

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Кириллов, В. Е. Корепин, Нормы связанных состояний, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1985, том 146, 20–30

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.172

17 января 2025 г., 21:23:30



НОРМЫ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

§ I. Введение.

В настоящей работе мы доказываем, что квадрат нормы волновой функции, описывающей связанные состояния, пропорционален некоторому якобиану (см. теорему I).

Квантовый метод обратной задачи [I] позволяет строить собственные функции гамильтонианов интегрируемых моделей с помощью алгебраического анзаца Бете. Введем некоторые обозначения. Рассмотрим случай, когда размерность матрицы монодромии $T(\lambda)$ есть 2×2 :

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} \quad (1)$$

Величины $A(\lambda), B(\lambda), C(\lambda), D(\lambda)$ это квантовые операторы, зависящие от спектрального параметра λ , их коммутационные соотношения задаются с помощью R -матрицы (размерности 4×4)

$$R(\lambda, \mu)(T(\lambda) \otimes I)(I \otimes T(\mu)) = (I \otimes T(\mu))(T(\lambda) \otimes I) R(\lambda, \mu). \quad (2)$$

Структура анзаца Бете одинакова, для R -матриц XXX и XXZ моделей Гейзенберга.

$$R(\lambda, \mu) = \left| \begin{array}{cc|cc} f(\mu, \lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & g(\mu, \lambda) & 0 \\ \hline 0 & g(\mu, \lambda) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(\mu, \lambda) \end{array} \right| \quad (3)$$

В XXZ случае

$$f(\lambda, \mu) = \frac{\text{sh}(\lambda - \mu + 2i\eta)}{\text{sh}(\lambda - \mu)}; \quad g(\lambda, \mu) = \frac{i \sin 2\eta}{\text{sh}(\lambda - \mu)} \quad (4)$$

В XXX случае

$$f(\lambda, \mu) = (\lambda - \mu + i\alpha) / (\lambda - \mu); \quad g(\lambda, \mu) = i\alpha / (\lambda - \mu) \quad (5)$$

Для определенности все формулы будем приводить в $\chi\chi Z$ случае. Важную роль играют также псевдовакуум $|0\rangle$ и дуальный псевдовакуум $\langle 0|$. Это векторы в квантовом пространстве со следующими свойствами:

$$C(\lambda)|0\rangle = 0; A(\lambda)|0\rangle = a(\lambda)|0\rangle; \mathcal{D}(\lambda)|0\rangle = d(\lambda)|0\rangle \quad (6)$$

$$\langle 0|B(\lambda) = 0; \langle 0|A(\lambda) = a(\lambda)\langle 0|; \langle 0|\mathcal{D}(\lambda) = d(\lambda)\langle 0|$$

Вакуумные собственные значения $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$ это комплекснозначные функции. Собственные функции следа матрицы монодромии $\tau(\lambda) = A(\lambda) + \mathcal{D}(\lambda)$ имеют вид

$$\Psi_N(\{\lambda\}) = B(\lambda_1) \dots B(\lambda_N) |0\rangle \quad (7)$$

$$\tilde{\Psi}_N(\{\lambda\}) = \langle 0| C(\lambda_1) \dots C(\lambda_N) \quad (8)$$

В случае, если параметры $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ удовлетворяют системе трансцендентных уравнений (СТУ)

$$\frac{a(\lambda_n)}{d(\lambda_n)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N \frac{f(\lambda_n, \lambda_j)}{f(\lambda_j, \lambda_n)} = 1 \quad (9)$$

Величины λ_j будем называть скоростями частиц. Перепишем СТУ в логарифмическом виде:

Для этого введем переменные φ_k

$$\varphi_k = i \ln \frac{a(\lambda_k)}{d(\lambda_k)} + i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \ln \frac{f(\lambda_k, \lambda_j)}{f(\lambda_j, \lambda_k)} \quad (10)$$

Теперь система (9) имеет вид:

$$\varphi_k \equiv 0 \pmod{2\pi} \quad (11)$$

В работе [2] были вычислены нормы собственных функций (7), (8):

$$\langle 0| \prod_{j=1}^N \frac{C(\lambda_j)}{a(\lambda_j)} \prod_{j=1}^N \frac{B(\lambda_j)}{d(\lambda_j)} |0\rangle = (\sin 2\eta)^N \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N f(\lambda_j, \lambda_k) \right\} \det_N \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda_j} \right) \quad (12)$$

Здесь положено $\langle 0|0\rangle = 1$. Якобиан имеет вид

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda_j} = \delta_{kj} (L(\lambda_k) + \sum_{\ell=1}^N \chi(\lambda_k, \lambda_\ell)) - \chi(\lambda_k, \lambda_j) \quad (13)$$

$$L(\lambda_k) = i \frac{d}{d\lambda_k} \ln \frac{a(\lambda_k)}{d(\lambda_k)}; \quad \chi(\lambda_k, \lambda_l) = i \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \ln \frac{f(\lambda_k, \lambda_l)}{f(\lambda_l, \lambda_k)} = \\ = \sin 4\eta / \operatorname{sh}(\lambda_k - \lambda_l + 2i\eta) \operatorname{sh}(\lambda_k - \lambda_l - 2i\eta). \quad (14)$$

Упомянем теперь конкретные модели, которые входят в рассматриваемый класс. Прежде всего это ХХЗ модель Гейзенберга [3]. Для нее

$$a(\lambda) = \operatorname{sh}^M(\lambda - i\eta), \quad d(\lambda) = \operatorname{sh}^M(\lambda + i\eta). \quad (15)$$

Здесь M число узлов решетки.

Другой пример — это решеточная модель синус-Гордон [4].

Для нее:

$$a(\lambda) = [1 + 2h \operatorname{ch}(2\lambda + 2i\eta)]^M, \quad d(\lambda) = [1 + 2h \operatorname{ch}(2\lambda - 2i\eta)]^M. \quad (16)$$

Здесь h — произвольный вещественный параметр. В обоих случаях $T(\lambda)$ удовлетворяет инволюции:

$$T^+(\bar{\lambda}) = \sigma_2 T(\lambda) \sigma_2 \implies B^+(\bar{\lambda}) = -C(\lambda). \quad (17)$$

Крест означает эрмитово сопряжение только квантовых операторов. Формула (17) означает, что в левой части (12) стоит квадрат нормы собственной функции в случае, если при комплексном сопряжении набор $\{\lambda_j\}$ переходит в себя

$$\{\lambda_j\} = \{\bar{\lambda}_j\} \quad (18)$$

Напомним, что $[C(\lambda), C(\mu)] = [B(\lambda), B(\mu)] = 0$. Отметим, что формула (12) играет центральную роль, при вычислении корреляционных функций [5], [6].

§ 2. Связанные состояния

В упомянутых выше моделях имеются связанные состояния.

Эквидистантные связанные состояния образуются в пределе, когда число узлов стремится к бесконечности, см. [7]. Число частиц, объединенных в одно связанное состояние, обозначим через ν . Набор разрешенных значений ν зависит от константы связи η . Полная классификация связанных состояний, которые иногда называют струнами, для ХХЗ модели Гейзенберга проведена в работе [7]. В связанном состоянии быстроты частиц располагаются следующим образом:

$$\lambda_\alpha^a = \lambda_\alpha + i\hbar(2a - \nu_\alpha - 1), \quad a=1, \dots, \nu_\alpha. \quad (19)$$

Величины λ_α называются быстрой частотой струн. Будем считать, что в струне с быстрой частотой λ_α связаны ν_α -частиц. Обычно СТУ (9) перемножают по всем частицам входящим в данную струну (по a) и записывают систему для центров струн:

$$z_{\nu_\alpha}(\lambda_\alpha) \prod_{\beta \neq \alpha} S_{\nu_\alpha, \nu_\beta}(\lambda_\alpha, \lambda_\beta) = 1. \quad (20)$$

Здесь

$$z_{\nu_\alpha}(\lambda_\alpha) = \prod_{a=1}^{\nu_\alpha} \frac{a(\lambda_\alpha^a)}{d(\lambda_\alpha^a)} \quad (21)$$

$$S_{\nu_\alpha, \nu_\beta}(\lambda_\alpha, \lambda_\beta) = \prod_{a=1}^{\nu_\alpha} \prod_{b=1}^{\nu_\beta} \frac{f(\lambda_\alpha^a, \lambda_\beta^b)}{f(\lambda_\beta^b, \lambda_\alpha^a)}. \quad (22)$$

Систему (21) можно переписать также в логарифмическом виде:

$$\Phi_\alpha \equiv 0 \pmod{2\pi} \quad (23)$$

$$\Phi_\alpha = i \ln z_{\nu_\alpha}(\lambda_\alpha) + i \sum_{\beta \neq \alpha} \ln S_{\nu_\alpha, \nu_\beta}(\lambda_\alpha, \lambda_\beta).$$

Рассмотрим якобиан

$$\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \lambda_\beta} = \delta_{\alpha\beta} (\mathcal{L}_\alpha + \sum_{\gamma \neq \alpha} X_{\alpha\gamma}) - X_{\alpha\beta} \quad (24)$$

$$\mathcal{L}_\alpha = \sum_{a=1}^{\nu_\alpha} L(\lambda_\alpha^a); \quad X_{\alpha,\beta} = \sum_{a=1}^{\nu_\alpha} \sum_{b=1}^{\nu_\beta} X(\lambda_\alpha^a, \lambda_\beta^b). \quad (25)$$

Обозначения см. (13), (14). Рассмотрим собственную функцию, в которой l -связанных состояний и в каждом связанном состоянии ν_α частиц. Полное количество элементарных частиц равно N .

$$N = \nu_1 + \dots + \nu_l. \quad (26)$$

Ниже мы докажем

ТЕОРЕМА I. Квадрат нормы волновой функции, описывающей связанные состояния, пропорционален детерминанту матрицы

$(\partial \Phi_\alpha / \partial \lambda_\beta)$ (см. (24)), более точно

$$\left\| \prod_{j=1}^N \frac{B(\lambda_j)}{d(\lambda_j)} |0\rangle \right\|^2 =$$

$$= (-1)^l \cdot 2^{N-l} (\sin 2\eta)^l (\cos 2\eta)^{N-l} \prod_{\alpha \neq \beta} F_{\nu_\alpha \nu_\beta}(\lambda_\alpha, \lambda_\beta) \cdot \det_{\mathbb{Z}} (\partial \Phi_\alpha / \partial \lambda_\beta).$$
(27)

Здесь

$$F_{\nu_\alpha \nu_\beta}(\lambda_\alpha, \lambda_\beta) = \prod_{a=1}^{\nu_\alpha} \prod_{b=1}^{\nu_\beta} f(\lambda_\alpha^a, \lambda_\beta^b).$$
(28)

§ 3. Термодинамический предел

Рассмотрим решетку с M узлами. В термодинамическом пределе $M \rightarrow \infty$. Для однородных решеток

$$i \ln \frac{a(\lambda)}{d(\lambda)} = M \rho_1(\lambda).$$
(29)

Для связанного состояния ν частиц

$$i \ln z_\nu(\lambda) = M \rho_\nu(\lambda) = M \sum_{a=1}^{\nu} \rho_1(\lambda^a)$$
(30)

При конечной температуре число связанных состояний для каждого фиксированного ν стремится к бесконечности в термодинамическом пределе [7]. В связи с этим изменением немного обозначения предыдущего параграфа. Систему трансцендентных уравнений перепишем в виде:

$$\Phi_\alpha^\nu = 2\pi n_\alpha^\nu$$
(31)

Здесь n_α^ν - некоторый набор целых чисел

$$\Phi_{\alpha_1}^{(\nu_1)} = i \ln z_{\nu_1}(\lambda_{\alpha_1}^{(\nu_1)}) + i \sum_{\nu_2} \sum_{\alpha_2} \ln S_{\nu_1 \nu_2}(\lambda_{\alpha_1}^{(\nu_1)}, \lambda_{\alpha_2}^{(\nu_2)})$$

$(\lambda_{\alpha_1}^{(\nu_1)} \neq \lambda_{\alpha_2}^{(\nu_2)})$

(32)

Индекс α нумерует различные связанные состояния с одним и тем же числом частиц.

$$\frac{\partial \Phi_{\alpha_1}^{(\nu_1)}}{\partial \lambda_{\alpha_2}^{(\nu_2)}} = \delta_{\nu_1 \nu_2} \delta_{\alpha_1 \alpha_2} (2\chi_{\nu_1}(\lambda_{\alpha_1}) + \sum_{\nu_3, \alpha_3} \chi_{\nu_1 \nu_3}(\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_3})) - \chi_{\nu_1 \nu_2}(\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2})$$
(33)

$$\chi_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2}) = \sum_{a=1}^{\nu_1} \sum_{b=1}^{\nu_2} \chi(\lambda_{\alpha_1}^a, \lambda_{\alpha_2}^b); \quad \mathcal{I}_{\nu}(\lambda) = M P'_{\nu}(\lambda). \quad (34)$$

В термодинамическом пределе система трансцендентных уравнений (31) превращается в систему интегральных уравнений

$$2\pi \rho_{\nu_1}(\lambda) = P'_{\nu_1}(\lambda) + \sum_{\nu_2} \int \chi_{\nu_1, \nu_2}(\lambda, \mu) \rho_{\nu_2}^{\circ}(\mu) d\mu. \quad (35)$$

Здесь $\rho_{\nu}^{\circ}(\lambda)$ - это плотность распределения связанных состояний по быстройам, а $\rho_{\nu}(\lambda)$ - это плотность вакансий для связанных состояний. Термодинамический предел детерминанта в (27) (см. также (33)) равен:

$$\det \left(\frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial \lambda_{\beta}} \right) = \left[\prod_{\nu} \prod_{\alpha} \{ 2\pi M \rho_{\nu}(\lambda_{\alpha}) \} \right] \det \left(\mathbb{I} - \frac{1}{2\pi} \hat{\chi}_{\top} \right). \quad (36)$$

Интегральный оператор, стоящий под знаком детерминанта действует на вектор-функцию $u_{\nu}(\lambda)$

$$\begin{aligned} \left[\left(\mathbb{I} - \frac{1}{2\pi} \hat{\chi}_{\top} \right) \vec{u} \right]_{\nu_1}(\lambda_1) &= \\ &= u_{\nu_1}(\lambda_1) - \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu_2} \int d\lambda_2 \chi_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_1, \lambda_2) \left[\frac{\rho_{\nu_2}^{\circ}(\lambda_2)}{\rho_{\nu_2}(\lambda_2)} \right] u_{\nu_2}(\lambda_2) d\lambda_2. \end{aligned} \quad (37)$$

§ 4. Доказательство формулы для связанных состояний

Для того, чтобы из (12) получить формулу (27), нужно раскрыть неопределенность. Действительно, в формуле (12) произведение $\prod f(\lambda_i, \lambda_k)$ стремится к нулю при переходе к связанным состояниям, а $\det(\partial \varphi_k / \partial \lambda_j) \rightarrow \infty$, т.к. $\chi(\lambda_k, \lambda_l) \rightarrow \infty$. Для того, чтобы сделать это аккуратно, рассмотрим определитель матрицы A_{ij}

$$A_{ij} = \delta_{ij} \left(L_i + \sum_{k=1}^N \chi_{ik} \right) - \chi_{ij} \quad (38)$$

$$\Delta_N(L_1, \dots, L_N, \chi_{ij}) = \det |A_{ij}|, \quad 1 \leq i, j \leq N.$$

Здесь $\chi_{ij} = \chi_{ji}$ - произвольный набор переменных. Легко видеть, что A_{ij} не зависят от диагональных элементов симметричной матрицы χ , поэтому положим для определенности

$$x_{ii} = 0, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (39)$$

Отметим прежде всего, что Δ_N является линейной функцией каждой из величин x_{ij} . В силу полной симметрии достаточно убедиться, что Δ_N - линейная функция от x_{12} (при всех остальных переменных фиксированных). Проведем некоторые преобразования Δ_N . Ясно, что x_{12} входит лишь в первые две строки и первые два столбца. Прибавим к первой строке матрицы A_{ij} все остальные строки, а затем к первому столбцу все остальные столбцы, получится матрица $B_{ij}^{(N)}$ (верхний индекс обозначает размер матрицы)

$$B_{ij}^{(N)} = A_{ij}^{(N)} \quad \text{при} \quad 2 \leq i, j \leq N \quad (40)$$

$$B_{11} = \sum_{i=1}^N L_i, \quad B_{1j} = B_{j1} = L_j \quad \text{при} \quad 2 \leq j \leq N$$

$$\det |B_{ij}^{(N)}| = \det |A_{ij}^{(N)}| = \Delta_N(L_1, \dots, L_N; x_{ij}).$$

Матрица B_{ij} зависит от x_{12} проще. Только элемент B_{22} зависит от x_{12} (это линейная функция). Очевидно, что

$$\frac{\partial}{\partial x_{12}} \det |B_{ij}^{(N)}| = \det |\tilde{B}_{ij}^{(N-1)}| \quad (41)$$

$$\tilde{B}_{11}^{(N-1)} = \sum_{i=1}^N L_i = (L_1 + L_2) + \sum_{i=3}^N L_i$$

$$\tilde{B}_{1j}^{(N-1)} = \tilde{B}_{j,1}^{(N-1)} = L_j \quad \text{при} \quad j \geq 3 \quad (42)$$

$$\tilde{B}_{ij}^{(N-1)} = B_{ij}^{(N)} = A_{ij}^{(N)} \quad \text{при} \quad 3 \leq i, j \leq N$$

$$\tilde{B}_{ij}^{(N-1)} = \delta_{ij} (L_i + x_{i1} + x_{i2} + \sum_{k=3}^N x_{ik}) - x_{ij}, \quad 3 \leq i, j \leq N$$

Вторая строка и второй столбец отсутствуют у матрицы $\tilde{B}^{(N-1)}$. Очевидно, что $\tilde{B}^{(N-1)}$ это матрица $B^{(N)}$, у которой изменены аргументы. Итак,

$$\frac{\partial}{\partial x_{12}} \Delta_N(L_1, \dots, L_N; x_{ij}) = \det |\tilde{B}_{ij}^{(N-1)}| = \quad (43)$$

$$= \Delta_{N-1}(L_1 + L_2, L_3, \dots, L_N; x_{1j} + x_{2j}, x_{k,l}), \quad 3 \leq k, l \leq N$$

Для того, чтобы вычислить производную от Δ_N по нескольким x_{ij} , удобно ввести некоторые обозначения. Пусть $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ и $J = \{j_1, \dots, j_k\}$, $i_s < i_{s+1}$ ($1 \leq s \leq k$) два подмножества в $[1, N]^k$. Положим $x_{I,J} = \prod_{s=1}^k x_{i_s, j_s}$. С подмножествами I, J свяжем граф $\Gamma(I, J)$, определяющийся следующим способом:

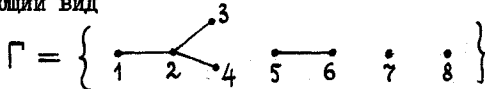
отметим точками числа от 1 до N , и соединим отрезками точки i_s и j_s для $1 \leq s \leq k$. Пусть $\Gamma(I, J) = \bigcup_{\alpha} \Gamma_{\alpha}$ - разложение графа $\Gamma(I, J)$ в объединение компонент связности. Определим $L_{\alpha} = \sum L_i$, i пробегает все вершины графа Γ_{α}

$$X_{\alpha\beta} = \sum_{i \in \alpha} \sum_{k \in \beta} X_{ik} \quad (44)$$

Если граф $\Gamma(I, J)$ не имеет циклов, то определим

$$A(I, J) = \prod L_{\alpha} \quad (44a)$$

Здесь α пробегает все компоненты связности графа $\Gamma(I, J)$. Проиллюстрируем построение графа Γ на примере. Пусть $N = 8$, $k = 4$, $I = \{1, 2, 2, 5\}$, $J = \{2, 3, 4, 6\}$. Граф $\Gamma(I, J)$ имеет следующий вид



Граф Γ имеет четыре компоненты связности

$$\Gamma_{\alpha} = \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \text{---} 2 \text{---} 4 \end{array} \right\}, \quad \Gamma_{\beta} = \{5 \text{---} 6\}, \quad \Gamma_{\gamma} = \{7\}, \quad \Gamma_{\delta} = \{8\}$$

Соответственно

$$L_{\alpha} = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$$

$$X_{\alpha\beta} = X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{45} + X_{16} + X_{26} + X_{36} + X_{46}$$

$$A(I, J) = (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) \cdot (L_5 + L_6) \cdot L_7 \cdot L_8$$

Вычислим теперь производные от определителя Δ_N . Для этого положим

$$\partial_{i,j} = \frac{\partial}{\partial X_{ij}}, \quad \partial_{I,J} = \prod_{s=1}^k \partial_{i_s, j_s} \quad (45)$$

ТЕОРЕМА 2. Если граф $\Gamma(I, J)$ имеет цикл, то

$$\partial_{I,J} \Delta_N = 0 \quad (46)$$

Если граф $\Gamma(I, J)$ не имеет циклов, то его число компонент связности равно $(N-k)$ и

$$\partial_{I,J} \Delta_N = \Delta_{(N-k)}(L_{\alpha}; X_{\alpha\beta}) \quad (47)$$

Здесь индекс α параметризует компоненты связности графа $\Gamma(I, J)$.

Доказательство проводится индукцией по k . Базой индукции является формула (43). Проведем шаг индукции. Пусть

$$\partial_{I,J} \Delta_N = \Delta_{N-k} (I, J) = \Delta_{I,J} \quad (48)$$

Вычислим $\partial_{ij} \Delta_{I,J}$.

Первый случай: (i, j) лежат в одной компоненте связности Γ_α . Тогда граф $\Gamma(I \cup i; J \cup j)$ имеет цикл. С другой стороны

$$\partial_{ij} \Delta_{I,J} = \frac{\partial x_{\alpha\beta}}{\partial x_{ij}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}} \Delta_{I,J} \right) = 0 \quad (49)$$

т.к. $\frac{\partial x_{\alpha\beta}}{\partial x_{ij}} = 0$ в силу того, что в $X_{\alpha\beta}$ входят лишь те $X_{k,m}$, у которых k и m лежат в разных компонентах связности.

Второй случай: $i \in \Gamma_\alpha, j \in \Gamma_\beta, \alpha \neq \beta$. Тогда граф $\Gamma(I \cup i, J \cup j)$ имеет $N-k-1$ компоненту связности: Γ_α и Γ_β соединены посредством (ij) . Используя формулу (43), получаем

$$\partial_{ij} \Delta_{I,J} = \Delta_{N+k-1}(L_\alpha, X_{\alpha\beta}). \quad (50)$$

Это и завершает индукционное доказательство теоремы 2.

Получим теперь некоторое представление для определителя Δ_N . Используем при этом линейность Δ_N по каждому из X_{ij} , а также формулу

$$\Delta_N(L_i, 0) = \prod_{i=1}^N L_i. \quad (51)$$

Разложим Δ_N в ряд Тейлора по X_{ij} , получим:

$$\Delta_N(L_1, \dots, L_N; X_{ij}) = \sum_{I,J} A(I, J) X_{I,J} \quad (52)$$

$$A(I, J) = \begin{cases} \prod_{i \in I} L_i, & \text{если граф } \Gamma(I, J) \text{ не имеет циклов} \\ 0, & \text{если граф имеет цикл} \end{cases}$$

Здесь мы воспользовались теоремой I. Вернемся теперь к нормам связанных состояний. Рассмотрим разбиение числа

$$N = \nu_1 + \dots + \nu_l, \quad \nu_i \geq 1 \quad (\text{целое}) \quad (53)$$

Обозначим через α_j отрезок $[\nu_1 + \dots + \nu_j + 1, \nu_1 + \dots + \nu_j + \dots + \nu_{j+l}]$, соответствующий одному связанному состоянию.

$$L_{\alpha_j} = \sum_{i \in \alpha_j} L_i, \quad X_{\alpha_i, \alpha_j} = \sum_{p \in \alpha_i} \sum_{q \in \alpha_j} X_{pq} \quad (54)$$

$$X_{\alpha_i} = \prod_{\substack{j \in \alpha_i \\ j+1 \in \alpha_i}} X_{j, j+1}$$

Символ $X_{\alpha_i} \rightarrow \infty$ означает, что $X_{j, j+1} \rightarrow \infty$ для всех $j \in \alpha_i$, $j+1 \in \alpha_i$. Следствием формулы (47) и линейности Δ_N по каждому из X_{ij} является утверждение:

$$\lim_{X_{\alpha_i} \rightarrow \infty} \frac{\Delta_N(L_1, \dots, L_N; X_{ij})}{\prod_i X_{\alpha_i}} = \Delta_\ell(L_{\alpha_1}, \dots, L_{\alpha_\ell}; X_{\alpha_i, \alpha_j}). \quad (55)$$

Эта формула дает возможность раскрыть неопределенности в формуле (I2) и приводит к формуле (27).

В завершение работы приведем некоторое индукционное соотношение для Δ_N , которое может пригодиться в дальнейшем:

$$\Delta_N(L_1, \dots, L_N; X_{ij}) = \Delta_{N-1}(\tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_{N-1}, y_{ij}) \left(\sum_{j=1}^N L_j \right) \quad (56)$$

$$y_{ij} = X_{ij} + \frac{L_i L_j}{\left(\sum_{j=1}^N L_j \right)}, \quad 1 \leq i, j \leq N-1$$

$$\tilde{L}_i = X_{iN} + \frac{L_i L_N}{\left(\sum_{j=1}^N L_j \right)}, \quad 1 \leq i \leq N-1$$

Литература

1. Фаддеев Л.Д. Квантовые вполне интегрируемые модели теории поля. - В кн.: Труды У Международного совещания по не-локальным теориям поля. Дубна, 1979, с.249-304.
2. Корепин В.Е. Calculation of norms of Bethe wave functions. - *Comm.MathPhys.*, 1982, v.86, p.391-418.
3. Heisenberg W. Zur Theorie des Ferromagnetismus *Zeitschrift für Physik* 1928, v.49, 9-10, s.619-636.
4. Izergin A.G., Корепин В.Е. Lattice versions of quantum field theory models in two dimensions. - *Nuclear Physics* 1982, B v.205, F55, N 3, p.401-413.
5. Izergin A.G., Корепин В.Е. The Quantum Inverse Scattering Method Approach to Correlation Functions. *Commun. Math.Phys.* 1984, v.94, p.67-92.
6. Корепин В.Е. Correlation Functions of the One-Dimensional Bose Gas in the Repulsive Case. 1984, v.94, p.93-113.
7. Takahashi M. One dimensional Heisenberg model at finite temperatures. - *Prog.Theor.Phys.* 1973, v.50, p.1519-1536.