Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

A. M. Maksimov, E. V. Radkevich, On capillary waves in unsaturated porous media,
Dokl. Akad. Nauk, 1996, Volume 350, Number 5, 627–631

https://www.mathnet.ru/eng/dan3984

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.83
December 5, 2025, 23:44:17

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1996, том 350, № 5, с. 627–631

МЕХАНИКА

УДК 532.546:534.2

О КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛНАХ В НЕНАСЫЩЕННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

© 1996 г. А. М. Максимов, Е. В. Радкевич

Представлено академиком Е.И. Шемякиным 30.06.95 г.

Поступило 17.07.95 г.

Исследование нелинейных эффектов, связанных с распространением акустических волн в горных породах, – современная геофизическая проблематика, обусловленная многочисленными приложениями (например, поиск месторождений углеводородов, определение физико-механических свойств пород, активное акустическое воздействие с целью интенсификации добычи углеводородов и др.) [1, 2]. Классический подход Френкеля–Био–Николаевского [3], рассматривающий горные породы как пористые среды в континуальном приближении, позволяет эффективно строить модели для исследования механизмов распространения волн с учетом реологических и термодинамических свойств твердого минерального скелета и поровых флюидов. Развитие указанного подхода представлено в работах [4, 5], в которых учет дисперсионных факторов (вязких напряжений и температуропроводности) приводит к появлению при старших пространственных производных в уравнениях модели безразмерных параметров – обратных акустических чисел Рейнольдса Re_a^{-1} и Пекле Pe_a^{-1}. При больших $\mathrm{Re}_a \gg 1$ и $\mathrm{Pe}_a \gg 1$, отвечающих высокопроницаемой пористой среде, насыщенной слабовязким флюидом, оказывается возможным применение метода многомасштабных разложений для асимптотического исследования модели в ультразвуковом диапазоне 10^4–10^5 Гц (когда частота несущей волны, с одной стороны, превышает характеристическую частоту межфазного обмена импульсом $\omega_* = \dfrac{\nu m^2}{\rho\kappa}$, где ν, ρ, m, κ – характерные вязкость флюида, плотность, пористость и проницаемость среды, и, с другой стороны, не попадает в мегагерцовый диапазан, где необходимо учитывать механизмы рассеяния [6]). При этом задача Коши для исходной системы уравнений законов сохранения массы, импульса и энергии преобразуется к задаче Коши для нелинейных эволюционных уравнений (типа Кортевега–де Фриза–Бюргерса), что позволяет решать задачи модуляции и трехволнового резонанса.

В настоящей работе рассмотрен случай двухфазного (жидкость–газ) насыщения пористой среды. Показано, что учет капиллярных сил приводит к возникновению новой продольной моды – капиллярной волны. Предложен асимптотический метод исследования нелинейных акустических эффектов в ненасыщенной пористой среде.

Рассмотрим пористую среду, состоящую из эффективной вязкоупругой твердой фазы, образуемой термоупругодеформируемым скелетом и связанной поверхностью скелета вязкой жидкостью, и насыщенной двухфазным флюидом – вязкими жидкостью и газом, занимающими свои системы пор.

В терминах введенных в [4, 5] безразмерных переменных система уравнений сохранения массы, импульса, энергии и реологических и термодинамических соотношений имеет вид ($i, j = 1, 2, 3$):

$$\frac{\partial(ms\rho_l)}{\partial t} + \nabla_x(ms\rho_l v_l) = 0;$$

$$\frac{\partial(m(1-s)\rho_g)}{\partial t} + \nabla_x(m(1-s)\rho_g v_g) = 0;$$

$$\frac{\partial(\alpha m\rho_\alpha + (1-m)\rho_s)}{\partial t} +$$

$$+ \nabla_x((\alpha m\rho_\alpha + (1-m)\rho_s)v_s) = 0;$$

$$\rho_l\left[\frac{\partial}{\partial t} + \langle v_l, \nabla_x\rangle\right]v_{li} - \frac{\partial P_{ij}^l}{\partial x_j} +$$

$$+ \frac{ms(1-\alpha)(v_{li} - v_{si})}{f_l(s)} = 0;$$

$$\rho_g\left[\frac{\partial}{\partial t} + \langle v_g, \nabla_x\rangle\right]v_{gi} - \frac{\partial P_{ij}^g}{\partial x_j} +$$

Институт проблем нефти и газа
Российской Академии наук, Москва

$$+\frac{m(1-s)(1-\alpha)(v_{gi}-v_{si})\nu_g}{\nu_l f_g(s)} = 0;$$

$$(\alpha m\rho_\alpha+(1-m)\rho_s)\left[\frac{\partial}{\partial t}+\langle v_s,\nabla_x\rangle\right]v_{si}-\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}-$$

$$-s(1-(1-\alpha)m)\frac{\partial P^l_{ij}}{\partial x_j}-(1-s)(1-(1-\alpha)m)\frac{\partial P^g_{ij}}{\partial x_j}-$$

$$-\frac{m^2s^2(1-\alpha)^2(v_{li}-v_{si})}{f_l(s)}-$$

$$-\frac{m^2(1-s)^2(1-\alpha)^2(v_{gi}-v_{si})\nu_g}{\nu_l f_g(s)} = 0;$$

$$ms(1-\alpha)\rho_l\left[\frac{\partial}{\partial t}+\langle v_l,\nabla_x\rangle\right]E_l-$$

$$-ms(1-\alpha)P^l_{ij}\frac{\partial v_{li}}{\partial x_j}-$$

$$-\frac{m^2s^2(1-\alpha)^2(v_l-v_s)^2}{f_l(s)}+\chi_l(T_l-T_s)-$$

$$-(1-\alpha)\lambda_l\nabla_x(ms\nabla_x T_l) = 0; \qquad (1)$$

$$m(1-s)(1-\alpha)\rho_g\left[\frac{\partial}{\partial t}+\langle v_g,\nabla_x\rangle\right]E_g-$$

$$-ms(1-\alpha)P^g_{ij}\frac{\partial v_{gi}}{\partial x_j}+\chi_g(T_g-T_s)-$$

$$-\frac{m^2s^2(1-\alpha)^2(v_g-v_s)^2\nu_g}{\nu_l f_g(s)}-$$

$$-(1-\alpha)\lambda_g\nabla_x(m(1-s)\nabla_x T_g) = 0;$$

$$(1-m)\rho_s\left[\frac{\partial}{\partial t}+\langle v_s,\nabla_x\rangle\right]E_s+$$

$$+\alpha m\rho_\alpha\left[\frac{\partial}{\partial t}+\langle v_s,\nabla_x\rangle\right]E_\alpha-$$

$$-[\sigma_{ij}+s(1-(1-\alpha)m)P^l_{ij}+$$

$$+(1-s)(1-(1-\alpha)m)P^g_{ij}]\frac{\partial v_{si}}{\partial x_j}-\chi_l(T_l-T_s)-$$

$$-\chi_g(T_g-T_s)-\nabla_x((1-m)\lambda_s+\alpha m\lambda_\alpha)\nabla_x T_s = 0;$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}-v_{si} = 0; \quad e_{ij}-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] = 0,$$

где

$$v_l = (v_{l1}, v_{l2}, v_{l3}), \quad v_g = (v_{g1}, v_{g2}, v_{g3}),$$

$$v_s = (v_{s1}, v_{s2}, v_{s3}),$$

$$P^l_{ij} = -p_l\delta_{ij}+\mathrm{Re}_a^{-1}\left[\frac{\partial v_{li}}{\partial x_j}+\frac{\partial v_{lj}}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial v_{lk}}{\partial x_k}\delta_{ij}\right],$$

$$P^g_{ij} = -p_g\delta_{ij}+\mathrm{Re}_a^{-1}\left(\frac{\nu_g}{\nu_l}\right)\left[\frac{\partial v_{gi}}{\partial x_j}+\frac{\partial v_{gj}}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial v_{gk}}{\partial x_k}\delta_{ij}\right],$$

$$\sigma_{ij} = Ke_{kk}\delta_{ij}+2G\left(e_{ij}-\frac{e_{kk}\delta_{ij}}{3}\right)+\beta_s Kp\delta_{ij}-$$

$$-\varphi_s KT_s\delta_{ij}+\mathrm{Re}_a^{-1}\frac{\alpha m\nu_a}{\nu_l}\times$$

$$\times\left[\frac{\partial v_{si}}{\partial x_j}+\frac{\partial v_{sj}}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial v_{sk}}{\partial x_k}\delta_{ij}\right],$$

$$p = sp_l+(1-s)p_g, \quad p_g-p_l = \gamma J(s), \quad \rho_g = \frac{p_g}{RT_g},$$

$$\rho_l = \rho_{l0}(1+\beta_l(p_l-p_{l0})-\varphi_l(T_l-T_{l0})),$$

$$\rho_\alpha = \rho_{\alpha 0}\left(1-\beta_\alpha\left(\frac{\sigma^s_{kk}}{3}-\sigma_0\right)-\varphi_\alpha(T_s-T_{s0})\right),$$

$$\rho_s = \rho_{s0}\left(1-\beta_s\left(\frac{\sigma^s_{kk}}{3}-\sigma_0\right)-\varphi_s(T_s-T_{s0})\right),$$

$$\rho_l dE_l = \rho_l C_l dT_l+\frac{p}{\rho_l}d\rho_l-\varphi_l T_l dp, \quad E_g = C_g T_g,$$

$$\rho_s dE_s = \rho_s C_s dT_s+\sigma^s_{ij}de_{ij}+\frac{\varphi_s T_s d\sigma^s_{kk}}{3},$$

$$\rho_\alpha dE_\alpha = \rho_\alpha C_\alpha dT_s-\frac{\sigma^s_{kk}}{3\rho_\alpha}d\rho_\alpha+\frac{\varphi_\alpha T_s d\sigma^s_{kk}}{3},$$

$$\sigma^s_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{1-(1-\alpha)m}+sP^l_{ij}+(1-s)P^g_{ij}.$$

Здесь сохранены обозначения, использованные в [4, 5]. Также f_l, f_g – функции фазовых проницаемостей жидкости и газа, J – функция Леверетта, $\gamma=\left(\frac{m}{\kappa}\right)^{1/2}\delta\frac{\cos(\psi)}{K_0}$ – безразмерный коэффициент, определяемый характерными значениями поверхностного натяжения δ и угла смачивания ψ [7].

Нетрудно понять, что подстановка реологических и термодинамических соотношений в систему законов сохранения приведет к появлению при вторых пространственных производных в уравнениях сохранения импульса и энергии обратных

акустических чисел Рейнольдса Re_a^{-1} и Пекле Pe_a^{-1} соответственно. При этом

$$\mathrm{Re}_a = \frac{v_0 x_0 \rho_l}{\nu_l} \equiv \frac{K_0 \rho_l \kappa}{\nu_l^2}, \quad \mathrm{Pe}_a = \frac{v_0 x_0 \rho_l C_l}{\lambda_l} \equiv \frac{K_0 \rho_l C_l \kappa}{\nu_l \lambda_l}.$$

Как показывают оценки, выполненные при характерных значениях параметров горных пород и поровых флюидов, диапазон изменения Re_a и Pe_a оказывается весьма широким: от $\mathrm{Re}_a \gg 1$ и $\mathrm{Pe}_a \gg 1$ для высокопроницаемой пористой среды, насыщенной слабовязким флюидом, до $\mathrm{Re}_a \sim 1$ и $\mathrm{Pe}_a \sim 10^1$ при понижении проницаемости и увеличении вязкости. Ниже ограничимся случаем $\mathrm{Re}_a \sim$ $\sim 10^4$–10^6 и $\mathrm{Pe}_a \sim 10^4$–10^6, когда малый параметр $\varepsilon^2 = \mathrm{Re}_a^{-1} = \mathrm{Pe}_a^{-1}$.

Остановимся вначале на построении многофазового (определяемого совокупностью нескольких невзаимодействующих волн) асимптотического решения задачи Коши для модели (1) методом двух масштабов [8].

Асимптотическое решение по $\mathrm{mod}\, O(\varepsilon^2)$ с начальными данными

$$U|_{t=0} = U_\text{ф}|_{t=0} + \varepsilon \sum_{i=1}^{N} H^i \overset{1}{U}{}_0^i\left(\frac{S_{i0}(x)}{\varepsilon}, x\right) \tag{2}$$

будем искать в виде

$$U = U_\text{ф}(x,t) + \varepsilon \sum_{i=1}^{N} H^i \overset{1}{U}{}^i(\tau_i, x, t) +$$
$$+ \varepsilon^2 (\overset{2}{U}(\tau, x, t) + Q(x, t, \varepsilon)), \tag{3}$$

где вектор $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_N)$. Здесь U – вектор-функция искомых величин $(i, j = 1, 2, 3)$:

$$U(\tau, x, t) =$$
$$= (m, s, v_{li}, v_{gi}, v_{si}, p_l, p_g, \sigma_{ij}, e_{ij}, T_l, T_g, T_s, u_i).$$

Также $U_\text{ф}(x, t)$ – медленный фон – есть среднее от решения U; $H^i(x, t)$ – нуль-векторы, соответствующие частотам $\omega_i(x, t, k)$ продольных волн 1-го и 2-го рода, продольных капиллярных волн и поперечных волн (кратные); $\overset{1}{U}{}_0^i$ – скалярные, вещественнозначные, 2π-периодические по $\tau_i = S_i/\varepsilon$ функции; фазы $S_i(x, t)$ – решения задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби;

$$\frac{\partial S_i}{\partial t} + \omega_i(x, t, \nabla_x S_i) = 0, \quad S_i|_{t=0} = S_{i0}(x). \tag{4}$$

Здесь частоты ω_i определяются дисперсионным соотношением

$$\mathrm{Det} A(t, x, -\omega, k) = 0,$$

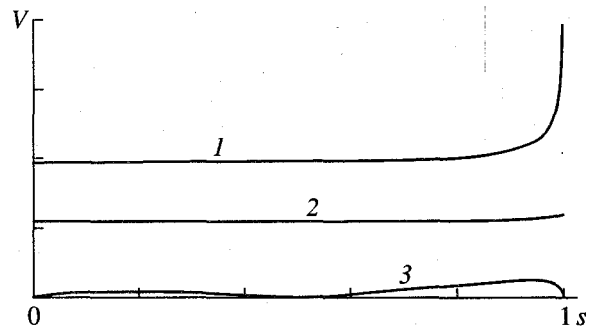

Рис. 1.

где A – символ линеаризованного оператора $A(t, x, \partial/\partial t, \nabla_x)$ системы (1) на фоне $U_\text{ф}$.

На рис. 1 представлен качественный вид зависимостей фазовых скоростей $V = \omega/|k|$ продольных волн 1-го рода (кривая *1*), 2-го рода (кривая *2*) и капиллярных волн (кривая *3*) от насыщенности смачивающей фазы (жидкости), обобщающий результаты многочисленных расчетов. Нетрудно видеть, что капиллярные волны характеризуются скоростями, на 1–2 порядка меньшими, чем у других продольных волн, причем скорость капиллярной волны обращается в нуль при исчезновении одной из фаз и при обращении в нуль $J'(s)$ (здесь при $s = 0.5$).

Вещественнозначные, скалярные, 2π-периодические с нулевыми средними по τ_i функции $\overset{1}{U}{}^i(\tau_i, x, t)$ являются решением задачи Коши для уравнений типа Кортевега–де Фриза–Бюргерса:

$$\frac{d\overset{1}{U}{}^i}{dt_{Ai}} + a_1^i \frac{\partial^2 \overset{1}{U}{}^i}{\partial \tau_i^2} + a_2^i \overset{1}{U}{}^i \frac{\partial \overset{1}{U}{}^i}{\partial \tau_i} + a_3^i \overset{1}{U}{}^i +$$
$$+ \varepsilon\left(a_4^i \frac{\partial^3 \overset{1}{U}{}^i}{\partial \tau_i^3} + a_5^i \overset{1}{U}{}^i \frac{\partial^2 \overset{1}{U}{}^i}{\partial \tau_i^2} + a_6^i (\overset{1}{U}{}^i)^2 \frac{\partial \overset{1}{U}{}^i}{\partial \tau_i} +\right.$$
$$\left. + a_7^i (\overset{1}{U}{}^i)^2 + a_8^i \left(\frac{\partial \overset{1}{U}{}^i}{\partial \tau_i}\right)^2 + a_9^i \frac{\partial \overset{1}{U}{}^i}{\partial \tau_i}\right) = 0,$$
$$\overset{1}{U}{}^i\Big|_{t=0} = \overset{1}{U}{}_0^i. \tag{5}$$

Также, функция $\overset{2}{U}(\tau, x, t)$ – C^∞ по совокупности переменных, 2π-периодическая с нулевым средним по τ; оператор d/dt_{Ai} – полная производная вдоль характеристик, отвечающих уравнению (4), Q – бесконечно-дифференцируемая ограниченная функция; коэффициенты a_j^i определяются из построения асимптотического решения.

Заметим, что построение многофазового решения (3) проводится в предположении о выполнении условия отсутствия резонансного взаимодействия волн, аналогичного условию на малые знаменатели теории Колмогорова–Арнольда–Мозера [8, 9].

Уравнение (5) позволяет описать распространение волн, не вступающих в нелинейное взаимодействие. Однако известен ряд экспериментальных фактов [10, 11], свидетельствующих о процессах генерации новых волн в результате нелинейного взаимодействия упругих продольных и поперечных волн в горных породах. Проблема теоретического изучения этого эффекта может быть решена с использованием традиционных методов нелинейной физики, рассматривающих схемы трехволновых взаимодействий [8, 12].

Необходимые условия резонансного взаимодействия волн:

$$\omega^{(1)} + \omega^{(2)} = \omega^{(3)}, \quad k^{(1)} + k^{(2)} = k^{(3)}, \tag{6}$$

где $\omega^{(i)} = \omega^{(i)}(k^{(i)})$ и $k^{(i)}$ – соответственно частоты и волновые векторы тройки взаимодействующих волн.

Резонансное взаимодействие трех волновых цугов в рассматриваемой модели пористой среды описывается обобщенной системой уравнений Кортевега–де Фриза–Бюргерса

$$\frac{d\overset{1}{U}{}^i}{dt_{Ai}} + a_1^i \frac{\partial^2 \overset{1}{U}{}^i}{\partial \tau_i^2} + a_2^i \overset{1}{U}{}^i \frac{\partial \overset{1}{U}{}^i}{\partial \tau_i} + a_3^i \overset{1}{U}{}^i +$$

$$+ \varepsilon\left(a_4^i \frac{\partial^3 \overset{1}{U}{}^i}{\partial \tau_i^3} + a_5^i (\overset{1}{U}{}^i)^2 + a_6^i \left(\frac{\partial \overset{1}{U}{}^i}{\partial \tau_i}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + a_7^i \overset{1}{U}{}^i \frac{\partial^2 \overset{1}{U}{}^i}{\partial \tau_i^2} + a_8^i (\overset{1}{U}{}^i)^2 \frac{\partial \overset{1}{U}{}^i}{\partial \tau_i} + a_9^i \frac{\partial \overset{1}{U}{}^i}{\partial \tau_i} \right) + W^i = 0, \tag{7}$$

где

$$W^1 = \frac{\gamma_1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau_1} \int_0^{2\pi} \overset{1}{U}{}^2(\xi, x, t) \overset{1}{U}{}^3(\tau_1 + \xi, x, t) d\xi,$$

$$W^2 = \frac{\gamma_2}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau_2} \int_0^{2\pi} \overset{1}{U}{}^1(\xi, x, t) \overset{1}{U}{}^3(\tau_2 + \xi, x, t) d\xi,$$

$$W^3 = \frac{\gamma_3}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau_3} \int_0^{2\pi} \overset{1}{U}{}^1(\xi, x, t) \overset{1}{U}{}^2(\tau_3 - \xi, x, t) d\xi,$$

Здесь константы γ_i определяются из построения решения и зависят от параметров среды и равновесного фонового состояния, частот и волновых векторов резонансной триады.

Для системы уравнений (7) справедливы законы сохранения энергии – аналоги соотношений Мэнли–Роу [12] ($j = 1, 2$):

$$\begin{gathered} \frac{d\mathscr{E}_j}{dt_{Aj}} + \frac{\gamma_j}{\gamma_3} \frac{d\mathscr{E}_3}{dt_{A3}} = 0, \\ \frac{d\mathscr{E}_1}{dt_{A1}} + \frac{d\mathscr{E}_2}{dt_{A2}} + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_3} \frac{d\mathscr{E}_3}{dt_{A3}} = 0, \end{gathered} \tag{8}$$

где $\mathscr{E}_j$ – усредненная по быстрым осцилляциям энергия волны с фазой S_j,

$$\mathscr{E}_j = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} (\overset{1}{U}{}^j)^2 d\tau_j + \int_0^{t_{Aj}} \int_0^{2\pi} [|a_1^j| + \varepsilon(a_6^j - 2a_7^j) \overset{1}{U}{}^j] \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{\partial \overset{1}{U}{}^j}{\partial \tau_j}\right)^2 d\tau_j dt_{Aj} + \int_0^{t_{Aj}} \int_0^{2\pi} [a_3^j + \varepsilon a_5^j \overset{1}{U}{}^j] (\overset{1}{U}{}^j)^2 d\tau_j dt_{Aj} \right),$$

$$j = 1, 2, 3.$$

Наличие законов сохранения (8) позволяет проанализировать характер взаимодействия волн с точки зрения перераспределения энергии. При этом возможны следующие варианты.

1. $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 > 0$ или $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 < 0$. Тогда происходит "перекачка" части энергии двух исходных волн в образовавшуюся третью волну. Поскольку $(\gamma_1 + \gamma_2)/\gamma_3 > 0$, полная энергия системы остается постоянной, так что с ростом амплитуды образовавшейся волны амплитуды исходных волн уменьшаются.

2. $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2, \gamma_3 < 0$ или $\gamma_1 < 0$, $\gamma_2, \gamma_3 > 0$. В этом случае образовавшаяся третья волна часть энергии (γ_2/γ_3) "отбирает" у второй волны и часть энергии (γ_1/γ_3) "передает" первой волне. При этом полная энергия системы остается постоянной $(\gamma_1 + \gamma_2)/\gamma_3 > 0$.

Аналогично, если $\gamma_2 > 0$, $\gamma_1, \gamma_3 < 0$ или $\gamma_2 < 0$, $\gamma_1, \gamma_3 > 0$, то образовавшаяся волна часть энергии (γ_1/γ_3) "отбирает" у первой волны и часть энергии (γ_2/γ_3) "передает" второй волне.

3. Случай взрывной неустойчивости. Здесь, как и в случае 2, происходит перекачка энергии одной из первоначальных волн посредством новой образовавшейся волны в другую исходную волну, но поскольку полная энергия системы не сохраняется при $(\gamma_1 + \gamma_2)/\gamma_3 < 0$, то амплитуды волн могут неограниченно увеличиваться.

4. Трехцуговый резонанс не происходит. Здесь $\gamma_3 > 0$, $\gamma_1, \gamma_2 < 0$ или $\gamma_3 < 0$, $\gamma_1, \gamma_2 > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кузнецов О.Л., Симкин Э.М.* Преобразование и взаимодействие геофизических полей в литосфере. М.: Недра, 1990.

2. *Николаевский В.Н.* // Изв. АН. МЖГ. 1992. № 5. С. 110–119.
3. *Nikolaevskij V.N.* Mechanics of Porous and Fractured Media. Singapore: World Scientific, 1990.
4. *Максимов А.М., Радкевич Е.В.* // ДАН. 1993. Т. 332. № 4. С. 432–435.
5. *Максимов А.М., Радкевич Е.В., Эдельман И.Я.* // ДАН. 1994. Т. 336. № 6. С. 745–749.
6. *Меркулова В.М.* // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1966. № 8. С. 47–60.
7. *Коллинз Р.* Течение жидкостей через пористые материалы. М.: Мир, 1964.
8. *Маслов В.П.* Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1987.
9. *Арнольд В.И.* // УМН. 1963. Т. 18. № 6. С. 91–192.
10. *Николаев А.В.* В сб.: Сейсмическое вибровоздействие на нефтяную залежь. М., 1993. С. 7–13.
11. *Зименков С.В., Назаров В.Е.* // Изв. АН. Физика Земли. 1993. № 1. С. 13–18.
12. *Маслов В.П., Омельянов Г.А.* // Изв. вузов. Физика. 1986. № 3. С. 3–23.