\pi - \varepsilon$).

С другой стороны, из формулы 1 следует

$$|\widetilde{S}(x)| \ll |S(x)| + 2\log_p x; \quad \widetilde{S}(x) = 0\,(\ln x).$$

**Замечание 2.** Теорема 1 показывает также, что при замене $h(n, m)$ на простом $p$, где $(p, m) = 1$, на $\widetilde{h}(p)$, $\widetilde{h}(p) \neq 0$, не может получиться неглавный характер Дирихле.

## § 5

Пусть теперь значение характера заменено на делителе $p$ основного модуля $m$: $m = p^\lambda m_1$; $(m_1, p) = 1$.

Обозначим наш характер до замены через $h(n, m)$, после замены через $\widetilde{h}(n)$. Могут представиться два случая:

1. Возможно представление $h(n, m) = \chi_0(n, p) \times \chi(n, m_1 p^{\lambda-\beta})$, где $\chi_0(n, p)$ — главный характер, а $\beta \geqslant 1$; очевидно, так как $m$ был основной модуль, то $\beta = \lambda = 1$ (так как умножение характера с $p/m$ на $\chi_0(n, p)$ модуля не увеличивает);

$$h(n, m) = \chi_0(n, p)\,\chi(n, m_1), \quad \text{где} \quad (m_1, p) = 1.$$

2. Такое представление невозможно.

1. В первом случае

$$\sum_{n=1}^{x} h(n, m) = \sum_{n=1}^{x} \chi(n_1, m_1) - \sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{p}\right]} \chi(kp, m_1) = \sum_{n=1}^{x} \chi(n, m_1) - \chi(p) \sum_{n=1}^{\left[\frac{x}{p}\right]} \chi(n, m_1)$$

или, в понятных обозначениях,

$$S_h(x) = S_\chi(x) - \chi(p)\, S_\chi\left(\frac{x}{p}\right) \qquad \left(\begin{array}{l} S_h(x) = \sum\limits_{n=1}^{x} h(n) \\ S_\chi(x) = \sum\limits_{n=1}^{x} \chi(n) \end{array}\right).$$

Применив формулу (1), получим:

$$\frac{\widetilde{S}_h(x) - S_h(x)}{\widetilde{h}(p) - 0} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \widetilde{h}^{\nu-1}(p)\, S_\chi\left(\frac{x}{p^\nu}\right) - \chi(p) \sum_{\nu=1}^{\infty} \widetilde{h}^{\nu-1}(p)\, S_\chi\left(\frac{x}{p^{\nu+1}}\right) =$$

$$= [\widetilde{h}(p) - \chi(p)]\left[\sum_{\nu=1}^{\infty} \widetilde{h}^{\nu-2}(p)\, S_\chi\left(\frac{x}{p^\nu}\right)\right] + S_\chi\left(\frac{x}{p}\right). \qquad (4)$$

Отсюда видно, что при $\widetilde{h}(p)=\chi(p)$ (т. е. при восстановлении характера $\chi$) $\widetilde{S}_h(x)$ будет ограниченной (что, конечно, ясно и так); при $\widetilde{h}(p)\neq\chi(p)$ неограниченность или ограниченность зависит от

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\widetilde{h}^{\nu-2}(p)S_{\chi}\left(\frac{x}{p^{\nu}}\right),$$

но $\chi$ имеет уже модуль $m_1$, $(m_1, p)=1$, и используя теорему 1, нетрудно убедиться в том, что эта сумма, а значит, и $S_h(x)$ неограничены.

Итак, случай 1 либо дает новый характер Дирихле, либо сумматорная функция неограничена.

2. В этом случае, если $\widetilde{h}(p)\neq h(p)$ (а $|\widetilde{h}(p)|=1$), сумматорная функция неограничена.

Чтобы доказать это, достаточно доказать лемму 2 для этого случая, ибо в самой теореме 1 мы не пользовались взаимной простотой $m$ и $p$ (кроме того места, где ссылались на лемму). Мы докажем леммы 1[а] и 2[а], параллельные леммам 1 и 2.

**Лемма 1[а].** Пусть $m=m_1p^{\lambda}$. Если $h(n, m)=h(n, m_1p^{\lambda})$ не делится на $\chi_0(n, p)$ (т. е. представление $h(n, m)=\chi_0(n, p)\chi(n, m_1)$ невозможно), то найдется такое число $a$, что

1) $a\equiv 1 \pmod{m_1p^{\lambda-1}}$,

2) $h(a, m)\neq 0,1$.

Эта лемма является видоизменением теоремы о первообразном характере * и доказывается аналогично.

**Доказательство.** Рассмотрим два случая:

1) $\lambda=1$, $m=m_1p$. Имеет место разложение: $h(n, m)=\chi(n, p)\chi(n, m_1)$; $\chi(n, p)$ — неглавный характер; найдется поэтому такое $b$, что $\chi(b, p)\neq 0,1$. Подберем число $a$ из системы:

$$a\equiv b \pmod{p},$$
$$a\equiv 1 \pmod{m_1}.$$

Тогда $h(a, m)=\chi(a, p)\cdot\chi(a, m_1)=\chi(b, p)\neq 0,1$, т. е. $a$ — искомое число.

2) $\lambda>1$. Так как $m_1p^{\lambda-1}=d$ не является периодом, то найдется $b$ такое, что $h(b, m)\neq h(b+d, m)$; очевидно, $(b, m)=1$, иначе обе части равенства равны 0 (потому что $d$ содержит все простые делители $m$).

Определим $a$ из сравнения:

$b+d\equiv ab \pmod{m}$; имеем $b\equiv ab \pmod{d}$, $a\equiv 1 \pmod{d}$; кроме того,

$$h(b+d, m)=h(ab, m)=h(a, m)\cdot h(b, m);$$
$$h(a, m)=\frac{h(b+d, m)}{h(b, m)}\neq 0,1; \qquad a \text{ — искомое число.}$$

**Лемма 2[а].** При том же условии, что в лемме 1[а] найдется хотя бы одно $N$ такое, что

$$P(Nm, \widetilde{h}(p))\neq 0.$$

**Доказательство.** Предположим противное, т. е. что для всех $n$ $P(nm)=0$. Пусть $a$ — число из леммы 1[а]. Пусть $a-1=\delta_0p^{\mu-1}+\delta_1p^{\mu-2}+\ldots+\delta_{\mu-\lambda}p^{\lambda-1}$ делится на $m$; обозначим $p(a-1)=km$,

$$km=p(a-1)=\delta_0p^{\mu}+\delta_1p^{\mu-1}+\ldots+\delta_{\mu-\lambda}p^{\lambda}. \qquad (5)$$

* См. Н. Г. Чудаков. Введение в теорию $L$-функций Дирихле (теорема 8). М. — Л., 1947.

Пусть с 1 начинается разложение числа $lm$;

$$lm = p^{\eta} + \gamma_1 p^{\eta-1} + \ldots + \gamma_{\eta-\lambda} p^{\lambda}.$$

Построим число $z$:

$$z = kmp^{\eta-1} + lm = \delta_0 p^{\mu+\eta-1} + \delta_1 p^{\mu+\eta-2} + \ldots + \\ + \delta_{\mu-\lambda-1} p^{\eta+\lambda} + \delta_{\mu-\lambda} p^{\lambda+\eta-1} + 0 + \ldots + p^{\eta} + \ldots + \gamma_{\eta-\lambda} p^{\lambda}.$$

Рассуждения, аналогичные рассуждениям в лемме 2, показывают, что

$$P(z, \tilde{h}(p)) = \tilde{h}^{\eta-1}(p) \cdot P(km) + \\ + \tilde{h}^{\eta-1}(p) \left\{ S\left[\frac{km}{p} + 1\right] - S\left(\frac{km}{p}\right) - S(1) \right\} + P(lm),$$

но

$$S\left[\frac{km}{p} + 1\right] - S\left(\frac{km}{p}\right) = h\left[\frac{km}{p} + 1\right] = h(a, m) \neq 1, \qquad S(1) = 1;$$

по предположению, $P(z) = 0$, $P(km) = 0$, $P(lm) = 0$,

$$\tilde{h}^{\eta-1}(p) \left\{ S\left[\frac{km}{p} + 1\right] - S\left(\frac{km}{p}\right) - S(1) \right\} = 0.$$

Второй сомножитель отличен от 0; $\tilde{h}^{\eta-1}(p) = 0$, что приводит нас к противоречию.

**Примечание.** При $\lambda = 1$ нулей в середине между $\delta_{\mu-\lambda} p^{\lambda+\eta-1}$ и $p^{\eta}$ не будет, а будет даже $(\delta_{\mu-1} + 1) p^{\eta}$. Поэтому существенно, чтобы $\delta_{\mu-1} + 1 < p$, т. е. $\delta_{\mu-1} < p - 1$ — иначе изменится предыдущий знак. Но неравенство $\delta_{\mu-1} < p - 1$ на самом деле имеет место, ибо в противном случае $\delta_{\mu-1} + 1 = p$; $a = a - 1 + 1$ делится на $p$, а тогда $h(a, m) = 0$, чего быть не может в силу леммы $1^a$.

**Теорема $1^a$.** Пусть $(p, m) > 1$, но характер $h(n, m)$ не делится на $\chi_0(n, p)$ (в том смысле, что представление $h(n, m) = \chi_0(n, p)\chi\left(n, \frac{m}{p^t}\right)$ не имеет места при $t > 0$). Тогда, если новое значение $\tilde{h}(p) \neq h(p)$, сумматорная функция обобщенного характера $\tilde{h}(n)$ неограничена.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

## § 6

**Теорема 2.** *Пусть теперь значения первоначального характера Дирихле $h(n, m)$ заменены на нескольких простых $p_1, p_2, \ldots, p_s$ и их кратных; $h(p_i)$ заменено на $\tilde{h}(p_i)$; получился обобщенный характер $\tilde{h}(n)$.*

*Покажем, что и в этом случае $\tilde{S}(x) = \sum_{k=1}^{x} \tilde{h}(k)$ неограничена, если только $\tilde{h}(x)$ не совпадает с некоторым новым характером Дирихле.*

**Доказательство.** Если какое-то $p_i$ взаимно просто с $m$, то будем считать, что это $p_s$. Если все $(p_i, m) > 1$, но $h(n, m)$ не делится на $\chi_0(n, p_j)$, то будем считать, что $j = s$.

Рассмотрим $\tilde{h}_1(n) = \tilde{h}(n)\chi_0(n, p_1)$. Очевидно, он получается из характера Дирихле $h(n, m) \cdot \chi_0(n, p_1)$ заменой значений на $s - 1$ простом: $p_2, p_3, \ldots, p_s$

(и их кратных — по мультипликативности).

$$\sum_{n=1}^{x}\widetilde{h}_1(n)=\sum_{n=1}^{x}\widetilde{h}(n)-\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{p_1}\right]}\widetilde{h}(kp_1)=$$

$$=\sum_{n=1}^{x}\widetilde{h}(n)-\widetilde{h}(p_1)\sum_{n=1}^{\left[\frac{x}{p_1}\right]}\widetilde{h}(n)=\widetilde{S}(x)-\widetilde{h}(p_1)\widetilde{S}\left(\frac{x}{p_1}\right) \qquad (6)$$

$$|\widetilde{S}_1(x)|\leqslant|\widetilde{S}(x)|+\left|\widetilde{S}\left(\frac{x}{p_1}\right)\right|. \qquad (7)$$

Отсюда видно, что если $\widetilde{S}(x)=\sum_{n=1}^{x}\widetilde{h}(n)$ ограничена, то ограничена и $\widetilde{S}_1(x)=\sum_{n=1}^{x}\widetilde{h}_1(n)$, и, следовательно, если $\widetilde{S}_1(x)$ неограничена, то неограничена и $\widetilde{S}(x)$.

Образуем $\widetilde{h}_{1,2}(n)=\widetilde{h}_1(n)\chi_0(n,\ p_2)$, и т. д. до

$$\widetilde{h}_{1,2\ldots s-1}(n)=\widetilde{h}_{1,\ldots s-2}(n)\chi_0(n,\ p_{s-1})=\widetilde{h}(n)\chi_0(n,\ p_1)\ldots\chi_0(n,\ p_{s-1}).$$

Этот характер получается заменой на числе $p_s$ характера Дирихле $H(n)$:

$$H(n)=h(n,\ m)\cdot\chi_0(n,\ p_1)\ldots\chi_0(n,\ p_{s-1}).$$

Применяя те же рассуждения, мы находим, что если неограничена последняя сумма $\widetilde{S}_{1,\,2\ldots s-1}(x)=\sum_{n=1}^{x}\widetilde{h}_{1,\,2\ldots s-1}(n)$, то неограничена $\widetilde{S}(x)$.

а) Если $(p_s,\ m)=1$, то в силу теоремы 1 $\widetilde{S}_{1,\,2\ldots s-1}(x)$ неограничена, так как $H(p_s)$ действительно отличается от $h_{1,\,2\ldots s-1}(p_s)$, ибо $H(p_s)=h(p_s,\ m)=h(p_s)$

$$\widetilde{h}_{1,\,2\ldots s-1}(p_s)=\widetilde{h}(p_s)\neq h(p_s).$$

Итак, $\widetilde{S}_{1,\,2\ldots s-1}(x)$ неограничена, а значит, и $\widetilde{S}(x)$ неограничена.

b) $(p_s\ m)>1$, но $h(n,\ m)$ не делится на $\chi_0(n,\ p_s)$. Тогда $\widetilde{S}_{1,\,2\ldots s-1}(x)$ неограничена в силу теоремы 1[a]. (Опять здесь $\widetilde{h}_{1,\,2\ldots s-1}(p_s)=\widetilde{h}(p_s)\neq H(p_s)=0$, а $H(n)$ не делится на $\chi_0(n,\ p_s)$.

c) $h(n,\ m)$ делится на $\chi_0(n,\ p_s)$, $\chi_0(n,\ p_{s-1}),\ \ldots\ \chi_0(n,\ p_1)$ $h(n,\ m)=\chi_0(n,\ p_1)\chi_0(n,\ p_2)\ldots\chi_0(n,\ p_s)\cdot\chi(n,\ m_1)$, где $m_1$ не делится на $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_s$.

В этом случае $H(n)=h(n,\ m)$. В § 5 показано, что $\widetilde{S}_{1,\,2\ldots s-1}(x)$ будет неограниченной лишь тогда, когда восстанавливается тот характер Дирихле, из которого $H(n)$ получен умножением на $\chi_0(n,\ p_s)$, т. е. только при $\widetilde{h}_{1,\,2\ldots s-1}(p_s)=\chi(p_s,\ m_1)\chi_0(p_s,\ p_1)\ldots\chi_0(p_s,\ p_{s-1})$, что равносильно

$$\widetilde{h}(p_s)=\chi(p_s,\ m_1).$$

Значит, и $\widetilde{S}(x)$ будет ограничена только в этом случае.

Меняя индексы у $p_i$ и применяя предыдущие рассуждения, получим, что $\widetilde{S}(x)$ ограничена, лишь когда

$$\widetilde{h}(p_1)=\chi(p_1,\ m_1),$$
$$\widetilde{h}(p_2)=\chi(p_2,\ m_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\widetilde{h}(p_s)=\chi(p_s,\ m_1),$$

или, так как $h(n, m) = \chi_0(n, p_1) \dots \chi_0(n, p_s)\chi(n, m_1)$, — лишь когда $\widetilde{h}(n) = \chi(n, m)$, т. е. $\widetilde{h}$ снова — характер Дирихле.

В противном случае $\widetilde{S}(x)$ неограничена.

## § 7

Построим обобщенный характер, отличающийся от характера Дирихле на бесконечной подпоследовательности простых чисел и обладающий неограниченной суммой.

Пусть $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ — любая неограниченная последовательность положительных чисел.

Пусть дан неглавный характер Дирихле $h(n, m)$. Возьмем любое простое число $p_0$, $(p_0, m) = 1$, и заменим на нем значение характера $h$ на любое число, отличное от $h(p_0, m)$ и равное по модулю единице $|\widetilde{h}(p_0)| = 1$, а на числах, некратных $p_0$, пусть $\widetilde{h}(n) = h(n, m)$. Получим обобщенный характер $\widetilde{h}(n)$.

Изменим значение обобщенного характера $\widetilde{h}(n)$ еще на любых простых $p_1, p_2, \dots, p_k$, $p_1 < p_2 < \dots < p_k$, и их кратных — получим обобщенный характер $h_1(n)$; $S_1(x) = \sum h_1(n)$ неограничена в силу пункта а) теоремы 2 (ибо $(p_0, m) = 1$, а $h_1(p_0) \neq h(p_0, m)$).

Найдется, следовательно, число $x_1$ такое, что $|S_1(x_1)| > u_1$, и при этом можно считать, что $x_1 > p_{k_1}$.

Изменим значения характера $h_1(n)$ на любом конечном числе простых, бо́льших $x_1$ $x_1 < p_{k_1+1} < p_{k_1+2} < \dots < p_{k_2}$ и их кратных.

Получим обобщенный характер $h_2(n)$, при этом для $n < x_1$ $h_2(n) = h_1(n)$.

Опять $S_2(x) = \sum\limits_{h \leqslant x} h_2(n)$ неограничена, и для некоторого числа $x_2$, $x_2 > p_{k_2}$, $|S_2(x_2)| > u_2$.

Продолжаем этот процесс; получим последовательность характеров: $h_1(n)$, $h_2(n)$, $h_3(n)$, ...

При этом для $n < x_i$ $h_{i+1}(x) = h_i(x)$.

Построим теперь обобщенный характер $\widetilde{H}(n)$ следующим образом: полагаем $\widetilde{H}(n) = h_1(n)$ для $n < x_1$, $\widetilde{H}(n) = h_2(n)$ для $n < x_2$, и т. д. до бесконечности.

Легко видеть, что получим действительно обобщенный характер, но $\left|\sum\limits_{n \leqslant x_i} \widetilde{H}(n)\right| > u_i$, т. е. $\sum\limits_{n=1}^{x} \widetilde{H}(n)$ неограничена.