



Общероссийский математический портал

П. Н. Брусов, Т. В. Филатова, Инвестиционные модели с равномерным погашением долга и их применение,
Совр. матем. и ее приложения, 2015, том 95, 26–31

<https://www.mathnet.ru/cma3>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

12 мая 2025 г., 21:01:36



ИНВЕСТИЦИОННЫЕ МОДЕЛИ С РАВНОМЕРНЫМ ПОГАШЕНИЕМ ДОЛГА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

© 2015 г. П. Н. БРУСОВ, Т. В. ФИЛАТОВА

Аннотация. Предложены новые инвестиционные модели с равномерным погашением долга в течение срока проекта, достаточно адекватно описывающие реальные инвестиционные проекты. В рамках данных моделей можно, в частности, анализировать зависимость эффективности инвестиционных проектов от заемного финансирования и налогообложения. Рассмотрение ведется как в рамках современной теории стоимости и структуры капитала, предложенной П. Н. Брусовым, Т. В. Филатовой и Н. П. Ореховой, так и в перпетуитетном пределе.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Исходные предположения	26
2. Эффективность проекта для владельцев собственного капитала	28
3. Эффективность проекта для владельцев собственного и заемного капитала	29
4. Пример применения полученных формул	29
Список литературы	30

1. ИСХОДНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Ранее нами были созданы инвестиционные модели с погашением долга в конце срока проекта, хорошо зарекомендовавшие себя при анализе эффективности реальных инвестиционных проектов (см. [18]). На практике, однако, более распространена схема равномерного погашения долга в течение срока проекта, рассмотрению которой и посвящена данная статья.

Эффективность инвестиционного проекта рассматривается с двух точек зрения: владельцев собственного и заемного капитала и владельцев только собственного капитала. В первом случае проценты и долг, выплачиваемые владельцами собственного капитала (отрицательные потоки), возвращаются в проект, поскольку они в точности равны потокам (положительным), получаемым владельцами заемного капитала. Единственный эффект от заемного капитала в этом случае – эффект налогового щита, получаемого за счет налоговых льгот: проценты по кредиту целиком (как на Западе, или в России до определенного предела), либо частично (как в России при превышении определенного предела), относятся на себестоимость и, тем самым, уменьшают налогооблагаемую базу.

Погашение основного долга происходит равномерно (равными частями) в конце каждого периода, а остаток долга на конец периода представляет собой арифметическую прогрессию с разностью $-D/n$:

$$\left\{ D, D - \frac{D}{n}, D - \frac{2D}{n}, \dots, \frac{D}{n} \right\} = \left\{ D, D \left(\frac{n-1}{n} \right), D \left(\frac{n-2}{n} \right), \dots, \frac{D}{n} \right\}. \quad (1)$$

Проценты представляют собой последовательность

$$\left\{ k_d D, k_d D \left(\frac{n-1}{n} \right), k_d D \left(\frac{n-2}{n} \right), \dots, k_d \frac{D}{n} \right\}. \quad (2)$$

Посленалоговый поток капитала за каждый период в случае рассмотрения с точки зрения владельцев собственного и заемного капитала равен

$$NOI(1 - t) + k_d D_i t, \quad (3)$$

где

$$D_i = D \frac{n - (i - 1)}{n}, \quad (4)$$

а инвестиции в момент времени $T = 0$ равны $-I = -S - D$. Здесь NOI — чистый операционный доход (до выплаты налогов).

Во втором случае (с точки зрения владельцев только собственного капитала) инвестиции в начальный момент времени $T = 0$ равны $-S$, а поток капитала за период (помимо налогового щита $k_d D_i t$ он включает выплату процентов за кредит $-k_d D_i$) равен

$$(NOI - k_d D_i)(1 - t) - \frac{D_i}{n}. \quad (5)$$

Полагаем, что проценты за кредит, как и сам кредит, выплачиваются долями $k_d D_i$ в течение всех i периодов.

Приведем в табл. 1 последовательность величин долга и процентов по кредиту.

ТАБЛИЦА 1

№ периода	1	2	3	...	n
Долг	D	$D \cdot \frac{n-1}{n}$	$D \cdot \frac{n-2}{n}$...	$D \cdot \frac{1}{n}$
проценты	$k_d D$	$k_d D \cdot \frac{n-1}{n}$	$k_d D \cdot \frac{n-2}{n}$...	$k_d D \cdot \frac{1}{n}$

Мы будем рассматривать два различных способа дисконтирования.

1. Операционные и финансовые потоки не разделяются и оба дисконтируются по общей ставке (в качестве которой, очевидно, может быть выбрана средневзвешенная стоимость капитала WACC). Для перпетуитетных проектов для WACC будет использована формула Модильяни–Миллера (см. [20–22]), а для проектов конечной продолжительности мы будем использовать для WACC формулу Брусова–Филатовой–Ореховой (см. [1–15, 17–19]).
2. Операционные и финансовые потоки разделяются и дисконтируются по разным ставкам: операционные потоки по ставке, равной стоимости собственного капитала k_e , зависящей от леввериджа, а кредитные по ставке, равной стоимости заемного капитала k_d , которая вплоть до достаточно больших значений леввериджа остается постоянной и начинает расти лишь при достаточно высоких значениях леввериджа L , когда возникает опасность банкротства.

Отметим, что заемный капитал является наименее рискованным, поскольку проценты по кредитам выплачиваются после уплаты налогов в первую очередь. Поэтому и стоимость кредитов всегда будет меньше стоимости собственного капитала, будь то обыкновенные или привилегированные акции, $k_e > k_d$, $k_p > k_d$, где k_e , k_p — стоимости собственного капитала, связанного с обыкновенными и привилегированными акциями соответственно.

Можно показать, что приведенная величина выплачиваемых процентов вычисляется с использованием следующей формулы, полученной авторами:

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \frac{3}{a^3} + \dots + \frac{n}{a^n} = \frac{a(1 - a^{-n})}{(a - 1)^2} - \frac{n}{(a - 1)a^n}. \quad (6)$$

Мы будем использовать данную формулу в дальнейших расчетах.

2. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРОЕКТА ДЛЯ ВЛАДЕЛЬЦЕВ СОБСТВЕННОГО КАПИТАЛА

2.1. Разделение потоков. Для получения выражения для NPV необходимо просуммировать дисконтированные величины потоков за один период, даваемые формулами (3), либо (4) с использованием полученной нами формулы (5), в которой $a = 1 + i$, где i — ставка дисконтирования. Ее точная оценка и является одним из важнейших преимуществ теории Брусова—Филатовой—Ореховой (см. [1–15, 17–19]) над ее перпетуитным пределом — теорией Модильяни—Миллера (см. [20–22]).

В данном случае выражение для NPV имеет вид

$$\begin{aligned} NPV &= -S + \sum_{i=1}^n \frac{NOI(1-t)}{(1+k_e)^i} + \sum_{i=1}^n \frac{-k_d D \frac{n+1-i}{n} (1-t) - \frac{D}{n}}{(1+k_d)^i} = \\ &= -S + \frac{NOI(1-t)(1-(1+k_e)^{-n})}{k_e} - \left(\frac{D}{n} + k_d D \frac{n+1}{n} (1-t) \right) \frac{1-(1+k_d)^{-n}}{k_d} + \\ &\quad + k_d \frac{D}{n} (1-t) \left\{ \frac{(1+k_d)[1-(1+k_d)^{-n}]}{k_d^2} - \frac{n}{k_d(1+k_d)^n} \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

В перпетуитном пределе (назовем его пределом Модильяни—Миллера) имеем

$$NPV = -S + \frac{NOI(1-t)}{k_e} - D(1-t). \quad (8)$$

2.2. Без разделения потоков. В этом случае операционные и финансовые потоки не разделяются и оба дисконтируются по общей ставке (в качестве которой может быть выбрана средневзвешенная стоимость капитала $WACC$). При этом погашаемый в конце срока (в конце периода n) кредит можно дисконтировать либо по той же ставке $WACC$ (для сохранения единой ставки дисконтирования и полного неразделения операционных и финансовых потоков), либо, что логичнее, — дисконтировать его по ставке кредита k_d . Сейчас мы выбираем единую ставку и первый вариант.

По прежнему ведем рассмотрение с точки зрения владельцев только собственного капитала:

$$\begin{aligned} NPV &= -S + \sum_{i=1}^n \frac{NOI(1-t) - k_d D \frac{n+1-i}{n} (1-t) - \frac{D}{n}}{(1+WACC)^i} = \\ &= -S + \frac{NOI(1-t) - \frac{D}{n} - k_d D \frac{n+1}{n} (1-t)}{WACC} \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+WACC)^n} \right) + \\ &\quad + \frac{k_d D}{n} (1-t) \left\{ \frac{(1+WACC)[1-(1+WACC)^{-n}]}{WACC^2} - \frac{n}{WACC(1+WACC)^n} \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

В перпетуитном пределе Модильяни—Миллера имеем, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$,

$$NPV = -S + \frac{NOI(1-t) - k_d D(1-t)}{WACC}. \quad (10)$$

3. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРОЕКТА ДЛЯ ВЛАДЕЛЬЦЕВ СОБСТВЕННОГО И ЗАЕМНОГО КАПИТАЛА

3.1. С разделением потоков. В случае рассмотрения с точки зрения владельцев собственного и заемного капитала

$$\begin{aligned}
 NPV &= -I + \sum_{i=1}^n \frac{NOI(1-t)}{(1+k_e)^i} + \sum_{i=1}^n \frac{k_d D \frac{n+1-i}{n} t}{(1+k_d)^i} = \\
 &= -I + \frac{NOI(1-t)(1-(1+k_e)^{-n})}{k_e} + D \frac{n+1}{n} t \cdot [1-(1+k_d)^{-n}] - \\
 &\quad - k_d \frac{D}{n} t \left\{ \frac{(1+k_d)[1-(1+k_d)^{-n}]}{k_d^2} - \frac{n}{k_d(1+k_d)^n} \right\}. \quad (11)
 \end{aligned}$$

В перпетуитетном пределе (по-прежнему называем его пределом Модильяни—Миллера) имеем, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$,

$$NOI = -I + \frac{NOI(1-t)}{k_e} + Dt. \quad (12)$$

3.2. Без разделения потоков. Рассмотрение по-прежнему ведется с точки зрения владельцев собственного и заемного капитала:

$$\begin{aligned}
 NPV &= -I + \sum_{i=1}^n \frac{NOI(1-t) + k_d D \frac{n+1-i}{n} t}{(1+WACC)^i} = \\
 &= -I + \frac{NOI(1-t) + k_d D \frac{n+1}{n} t}{WACC} \left(1 - \frac{1}{(1+WACC)^n} \right) - \\
 &\quad - \frac{k_d D}{n} t \left\{ \frac{(1+WACC)[1-(1+WACC)^{-n}]}{WACC^2} - \frac{n}{WACC(1+WACC)^n} \right\}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

В перпетуитетном пределе Модильяни—Миллера, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, имеем

$$NPV = -I + \frac{NOI(1-t) + k_d Dt}{WACC}. \quad (14)$$

4. ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ ПОЛУЧЕННЫХ ФОРМУЛ

В качестве примера применения полученных формул рассмотрим зависимость NPV проекта от уровня левериджа при трех значениях ставки налога на прибыль в случае рассмотрения с точки зрения владельцев только собственного капитала без разделения операционных и финансовых потоков.

Используем формулу (9) и следующие значения параметров:

$$NOI = 800, \quad S = 500, \quad k_0 = 22\%, \quad k_d = 19\%, \quad T = 15\%, 20\%, 25\%.$$

Расчеты проводим в Excel, данные приведены на рис. 1.

Из проведенных расчетов и рис. 1 можно сделать следующие выводы.

1. С ростом ставки налога на прибыль NPV проекта убывает, и можно оценить, на сколько процентов, при росте ставки налога на прибыль, скажем, на 1%. Отметим, что возможность проведения таких оценок является уникальной.

2. Влияние налогообложения на NPV существенно зависит от уровня левериджа: с его ростом влияние изменения ставки налога на прибыль существенно уменьшается. Это касается как увеличения ставки налога на прибыль, так и ее уменьшения (если все же настанет время, когда желание облегчить налоговое бремя предпринимателей (инвесторов), заявленное в основных направлениях налоговой политики, когда-либо придет).

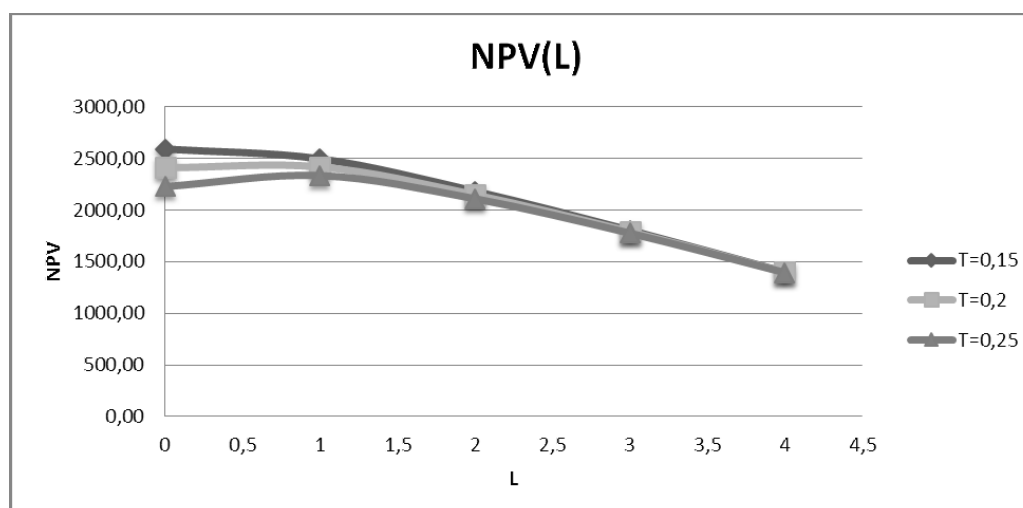


Рис. 1. Зависимость NPV проекта от уровня левериджа при трех значениях ставки налога на прибыль.

3. При существующей (20%) и более высокой (25%) ставке налога на прибыль существует оптимум в зависимости NPV от левериджа. Инвесторы должны учитывать структуру инвестируемого капитала: в этом случае они без особых усилий (только меняя эту структуру) могут получить (иногда очень существенный) выигрыш в NPV .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брусов П. Н., Филатова Т. В. Применение математических методов в финансовом менеджменте. — М.: Финуниверситет, 2010.
2. Брусов П. Н., Филатова Т. В. Общая теория стоимости и структуры капитала компании: выход за рамки теории Модильяни–Миллера // Вестн. Фин. академии. — 2011. — 2. — С. 32–36.
3. Брусов П. Н., Филатова Т. В. От Модильяни–Миллера к общей теории стоимости и структуры капитала компании // Финансы и кредит. — 2011. — 3 (435). — С. 2–8.
4. Брусов П. Н., Филатова Т. В. Стоимость и структура капитала компании в post Модильяни–Миллеровскую эпоху // Фин. аналитика: проблемы и решения. — 2011. — 37 (79), С. 2–12.
5. Брусов П. Н., Филатова Т. В. Финансовый менеджмент. — М.: Кнорус, 2013.
6. Брусов П. Н., Филатова Т. В., Долгов Д. М., Орехова Н. П., Брусов П. П., Брусова А. П. Аномальная зависимость стоимости собственного капитала компании от левериджа // Фин. аналитика: проблемы и решения. — 2012. — 26 (116). — С. 7–19.
7. Брусов П. Н., Филатова Т. В., Лазметкина Н. И. Инвестиционный менеджмент. — М.: Инфра-М, 2013.
8. Брусов П. Н., Филатова Т. В., Орехова Н. П. Современные корпоративные финансы и инвестиции. — М.: Кнорус, 2014.
9. Брусов П. Н., Филатова Т. В., Орехова Н. П. Отсутствие оптимальной структуры капитала в теории компромисса // Вестн. Фин. ун-та. — 2013. — 3. — С. 52–64.
10. Брусов П. Н., Филатова Т. В., Орехова Н. П. Существует ли оптимальная структура капитала в известной «теории компромисса»? // Финансы и кредит. — 2013. — 30 (558). — С. 20–43.
11. Брусов П. Н., Филатова Т. В., Орехова Н. П. Отсутствие оптимальной структуры капитала в модифицированной теории Модильяни–Миллера // Финансы и кредит. — 2014. — 11 (587). — С. 23–31.
12. Брусова А. П. Сравнение трех методов оценки средневзвешенной стоимости капитала компании и стоимости ее собственного капитала // Фин. аналитика: проблемы и решения. — 2011. — 34 (76). — С. 36–42.
13. Филатова Т. В., Орехова Н. П., Брусова А. П. Средневзвешенная стоимость капитала в теории Модильяни–Миллера, модифицированной для конечного времени жизни компании // Вестн. Фин. академии. — 2008. — 4. — С. 74–77.

14. *Brusov P. N., Filatova T. V., Orekhova N. P.* Mechanism of formation of the company optimal capital structure, different from suggested by trade off theory// *Cogent Econ. Finance.* — 2014. — 2, № 1. — 946150. — <http://dx.doi.org/10.1080/23322039.2014.946150>
15. *Brusov P., Filatova T., Orekhova N., Brusova N.* Weighted average cost of capital in the theory of Modigliani–Miller, modified for a finite life-time company// *Appl. Fin. Econ.* — 2011. — 21, № 11. — С. 815–824.
16. *Brusova N.* Influence of debt financing on the effectiveness of the investment project within Modigliani–Miller theory// *Res. J. Econ. Business ICT.* — 2011. — 2. — С. 11–15.
17. *Brusova N.* From Modigliani–Miller to general theory of capital cost and capital structure of the company// *Res. J. Econ. Business ICT.* — 2011. — 2. — С. 16–21.
18. *Brusov P. N., Filatova T. V., Eskindarov M. A., Orekhova N. P., Brusov P. P., Brusova A. P.* Influence of debt financing on the effectiveness of the finite duration investment project// *Appl. Fin. Econ.* — 2011. — 22, No. 13. — С. 1043–1052.
19. *Brusov P. N., Filatova T. V., Orekhova N. P.* Absence of an optimal capital structure in the famous tradeoff theory!// *J. Rev. Global Econ.* — 2013. — 2. — С. 94–116.
20. *Modigliani F., Miller M.* The cost of capital, corporate finance and the theory of investment// *Am. Econ. Review.* — 1958. — 48, № 4. — С. 261–297.
21. *Modigliani F., Miller M.* Corporate income taxes and the cost of capital: A correction// *Am. Econ. Rev.* — 1963. — 53, № 3. — С. 147–175.
22. *Modigliani F., Miller M.* Some estimates of the cost of capital to the electric utility industry, 1954–1957// *Am. Econ. Rev.* — 1966. — 56. — С. 333–391.

П. Н. Брусов

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации

E-mail: pnb1983@yahoo.com

Т. В. Филатова

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации

E-mail: mfilatova@fa.ru