Int. J. for Numerical methods, vol. 14, pp. 813-836, 1979.

10. Миткевич В.М. Автоматическая подготовка входных данных к методу конечных элементов для различных двухмерных областей с использованием отображения сетки декартовой системы координат. Республиканский межвед.научно-технический сборник. Харьков, "Вища школа", вып.32, 1980. с.31-37.

11. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М., "Мир", 1975.

УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК СО СЛОЯМИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В НЕКАНОНИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

В.Н.Паймушин, В.Г. Демидов

При построении уточненных теорий многослойных пластин и оболочек, как правило, используются два подхода. В соответствии с первым подходом основные уравнения строятся на основе гипотез, привлекаемых для всего пакета в целом, а во втором те или иные гипотезы применяются для каждого слоя. На основе второго подхода в настоящее время разработаны два варианта теории многослойных пластин и оболочек, получившие наибольшее применение. В первом из них, предложенном В.В.Болотиным [1] и изложенном в монографии [2] , к жестким слоям применяются гипотезы Кирхгофа-Лява, а для мягких используется гипотеза прямой линии с учетом или без учета поперечного обжатия. Во втором варианте, предложенном Э.И.Григолюком и П.П.Чулковым [3] , к каждому слою многослойного пакета применяется гипотеза прямой линии С.П.Тимошенко. Обоим из указанных подходов присущи те или иные особенности, определяющие области их применимости. Так, например, в [4] было отмечено, что второй подход к построению теории многослойных конструкций в варианте [3] можно рассматривать как дифференциальную форму метода конечных элементов [5] , приводящую трехмерную задачу теории упругости к системе двумерных дифференциальных уравнений, определенных на некоторых узловых поверхностях, заданных естественным образом для многослойных и выбираемых искусственно для однородных (изотропных или анизотропных) оболочек. Благодаря этой особенности, на базе уравнений [3,4] возможно создание единой методики расчета как многослойных пластин и оболочек при произвольных условиях закрепления каждого из слоев пакета, так и однослойных конструкций при сложном характере закрепления их кромок по толщине.

Следует отметить, что в рамках второго подхода, за исключением работы [6], в литературе рассматривались лишь многослойные оболочки со слоями постоянной толщины. В связи с этим, данная статья посвящена построению двумерных уравнений механики многослойных оболочек, у которых слои имеют переменную толщину. При этом к каждому слою применена гипотеза прямой линии с учетом обжатия, что позволяет, в рамках принятых ограничений, использовать выведенные уравнения и для решения задач механики деформирования некоторого класса толстых однослойных пластин и оболочек, занимающих неканоническую область в трехмерном пространстве.

I. Пусть тело, занимающее некоторую область Ω в трехмерном пространстве, ограничено кусочно-гладкой поверхностью, состоящей из боковой поверхности S и двух граничных поверхностей $\sigma_н$ и $\sigma_в$, которые назовем, соответственно, нижней и верхней лицевыми поверхностями. Предположим, далее, что метрика пространства Ω определена двумя криволинейными координатами α^1 и α^2 на поверхности $\sigma_н$, заданной уравнением $\bar{r}=\bar{r}(\alpha^i)$ и расстоянием z, отсчитываемым по направлению единичной нормали $\bar{m}$ к $\sigma_н$. Будем считать, что боковая поверхность S образована движением вектора $z\bar{m}$ вдоль контура Γ, ограничивающего поверхность $\sigma_н$, а верхняя лицевая поверхность относительно $\sigma_н$ задана векторным уравнением

$$\bar{R}(\alpha^i)=\bar{r}(\alpha^i)+H(\alpha^i)\bar{m}\ , \tag{I}$$

где $H(\alpha^i)$ - некоторая непрерывная функция, определяющая толщину рассматриваемого тела в направлении $\bar{m}$.

Обозначим через a_{ik} и b_{ik} первый и второй метрические тензоры поверхности $\sigma_н$ и предположим, что с точностью

$1+\varepsilon \approx 1$ (ε - некоторая малая величина) выполняется равенство $\delta_i^{\,k} - z\, b_i^{\,k} \approx \delta_i^{\,k}$ $(0 \le z \le H)$,

где $\delta_i^{\,k}$ - символ Кронекера.

Из принятых предположений следует, что рассматриваемое тело может быть отнесено или к классу тонких непологих оболочек, или к классу толстых пологих оболочек и пластин, у которых, в принятой параметризации, изменением метрики в направлении z можно пренебречь, а область Ω является неканонической в силу переменности функции $H(\alpha^i)$.

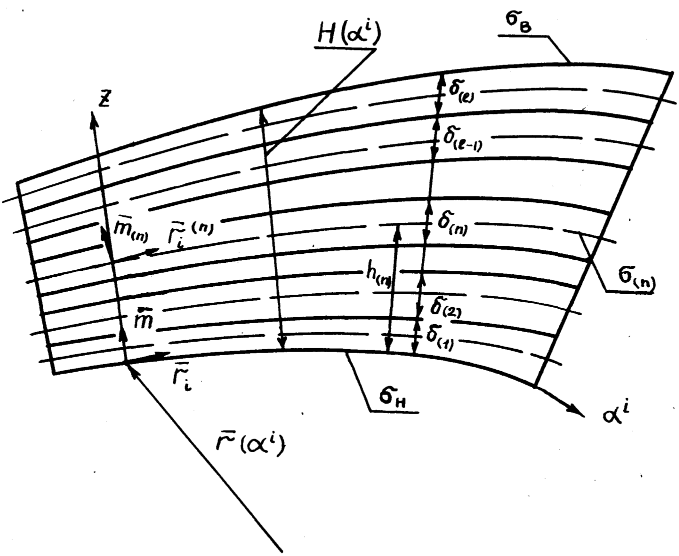

Рис.I.

Будем считать, что рассматриваемое тело представляет собой или многослойную среду, состоящую из ℓ слоев, ограниченных поверхностями

$$z = h_{(n)}(\alpha^i) - \delta_{(n)}(\alpha^i), \quad z = h_{(n)}(\alpha^i) + \delta_{(n)}(\alpha^i),$$

или однородную среду, разделенную на интервале $[0, H(\alpha^i)]$ на ℓ слоев.

Радиус-векторы срединных поверхностей $\mathcal{G}_{(n)}$ этих слоев будут равны

$$\bar{r}_{(n)} = \bar{r}(\alpha^i) + h_{(n)}\bar{m} \qquad (n = \overline{1,\ell}). \tag{2}$$

Из (2), в соответствии с методикой [7], можно найти базисные векторы $\bar{r}_i^{(n)}$, векторы единичной нормали $\bar{m}_{(n)}$ к $\mathcal{G}_{(n)}$ и компоненты первого $a_{ik}^{(n)}$ и второго $b_{ik}^{(n)}$ метрических тензоров поверхностей $\mathcal{G}_{(n)}$ $(n = \overline{1,\ell})$

$$\bar{r}_i^{(n)} = (\delta_i^k + \theta_i^{k(n)})\bar{r}_k + y_i^{(n)}\bar{m}, \quad \bar{m}_{(n)} = \sqrt{\frac{a}{a_{(n)}}}(\Pi_i^{(n)}\bar{r}^i + \Pi_3^{(n)}\bar{m}), \tag{3}$$

$$a_{ik}^{(n)} = \bar{r}_i^{(n)}\bar{r}_k^{(n)} = a_{ik} + 2d_{ik}^{(n)}, \quad b_{ik}^{(n)} = -\sqrt{\frac{a}{a_{(n)}}}\Big[(\nabla_k\Pi_i^{(n)} - b_{ik}\Pi_3^{(n)}) +$$
$$+\theta_i^{s(n)}(\nabla_k\Pi_s^{(n)} - \Pi_3^{(n)}b_{sk}) + y_i^{(n)}(\nabla_k\Pi_3^{(n)} + \Pi_s^{(n)}b_k^s)\Big], \tag{4}$$

где $\bar{r}_i, \bar{r}^i, \bar{m}$ – базисные векторы, а $a_{ik} = \bar{r}_i\bar{r}_k$, b_{ik} – метрические тензоры на $\mathcal{G}_H$, ∇_i – символ ковариантного дифференцирования в метрике a_{ik}, $a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ –фундаментальный определитель тензора a_{ik}. Остальные величины, входящие в (3) и (4), определяются по формулам

$$\theta_i^{k(n)} = h_{(n)}b_i^k, \quad y_i^{(n)} = \frac{\partial h_{(n)}}{\partial\alpha^i} = \nabla_i h_{(n)}, \quad \theta_{ik}^{(n)} = -h_{(n)}b_{ik},$$

$$2d_{ik}^{(n)} = \theta_{ik}^{(n)} + \theta_{ki}^{(n)} + \theta_i^{m(n)}\theta_{km}^{(n)} + y_i^{(n)}y_k^{(n)},$$

$$\Pi_i^{(n)} = y_k^{(n)}\theta_i^{k(n)} - y_i^{(n)}(1 + \theta_1^{1(n)} + \theta_2^{2(n)}), \tag{5}$$

$$\Pi_3^{(n)} = (1+\theta_1^{1(n)})(1+\theta_2^{2(n)}) - \theta_2^{1(n)}\theta_1^{2(n)}, \quad a_{(n)} = a_{11}^{(n)}a_{22}^{(n)} - (a_{12}^{(n)})^2.$$

Заметим, что уравнения (2) представляют собой отображение поверхностей $\mathcal{G}_{(n)}$ на $\mathcal{G}_H$, осуществляющееся как процесс фиктивной деформации $\mathcal{G}_{(n)}$ с вектором перемещения $h_{(n)}\bar{m}$.

Выведенные формулы для рассматриваемого класса объектов допускают весьма существенные упрощения. Во-первых, в силу принятого предположения $z b_i^k \sim \varepsilon \ (0 \le z \le H)$, для $\theta_{ik}^{(n)}$ и $\theta_i^{k(n)}$ имеют место оценки

$$\theta_i^{k(n)} \sim \theta_{ik}^{(n)} \sim \varepsilon. \tag{6}$$

Полагаем, что изменение толщин слоев $2\delta_{(n)}$ таково, что

$$y_i^{(n)} = \nabla_i h_{(n)} \sim \varepsilon. \tag{7}$$

В силу этого, а так же оценок (6), из формул (5) следует, что для компонент тензора фиктивной деформации $2d_{ik}^{(n)}$ и величин $\Pi_i^{(n)}$, $\Pi_3^{(n)}$ справедливы формулы

$$2d_{ik}^{(n)} \sim \varepsilon, \quad \Pi_i^{(n)} \sim \varepsilon, \quad \Pi_3^{(n)} \approx 1. \tag{8}$$

Таким образом, для рассматриваемого класса конструкций с точностью I + $\varepsilon \approx$ I можно положить

$$a_{ik}^{(n)} \approx a_{ik}, \quad b_{ik}^{(n)} \approx b_{ik}, \quad b_i^{k(n)} \approx b_i^k, \tag{9}$$

а базисные векторы $\bar{r}_i^{(n)}$ и $\bar{m}_{(n)}$, в силу $a_{(n)} \approx a$, вычислить по формулам

$$\bar{r}_i^{(n)} = \bar{r}_i + y_i^{(n)} \bar{m}, \quad \bar{m}_{(n)} = \bar{m} + \Pi_i^{(n)} \bar{r}^i. \tag{I0}$$

2. Для сведения трехмерной задачи теории упругости к системе двумерных уравнений в каждом слое оболочки примем линейную аппроксимацию вектора перемещений в направлении z

$$\bar{V}_{(n)}^{z} = \bar{\overset{\circ}{v}}_{(n)} + z_{(n)} \bar{\gamma}_{(n)} = (\overset{\circ}{u}_i^{(n)} + z_{(n)} \gamma_i^{(n)}) \bar{r}^i + (\overset{\circ}{w}^{(n)} + z_{(n)} \gamma_{(n)}) \bar{m}, \tag{II}$$

где $\overset{\circ}{u}_i^{(n)}$, $\overset{\circ}{w}^{(n)}$ перемещения точек срединных поверхностей слоев $\sigma_{(n)}$. Выражение (II) соответствует применению гипотезы прямой линии с учетом поперечного обжатия. При произвольных перемещениях разложению (II) с точностью $\delta_i^k - z b_i^k \approx \delta_i^k$, $a_{ik}^{(n)} \approx a_{ik}$ соответствуют следующие компоненты деформации [8]

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{ik}^{z(n)} = \varepsilon_{ik}^{(n)} + z_{(n)} \varkappa_{ik}^{(n)}, \\ &2\varepsilon_{i3}^{z(n)} = 2\varepsilon_{i3}^{(n)} = \omega_i^{(n)}(1+\gamma_{(n)}) + \gamma_{(n)}^{k} (\delta_{ik} + e_{ik}^{(n)}), \\ &2\varepsilon_{33}^{z(n)} = 2\varepsilon_3^{(n)} = \gamma_i^{(n)} \gamma_{(n)}^{i} + 2\gamma_{(n)} + (\gamma_{(n)})^2, \end{aligned} \tag{I2}$$

где

$$2\varepsilon_{ik}^{(n)} = e_{ik}^{(n)} + e_{ki}^{(n)} + e_{is}^{(n)} e_{k}^{s(n)} + \omega_i^{(n)} \omega_k^{(n)},$$

$$2\varkappa_{ik}^{(n)} = E_{ik}^{(n)} + E_{ki}^{(n)} + a^{js}(e_{ij}^{(n)} E_{ks}^{(n)} - e_{ks}^{(n)} E_{ij}^{(n)}) +$$

$$+ \omega_i^{(n)} \Omega_k^{(n)} + \omega_k^{(n)} \Omega_i^{(n)}, \tag{13}$$

$$e_{ik}^{(n)} = \nabla_i \overset{\circ}{u}{}_k^{(n)} - b_{ik} \overset{\circ}{w}{}^{(n)}, \quad E_{ik}^{(n)} = \nabla_i \gamma_k^{(n)} - b_{ik} \gamma_{(n)},$$

$$\omega_i^{(n)} = \nabla_i \overset{\circ}{w}{}^{(n)} + b_i^k u_k^{(n)}, \quad \Omega_i^{(n)} = \nabla_i \gamma_{(n)} + b_i^k \gamma_k^{(n)}.$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая среднего изгиба оболочки, когда для компонент тензора поворотов и функций $\gamma_i^{(n)}$, $\gamma_{(n)}$ имеют место оценки [8]

$$e_{ik}^{(n)} \sim \varepsilon, \quad \omega_i^{(n)} \sim \gamma_i^{(n)} \sim \sqrt{\varepsilon}, \quad \gamma_{(n)} \sim \varepsilon. \tag{14}$$

При этом , как показано в [4] , компоненты тензора деформаций определяются формулами

$$2\varepsilon_{ik}^{(n)} = e_{ik}^{(n)} + e_{ki}^{(n)} + \omega_i^{(n)} \omega_k^{(n)}, \quad 2\varkappa_{ik}^{(n)} = E_{ik}^{(n)} + E_{ki}^{(n)},$$

$$2\varepsilon_{i3}^{(n)} = \omega_i^{(n)} + \gamma_i^{(n)}, \qquad 2\varepsilon_3^{(n)} = 2\gamma_{(n)} + \gamma_i^{(n)} \gamma_{(n)}^i \tag{15}$$

соответствующими малой изменяемости функции $\gamma_{(n)}$, когда $\nabla_i \gamma_{(n)} \sim \varepsilon$ и $\Omega_i^{(n)} \sim \varepsilon$.

В соответствии с подходом [3] векторы перемещений (11) на поверхностях контакта слоев должны быть подчинены условиям сопряжения по перемещениям

$$\bar{V}_{(n)}^{z}(z_{(n)} = \delta_{(n)}) = \bar{V}_{(n)}^{z}(z_{(n+1)} = -\delta_{(n+1)}), \tag{16}$$

использование которых приводит к удержанию для описания механики деформирования многослойного пакета $3(\ell+1)$ искомых функций. Наиболее алгоритмичная структура разрешающих уравнений при этом достигается за счет выбора в качестве неизвестных задачи компонент перемещений лицевых поверхностей $z = 0$, $z = H$ и поверхностей контакта слоев. Через эти функции $u_i^{(n)}$, $w^{(n)}(n =$

$=\overline{1,\ \ell+1}$) компоненты векторов $\overset{\circ}{\bar{v}}_{(n)}$ и $\bar{\gamma}_{(n)}$ выражаются по формулам

$$\overset{\circ}{u}{}_i^{(n)}=\frac{1}{2}\left(u_i^{(n)}+u_i^{(n+1)}\right),\quad \overset{\circ}{w}{}^{(n)}=\frac{1}{2}\left(w^{(n)}+w^{(n+1)}\right),$$

$$\gamma_i^{(n)}=(2\delta_{(n)})^{-1}\left(u_i^{(n+1)}-u_i^{(n)}\right),\ \gamma_{(n)}=(2\delta_{(n)})^{-1}\left(w^{(n+1)}-w^{(n)}\right),\quad (n=\overline{1,\ell}). \tag{17}$$

Как отмечено в [4] , такой выбор искомых функций позволяет получить ленточную трехдиагональную матрицу дифференциаль - ных операторов любой краевой задачи, сформулированной на основе предлагаемых соотношений.

Выражения для компонент тензора поворотов (13) с учетом (17) примут следующий вид

$$\begin{aligned}
e_{ik}^{(n)}&=\frac{1}{2}\left[\nabla_i\left(u_k^{(n)}+u_k^{(n+1)}\right)-b_{ik}\left(w^{(n)}+w^{(n+1)}\right)\right],\\
\omega_i^{(n)}&=\frac{1}{2}\left[\nabla_i\left(w^{(n)}+w^{(n+1)}\right)+b_i^k\left(u_k^{(n)}+u_k^{(n+1)}\right)\right],\\
E_{ik}^{(n)}&=\left(u_k^{(n+1)}-u_k^{(n)}\right)\nabla_i(2\delta_{(n)})^{-1}+(2\delta_{(n)})^{-1}\left[\nabla_i\left(u_k^{(n+1)}-u_k^{(n)}\right)-\right.\\
&\left.-b_{ik}\left(w^{(n+1)}-w^{(n)}\right)\right],\\
\Omega_i^{(n)}&=\left(w^{(n+1)}-w^{(n)}\right)\nabla_i(2\delta_{(n)})^{-1}+(2\delta_{(n)})^{-1}\left[\nabla_i\left(w^{(n+1)}-w^{(n)}\right)+\right.\\
&\left.+b_i^k\left(u_k^{(n+1)}-u_k^{(n)}\right)\right],
\end{aligned} \tag{18}$$

а подстановка (17) в формулу для $\varepsilon_3^{(n)}$ из (15) приводит к ра - венству

$$2\varepsilon_3^{(n)}=\delta_{(n)}^{-1}\left(w^{(n+1)}-w^{(n)}\right)+a^{ik}(2\delta_{(n)})^2\left(u_i^{(n+1)}-u_i^{(n)}\right)\left(u_k^{(n+1)}-u_k^{(n)}\right), \tag{19}$$

откуда усматривается возможность пренебрежения вторым слагае - мым по сравнению с первым и линеаризации выражения для $\varepsilon_3^{(n)}$

$$2\varepsilon_3^{(n)}=\delta_{(n)}^{-1}\left(w^{(n+1)}-w^{(n)}\right). \tag{20}$$

Таким образом, как видно из (18), при среднем изгибе оболочек рассматриваемого класса члены, учитывающие переменность толщин слоев в кинематических соотношениях, входят лишь в формулы для $E_{ik}^{(n)}$ и $\Omega_i^{(n)}$.

3. Для получения уравнений равновесия и статических граничных условий обратимся к вариационному принципу Лагранжа, для чего запишем вариацию потенциальной энергии деформации оболочки

$$\delta U=\sum_{n=1}^{\ell}\iint_{\sigma}\int_{-\delta_{(n)}}^{\delta_{(n)}}(\sigma_{(n)}^{ik}\delta\varepsilon_{ik}^{z(n)}+2\sigma_{(n)}^{i3}\delta\varepsilon_{i3}^{(n)}+\sigma_{(n)}^{33}\delta\varepsilon_{3}^{(n)})dz_{(n)}d\sigma= \tag{21}$$

$$=\iint_{\sigma}\Big[\sum_{n=1}^{\ell+1}(S_{(n)}^{ik}\nabla_i\delta u_k^{(n)}+S_{(n)}^{i}\nabla_i\delta w^{(n)}+A_{(n)}^{k}\delta u_k^{(n)}+A_{(n)}^{3}\delta w^{(n)})\Big]d\sigma,$$

где

$$S_{(n)}^{ik}=\Delta_{(n)}^{1}\left(\frac{1}{2}T_{(n)}^{ik}-\varphi_{(n)}M_{(n)}^{ik}\right)+\Delta_{(n)}^{2}\left(\frac{1}{2}T_{(n-1)}^{ik}+\varphi_{(n-1)}M_{(n-1)}^{ik}\right),$$

$$S_{(n)}^{i}=\Delta_{(n)}^{1}N_{(n)}^{i}/2+\Delta_{(n)}^{2}N_{(n-1)}^{i}/2,$$

$$A_{(n)}^{k}=\Delta_{(n)}^{1}\left(\frac{1}{2}b_i^{k}N_{(n)}^{i}-\varphi_i^{(n)}M_{(n)}^{ik}-\varphi_{(n)}T_{(n)}^{k3}\right)+\Delta_{(n)}^{2}\Big(\frac{1}{2}b_i^{k}N_{(n-1)}^{i}+ \tag{22}$$

$$+\varphi_i^{(n-1)}M_{(n-1)}^{ik}+\varphi_{(n-1)}T_{(n-1)}^{k3}\Big),$$

$$A_{(n)}^{3}=\Delta_{(n)}^{1}\left(-\frac{1}{2}b_{ik}T_{(n)}^{ik}+b_{ik}\varphi_{(n)}M_{(n)}^{ik}-\varphi_{(n)}T_{(n)}^{33}\right)+$$

$$+\Delta_{(n)}^{2}\left(-\frac{1}{2}b_{ik}T_{(n-1)}^{ik}-b_{ik}\varphi_{(n-1)}M_{(n-1)}^{ik}+\varphi_{(n-1)}T_{(n-1)}^{33}\right).$$

Здесь, с целью единообразной записи $S_{(n)}^{ik}$, $S_{(n)}^{i}$, $A_{(n)}^{k}$, $A_{(n)}^{3}$, введены следующие целочисленные коэффициенты

$$\Delta_{(1)}^{1}=1,\ \Delta_{(1)}^{2}=0,\ \Delta_{(n)}^{1}=\Delta_{(n)}^{2}=1\quad(n=\overline{2,\ell}),\ \Delta_{(\ell+1)}^{1}=0,\ \Delta_{(\ell+1)}^{2}=1,$$

а также приняты обозначения

$$N_{(n)}^{i}=T_{(n)}^{i3}+\omega_k^{(n)}T_{(n)}^{ik},\quad T_{(n)}^{ik}=\int_{-\delta_{(n)}}^{\delta_{(n)}}\sigma_{(n)}^{ik}dz_{(n)},$$

$$M_{(n)}^{ik}=\int_{-\delta_{(n)}}^{\delta_{(n)}}\sigma_{(n)}^{ik}z_{(n)}dz_{(n)},\quad T_{(n)}^{i3}=\int_{-\delta_{(n)}}^{\delta_{(n)}}\sigma_{(n)}^{i3}dz_{(n)},$$

$$T_{(n)}^{33}=\int_{-\delta_{(n)}}^{\delta_{(n)}}\sigma_{(n)}^{33}dz_{(n)},\quad \varphi_{(n)}=(2\delta_{(n)})^{-1},\quad \varphi_i^{(n)}=\frac{\partial\varphi_{(n)}}{\partial\alpha^i}.$$

Члены, содержащие ковариантные производные от вариаций перемещений в (2I), интегрируем по частям с использованием формулы Грина

$$\iint\limits_{G} \nabla_i f^i \, d\sigma = \oint\limits_{\Gamma} f^i \nu_i \, ds,$$

где ν_i – компоненты вектора внешней нормали к контуру оболочки ($\bar{\nu} = \nu_i \bar{r}^i$). В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \delta U = \iint\limits_{G} \Big[\sum_{n=1}^{\ell+1} \big(R^{\kappa}_{(n)} \delta u^{(n)}_{\kappa} + R^{3}_{(n)} \delta w^{(n)} \big) \Big] d\sigma + \\ + \oint\limits_{\Gamma} \Big[\sum_{n=1}^{\ell+1} \big(S^{(n)}_{\nu\nu} \delta u^{(n)}_{\nu} + S^{(n)}_{\nu\tau} \delta u^{(n)}_{\tau} + S^{(n)}_{\nu} \delta w^{(n)} \big) \Big] ds, \end{aligned} \qquad (23)$$

где

$$R^{\kappa}_{(n)} = A^{\kappa}_{(n)} - \nabla_i S^{i\kappa}_{(n)}, \quad R^{3}_{(n)} = A^{3}_{(n)} - \nabla_i S^{i}_{(n)},$$

$$S^{(n)}_{\nu\nu} = S^{i\kappa}_{(n)} \nu_i \nu_\kappa, \quad S^{(n)}_{\nu\tau} = S^{i\kappa}_{(n)} \nu_i \tau_\kappa, \quad S^{(n)}_{\nu} = S^{i}_{(n)} \nu_i \;;$$

$u^{(n)}_{\nu}$, $u^{(n)}_{\tau}$ – тангенциальные компоненты вектора перемещений на контуре Γ оболочки в единичном базисе $[\bar{\nu}, \bar{\tau}, \bar{m}]$.

Следует подчеркнуть, что полученное выражение (23) по виду полностью совпадает с аналогичным выражением для оболочек со слоями постоянной толщины [4], поскольку подстановка в $R^{\kappa}_{(n)} = A^{\kappa}_{(n)} - \nabla_i S^{i\kappa}_{(n)}$ формул для $A^{\kappa}_{(n)}$ и $S^{i\kappa}_{(n)}$ из (22) приводит к тому, что члены с сомножителями $\varphi^{(n)}_i$ взаимно уничтожаются.

Пусть оболочка находится под действием поверхностной нагрузки $\bar{P}_H$ и $\bar{P}_B$, приложенной к лицевым поверхностям, а так же объемной $\bar{F}_{(n)}$ и контурной $\bar{q}_{(n)}$ нагрузок. Приводя их к срединным поверхностям слоев оболочки, получаем

$$\bar{X}_{(1)} = \bar{P}_H + \int_{-\delta_{(1)}}^{\delta_{(1)}} \bar{F}_{(1)} \, dz_{(1)}, \quad \bar{M}_{(1)} = \bar{P}_H \delta_{(1)} + \int_{-\delta_{(1)}}^{\delta_{(1)}} \bar{F}_{(1)} z_{(1)} \, dz_{(1)},$$

$$\bar{X}_{(n)} = \int_{-\delta_{(n)}}^{\delta_{(n)}} \bar{F}_{(n)} \, dz_{(n)}, \quad \bar{M}_{(n)} = \int_{-\delta_{(n)}}^{\delta_{(n)}} \bar{F}_{(n)} z_{(n)} \, dz_{(n)} \quad (\overline{n = 2, \ell+1}),$$

$$\bar{X}_{(\ell)} = \bar{P}_B + \int_{-\delta_{(\ell)}}^{\delta_{(\ell)}} \bar{F}_{(\ell)} \, dz_{(\ell)}, \quad \bar{M}_{(\ell)} = \bar{P}_B \delta_{(\ell)} + \int_{-\delta_{(\ell)}}^{\delta_{(\ell)}} \bar{F}_{(\ell)} z_{(\ell)} \, dz_{(\ell)},$$

$$\bar{K}_{(n)}=\int_{-\delta_{(n)}}^{\delta_{(n)}}\bar{q}_{(n)}\,dz_{(n)},\quad \bar{L}_{(n)}=\int_{-\delta_{(n)}}^{\delta_{(n)}}\bar{q}_{(n)}z_{(n)}\,dz_{(n)}\qquad (n=\overline{1,\ell}).$$

Разложим поверхностные векторы по базису $[\bar{r}_K\ ,\bar{m}]$,а контурные - по базису $[\bar{\nu}\ ,\bar{\tau},\bar{m}]$

$$\begin{aligned}&\bar{X}_{(n)}=X^K_{(n)}\bar{r}_K+X^3_{(n)}\bar{m},\quad \bar{M}_{(n)}=M^K_{(n)}\bar{r}_K+M^3_{(n)}\bar{m},\\&\bar{K}_{(n)}=K^{(n)}_{\nu}\bar{\nu}+K^{(n)}_{\tau}\bar{\tau}+K^{(n)}_{m}\bar{m},\ \bar{L}_{(n)}=L^{(n)}_{\nu}\bar{\nu}+L^{(n)}_{\tau}\bar{\tau}+L^{(n)}_{m}\bar{m}.\end{aligned}\tag{24}$$

Тогда вариация работы внешних сил, действующих на оболочку,будет равна

$$\begin{aligned}\delta A=&\iint_{\sigma}\Big[\sum_{n=1}^{\ell+1}\big(Y^K_{(n)}\delta u_K^{(n)}+Y^3_{(n)}\delta w^{(n)}\big)\Big]d\sigma+\\&+\oint_{\Gamma}\Big[\sum_{n=1}^{\ell+1}\big(G^{(n)}_{\nu}\delta u^{(n)}_{\nu}+G^{(n)}_{\tau}\delta u^{(n)}_{\tau}+G^{(n)}_{m}\delta w^{(n)}\big)\Big]ds,\end{aligned}\tag{25}$$

где

$$Y^K_{(n)}=\Delta^1_{(n)}\Big(\frac{1}{2}X^K_{(n)}-\varphi_{(n)}M^K_{(n)}\Big)+\Delta^2_{(n)}\Big(\frac{1}{2}X^K_{(n-1)}+\varphi_{(n-1)}M^K_{(n-1)}\Big),$$

$$Y^3_{(n)}=\Delta^1_{(n)}\Big(\frac{1}{2}X^3_{(n)}-\varphi_{(n)}M^3_{(n)}\Big)+\Delta^2_{(n)}\Big(\frac{1}{2}X^3_{(n-1)}+\varphi_{(n-1)}M^3_{(n-1)}\Big),$$

$$G^{(n)}_{\nu}=\Delta^1_{(n)}\Big(\frac{1}{2}K^{(n)}_{\nu}-\varphi_{(n)}L^{(n)}_{\nu}\Big)+\Delta^2_{(n)}\Big(\frac{1}{2}K^{(n-1)}_{\nu}+\varphi_{(n-1)}L^{(n-1)}_{\nu}\Big),$$

$$G^{(n)}_{\tau}=\Delta^1_{(n)}\Big(\frac{1}{2}K^{(n)}_{\tau}-\varphi_{(n)}L^{(n)}_{\tau}\Big)+\Delta^2_{(n)}\Big(\frac{1}{2}K^{(n-1)}_{\tau}+\varphi_{(n-1)}L^{(n-1)}_{\tau}\Big),$$

$$G^{(n)}_{m}=\Delta^1_{(n)}\Big(\frac{1}{2}K^{(n)}_{m}-\varphi_{(n)}L^{(n)}_{m}\Big)+\Delta^2_{(n)}\Big(\frac{1}{2}K^{(n-1)}_{m}+\varphi_{(n-1)}L^{(n-1)}_{m}\Big).$$

Внося теперь найденные вариации δU и δA в вариационное уравнение Лагранжа $\delta U-\delta A=0$, получаем систему 3(ℓ +I) дифференциальных уравнений равновесия многослойной оболочки с общим порядком 6(ℓ +I)

$$\begin{gathered}R^K_{(n)}-Y^K_{(n)}=0,\qquad R^3_{(n)}-Y^3_{(n)}=0\\(K=1,2\ ,\ n=\overline{1,\ell+1}),\end{gathered}\tag{26}$$

а также граничные условия на контуре

$$
\begin{aligned}
&S_{\nu\nu}^{(n)} - G_{\nu}^{(n)} = 0 \quad \text{при} \quad \delta u_{\nu}^{(n)} \neq 0, \\
&S_{\nu\tau}^{(n)} - G_{\tau}^{(n)} = 0 \quad \text{при} \quad \delta u_{\tau}^{(n)} \neq 0, \\
&S_{\nu}^{(n)} - G_{m}^{(n)} = 0 \quad \text{при} \quad \delta w^{(n)} \neq 0.
\end{aligned} \tag{27}
$$

4. Выведенные соотношения, как следует из анализа принятых предположений относительно функций H и $h_{(n)}$, применимы для расчета многослойных оболочек с малой изменяемостью толщин слоев, а также для решения трехмерных задач теории упругости в неканонических областях указанного класса, незначительно отличающихся от канонических, ограниченных поверхностями S, G_H, и $H = const$. С целью расширения класса трехмерных задач теории упругости в неканонических областях, решаемых на основе изложенного подхода, представляется целесообразным уточнение полученных уравнений за счет учета изменения метрики пространства Ω в направлении z и взаимного наклона слоев.

Литература

1. Болотин В.В. К теории слоистых плит. – Изв. АН СССР.ОТН.Механика и машиностроение, 1963, № 3.

2. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М., "Машиностроение", 1980.

3. Grigoliouk E.I., Chulkov P.P. On the theory of multilayer shells. Contribution to the theory of aircraft structures. Delft. University Press, 1972.

4. Паймушин В.Н., Демидов В.Г. Об одном варианте соотношений среднего изгиба многослойных оболочек сложной геометрии. – Сб.: Статика и динамика оболочек. Труды семинара, вып.12, Казан.физ.-техн.ин-т КФАН СССР. Казань, 1979.

5. Корнеев В.Г., Розин Л.А. Дифференциальная форма метода конечных элементов применительно к задачам теории упругости. – Сб.: Успехи механики деформируемых сред. М., "Наука", 1975.

6. Буяков И.А. Нелинейные уравнения теории ти-

па Тимошенко многослойных анизотропных оболочек.–Механика композитных материалов, 1979, № 3.

7. Паймушин В. Н. Соотношения теории тонких оболочек типа Тимошенко в криволинейных координатах поверхности отсчета. – "Прикладная математика и механика", 1978, 42, № 4.

8. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. Научный ред.К.З.Галимов. Казань, Изд-во Казан.ун-та, 1977.

ВЫРАЖЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ДЕФОРМАЦИИ УТОЧНЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

А.М. Зайнашев

Основные разрешающие уравнения уточненной нелинейной теории пологих оболочек [1] сложные. При рассмотрении частных задач в некоторых случаях может оказаться предпочтительным использование энергетического метода, чем решение этих уравнений приближенными методами. Определим здесь уточненное выражение потенциальной энергии деформации.

Потенциальная энергия деформации произвольного тела, следующего закону Гука, представляется в виде [2]

$$V=\frac{1}{2}\iiint\limits_V\left(\sigma_{11}^z\varepsilon_{11}^z+\sigma_{22}^z\varepsilon_{22}^z+\sigma_{33}^z\varepsilon_{33}^z+\tau_{12}^z\gamma_{12}^z+\tau_{13}^z\gamma_{13}^z+\tau_{23}^z\gamma_{23}^z\right)dV, \quad (1)$$

где $\sigma_{11}^z, \sigma_{22}^z$, σ_{33}^z и ε_{11}^z, ε_{22}^z, ε_{33}^z – нормальные напряжения, действующие на элемент на уровне z и соответствующие им относительные удлинения; $\tau_{12}^z, \tau_{13}^z, \tau_{23}^z$ и $\gamma_{12}^z, \gamma_{13}^z, \gamma_{23}^z$ – касательные напряжения на том же уровне и соответствующие им деформации сдвига; dV – объем выделенного элемента.

Следуя гипотезе прямых нормалей, принимая $\gamma_{13}^z=\gamma_{23}^z=0$, в декартовой прямоугольной системе координат имеем

$$V=\frac{1}{2}\iint\limits_S\left[\int_{w-h_z/2}^{w+h_z/2}\left(\sigma_{11}^z\varepsilon_{11}^z+\sigma_{22}^z\varepsilon_{22}^z+\tau_{12}^z\gamma_{12}^z\right)dz\right]dx\,dy. \quad (2)$$