ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1969 МАТЕМАТИКА № 11 (90)

УДК 519.40

В. В. Вагнер

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ КАТЕГОРИИ

Как известно [2], отношением идеальности ξ частичного бинарного оператива $(A, \circ)$ называется квазипорядковое замыкание объединения $\tau_d \cup \tau_s$ правого и левого отношений транзитивности. Операция идеального замыкания в A, определяемая множеством всех идеалов, совпадает с глобальным преобразованием $\overset{\smile}{\xi}$ в $\mathfrak{P}(A)$, ассоциированным с отношением идеальности ξ. Таким образом, срез $\xi\langle a\rangle$ является идеальным замыканием одноэлементного подмножества $\{a\}$, которое обычно называется главным идеалом, порождаемым элементом a.

Замечая, что $(a_1, a_2) \in \delta \to a_1 a_2 \in \xi\langle a_1\rangle \cap \xi\langle a_2\rangle$, получаем, что при $(a_1, a_2) \in \delta$ главный идеал, порождаемый элементом $a_1 a_2$, включается в пересечение главных идеалов, порождаемых элементами a_1 и a_2:

$$(a_1, a_2) \in \delta \to \xi\langle a_1 a_2\rangle \subset \xi\langle a_1\rangle \cap \xi\langle a_2\rangle. \tag{1}$$

Коидеалом частичного бинарного оператива $(A, \circ)$ называется подмножество $\mathfrak{a}$, являющееся дополнением идеала; выразим это формулой

$$((a_1, a_2) \in \delta \wedge a_1 a_2 \in \mathfrak{a}) \to a_1, a_2 \in \mathfrak{a}. \tag{2}$$

Множество всех коидеалов определяет в множестве A операцию замыкания, называемую операцией коидеального замыкания, которая совпадает с глобальным преобразованием $\overset{\smile}{\overset{-1}{\xi}}$ в $\mathfrak{P}(A)$, ассоциированным с обратным бинарным отношением $\overset{-1}{\xi}$ для отношения идеальности ξ. В силу этого $\overset{-1}{\xi}$ называется отношением коидеальности. Таким образом срез $\overset{-1}{\xi}\langle a\rangle$ является коидеальным замыканием одноэлементного подмножества $\{a\}$, которое будем называть главным коидеалом, порождаемым элементом a.

Замечая, что согласно (2) $(a_1, a_2) \in \delta \to a_1, a_2 \in \overset{-1}{\xi}\langle a_1 a_2\rangle$, получаем, что при $(a_1, a_2) \in \delta$ объединение главных коидеалов, порождаемых элементами a_1 и a_2, включается в главный коидеал, порождаемый элементом $a_1 a_2$:

$$(a_1, a_2) \in \delta \to \overset{-1}{\xi}\langle a_1\rangle \cup \overset{-1}{\xi}\langle a_2\rangle \subset \overset{-1}{\xi}\langle a_1 a_2\rangle. \tag{3}$$

Элемент a частичного бинарного оператива $(A, \circ)$ называется локализованным, если порождаемый им главный коидеал $\overset{-1}{\xi}\langle a\rangle$ — стабильное подмножество. В этом случае определяемый $\overset{-1}{\xi}\langle a\rangle$ стабильный частичный подоператив называется локальным частичным подоперативом, порождаемым элементом a. Если все элементы частичного бинарного оператива локализованы, то он называется локализованным.

Теорема 1. *Локализованность частичного бинарного оператива $(A, \circ)$ эквивалентна тому, что полуглобальное отображение $\tilde{\xi}$, ассоциированное с отношением идеальности ξ, является гомоморфизмом $(A, \circ)$ в полугруппу $(\mathfrak{P}(A), \circ_\cap)$, где $\circ_\cap$ — операция взятия пересечения пары подмножеств множества A*

$$(a_1, a_2) \in \delta \to \xi\langle a_1\rangle \cap \xi\langle a_2\rangle = \xi\langle a_1 a_2\rangle. \tag{4}$$

Доказательство. Докажем, что то, что все элементарные срезы $\rho\langle x\rangle$ произвольного бинарного отношения $\rho \subset X \times A$ являются стабильными подмножествами частичного бинарного оператива $(A, \circ)$, эквивалентно условию

$$(a_1, a_2) \in \delta \to \overset{-1}{\rho}\langle a_1\rangle \cap \overset{-1}{\rho}\langle a_2\rangle \subset \overset{-1}{\rho}\langle a_1 a_2\rangle. \tag{5}$$

Действительно, замечая, что стабильность элементарных срезов эквивалентна условию

$$(a_1, a_2) \in \delta \to (a_1, a_2 \in \rho\langle x\rangle \to a_1 a_2 \in \rho\langle x\rangle),$$

получаем, что это условие эквивалентно (5). Таким образом, локализованность $(A, \circ)$ будет эквивалентна условию

$$(a_1, a_2) \in \delta \to \xi\langle a_1\rangle \cap \xi\langle a_2\rangle \subset \xi\langle a_1 a_2\rangle, \tag{6}$$

которое в силу (1), в свою очередь, эквивалентно (4).

Для категории $(A, \circ)$ отношение идеальности совпадает с двусторонним отношением транзитивности τ_b, которое является произведением коммутирующих между собой правого и левого отношений транзитивности τ_d и τ_s [2]:

$$\xi = \tau_b = \tau_s \circ \tau_d = \tau_d \circ \tau_s = \bigcup_{(a_1, a_2)} \bigvee_{(a_3, a_4)} (\{a_3\}\{a_1\}\{a_4\} = \{a_2\}). \tag{7}$$

Легко убедиться, что всякий коидеал категории является единично стабильным подмножеством, т. е. стабильным относительно левого и правого единичных проекторов η_s и η_d. Отсюда следует, что каждый частичный подоператив категории, определяемый стабильным коидеалом, будет подкатегорией. В частности, подкатегориями будут локальные частичные подоперативы категории, которые будем называть локальными.

Подмножество $\mathfrak{a}$ дуг произвольной диаграммы (A, B, λ) [3] называется смыкающим, если каждая пара $(b_1, b_2) \in \beta$ смыкаемых вершин может быть сомкнута некоторой дугой a из $\mathfrak{a}$, т. е. является ее границей, что, очевидно, эквивалентно условию

$$\breve{\lambda}(\mathfrak{a}) = \mathrm{pr}_2 \lambda = \beta. \tag{8}$$

Подмножество категории $(A, \circ)$ будем называть смыкающим, если оно является смыкающим для ее единичной диаграммы (A, E, η). Очевидно, что всякий смыкающий коидеал категории будет содер-

жать все ее единичные элементы. Подкатегорию категории, определяемую смыкающим стабильным коидеалом, будем называть канонической. Легко видеть, что отношение смыкаемости единичных элементов всякой канонической подкатегории совпадает с отношеним смыкаемости единичных элементов самой категории.

Теорема 2. *То, что категория бинарно разложима, эквивалентно тому, что она локализована и антиквадратична.*

Доказательство. Как известно [4], бинарная разложимость частичного бинарного оператива $(A, \circ)$ выражается условием

$$(a_1, a_2) \in \delta \to \{a_1 a_2\} = \tau_d \langle a_1 \rangle \cap \tau_s \langle a_2 \rangle, \tag{9}$$

которое может быть также представлено в следующем виде:

$$\{a_1\}\{a_2\} \neq \varnothing \to \{a_1\}\{a_2\} = \{a_1\} A \cap A \{a_2\}. \tag{10}$$

Отсюда, для случая, когда $(A, \circ)$ является катенарным полугруппоидом, мы получаем формулу $\{a_1\}\{a_2\} \neq \varnothing \to \{a_3\}\{a_1\}\{a_2\}\{a_4\} = \{a_3\}\{a_1\} A \cap A \{a_2\}\{a_4\}$, из которой далее следует $\{a_1\}\{a_2\} \neq \varnothing \to A\{a_1\}\{a_2\} A = A\{a_1\} A \cap A \{a_2\} A$. Замечая, что $\tau_b \langle a \rangle = A\{a\} A$, получаем

$$(a_1, a_2) \in \delta \to \tau_b \langle a_1 a_2 \rangle = \tau_b \langle a_1 \rangle \cap \tau_b \langle a_2 \rangle. \tag{11}$$

Если $(A, \circ)$ является категорией, то согласно (7) полученная формула эквивалентна (4), что означает, что всякая бинарно разложимая категория является локализованной. Далее известно, что каждая бинарно разложимая категория $(A, \circ)$ является антиквадратируемой, т. е. удовлетворяющей условию, что все ее квадратируемые элементы являются единичными $\mathrm{pr}_\Delta \delta \subset E$. Пусть теперь $(A, \circ)$ — произвольная локализованная и антиквадратируемая категория. Обозначая, как обычно, через ε_s, ε_d и ε_η соответственно ядра левого и правого единичных проекторов η_s и η_d и ядро двустороннего единичного проектора $\eta = \eta_s \rfloor\!\lceil \eta_d$, имеем для произвольной категории $(A, \circ)$

$$(a_1, a_2) \in \delta \to \varepsilon_\eta \langle a_1 a_2 \rangle = \varepsilon_s \langle a_1 \rangle \cap \varepsilon_d \langle a_2 \rangle. \tag{12}$$

Далее известно [4], что всякая антиквадратируемая категория $(A, \circ)$ удовлетворяет условиям $\tau_b \cap \varepsilon_\eta = \Delta_A$, $\tau_b \cap \varepsilon_s = \tau_d$, $\tau_b \cap \varepsilon_d = \tau_s$, откуда

$$\tau_b \langle a \rangle \cap \varepsilon_\eta \langle a \rangle = \{a\},\ \tau_b \langle a \rangle \cap \varepsilon_s \langle a \rangle = \tau_d \langle a \rangle,\ \tau_b \langle a \rangle \cap \varepsilon_d \langle a \rangle = \tau_s \langle a \rangle. \tag{13}$$

Пользуясь (12) и (13), получаем очевидным образом из условия локализованности (11) условие бинарной разложимости, что означает, что каждая локализованная и антиквадратируемая категория является бинарно разложимой. Вместе с предыдущим это дает доказательство теоремы.

Как известно [1], простейшим примером бинарно разложимой ассоциативной бинарной операции является бинарная операция в декартовом произведении $B \times \bar{B}$ двух произвольных непустых множеств B и $\bar{B}$, определяемая формулой

$$(b_1, \bar{b}_1)(b_2, \bar{b}_2) = (b_1, \bar{b}_2). \tag{14}$$

Соответствующую бинарно разложимую полугруппу будем называть декартовой полугруппой, определяемой парой множеств $(B, \bar{B})$. Оказывается, что произвольная бинарно разложимая полугруппа изоморфна инфляции декартовой полугруппы[1)].

---

1) Определение инфляции см. [5] (с. 98, упр. 10).

Как известно [4], всякое ограничение бинарно разложимого частичного оператива является бинарно разложимым. Замечая, что декартов группоид, определяемый множеством B, является ограничением декартовой полугруппы, определяемой парой множеств (B, B), получаем, что декартов группоид и все его частичные подоперативы будут бинарно разложимы. Очевидно, что стабильными подмножествами декартова группоида являются транзитивные бинарные отношения, которые будут, таким образом, определять его подполукатегории. Такого рода полукатегории будем называть транзитивными. Транзитивную полукатегорию с базисным бинарным отношением ρ мы можем всегда рассматривать как подполукатегорию декартова группоида, определяемого объединенной проекцией $\mathrm{pr}\,\rho$. То, что транзитивная полукатегория будет категорией, эквивалентно тому, что ее базисное бинарное отношение рефлексивно, т. е. является отношением квазипорядка. Такого рода категории будем называть квазипорядковыми. Порядковыми, соответственно линейно порядковыми, будут такие квазипорядковые категории, у которых базисное отношение квазипорядка является отношением порядка, соответственно линейным отношением порядка.

Произвольная диаграмма (A, B, λ) называется элементарной, если ее граничный проектор λ является взаимно однозначным бинарным отношением. Очевидно, что то, что частичный бинарный оператив диаграммируется элементарной диаграммой, эквивалентно тому, что граничный проектор диаграммы является его изоморфизмом на транзитивную полукатегорию, определяемую отношением смыкаемости этой диаграммы. Отсюда этот частичный бинарный оператив сам является полукатегорией. Такого рода полукатегории будем называть элементарными. В частности, то, что категория будет элементарной, эквивалентно тому, что ее двусторонний единичный проектор является ее изоморфизмом на квазипорядковую категорию, определяемую ее отношением смыкаемости единичных элементов. Элементарная категория называется линейной, если ее отношение смыкаемости единичных элементов является линейным отношением порядка, откуда, в частности, следует, что она будет изоморфна линейно порядковой категории.

Как известно [4], полугруппоид $(A, \circ)$ называется интрарегулярным, если он удовлетворяет условию

$$\{a_1\}\{a\}\{a_2\} = \{a_3\}\{a\}\{a_4\} \neq \varnothing \to a_1 = a_3 \wedge a_2 = a_4, \tag{15}$$

при этом интрарегулярность категории $(A, \circ)$ эквивалентна условию

$$\overset{-1}{\tau_b} \circ \tau_b \cap \varepsilon_\eta = \Delta_A. \tag{16}$$

Теорема 3. *Интрарегулярность категории эквивалентна тому, что она локализована, и все ее локальные подкатегории элементарны.*

Доказательство. В силу равенства

$$\overset{-1}{\tau_b} \circ \tau_b = \bigcup_a \overset{-1}{\tau_b}\langle a\rangle \times \overset{-1}{\tau_b}\langle a\rangle \tag{17}$$

интрарегулярность категории $(A, \circ)$ эквивалентна условию: для всех a

$$\overset{-1}{\tau_b}\langle a\rangle \times \overset{-1}{\tau_b}\langle a\rangle \cap \varepsilon_\eta \subset \Delta_A, \tag{18}$$

— выражающему то, что ограничение двустороннего единичного проектора η на каждом главном коидеале является взаимно однозначным отображением. Кроме этого, известно [4], что интрарегулярная категория бинарно разложима и поэтому, согласно теореме 2, локализована. Отсюда непосредственно получаем доказываемую теорему.

Как известно, частичный бинарный оператив $(A, \circ)$ называется единично простым, если все его единичные элементы e являются простыми, т. е. удовлетворяют условию

$$((a_1, a_2) \in \delta \wedge a_1 a_2 = e) \rightarrow a_1 = a_2 = e, \tag{19}$$

что эквивалентно тому, что множество всех единичных элементов E является коидеалом

$$((a_1, a_2) \in \delta \wedge a_1 a_2 \in E) \rightarrow a_1, a_2 \in E. \tag{20}$$

Теорема 4. *Для антиквадратируемой категории то, что она единично простая, эквивалентно тому, что ее отношение смыкаемости единичных элементов является отношением порядка.*

Доказательство. Легко видеть, что для антиквадратируемой категории $(A, \circ)$ имеет место формула

$$(a_1, a_2) \in \delta \wedge a_1 a_2 \in E \leftrightarrow \eta_s(a_1) = \eta_d(a_2) \wedge \eta_d(a_1) = \eta_s(a_2). \tag{21}$$

Пользуясь выражением для симметричной части отношения смыкаемости единичных элементов β:

$$\beta \cap \overset{-1}{\beta} = \bigcup_{(e_1, e_2)} \bigvee_{(a_1, a_2)} (e_1 = \eta_s(a_1) = \eta_d(a_2) \wedge e_2 = \eta_d(a_1) = \eta_s(a_2)), \tag{22}$$

с помощью (20) и (21) легко убедиться, что для антиквадратируемой категории то, что она единично простая, эквивалентно тому, что ее отношение смыкаемости единичных элементов β антисимметрично, т. е. $\beta \cap \overset{-1}{\beta} \subset \Delta_A$. Так как для всякой категории отношение смыкаемости единичных элементов является отношением квазипорядка, то это эквивалентно доказываемой теореме.

Теорема 5. *Интрарегулярность и единичная простота категории эквивалентны тому, что она локализована, и все ее локальные подкатегории изоморфны порядковым категориям.*

Доказательство. Пользуясь теоремой 4, получаем, что то, что элементарная категория изоморфна порядковой категории, эквивалентно тому, что она является единично простой. Далее легко видеть, что простые единичные элементы любой стабильной коидеальной подкатегории некоторой категории являются также простыми единичными элементами этой категории. В частности, это будет иметь место для локальных подкатегорий локализованной категории. С помощью этих предложений доказываемая теорема получается непосредственно из теоремы 3.

Бинарное отношение ι, определяемое в произвольной категории $(A, \circ)$ формулой

$$\iota = \Delta_E \circ \overset{-1}{\tau_b}, \tag{23}$$

называется ее отношением инцидентности.

Пользуясь известными выражениями левого и правого единичных проекторов категории $\eta_s = \Delta_E \circ \overset{-1}{\tau_d}$ и $\eta_d = \Delta_E \circ \overset{-1}{\tau_s}$, получаем из (7) и (23)

$$\iota = \eta_s \circ \overset{-1}{\tau_s} = \eta_d \circ \overset{-1}{\tau_d}. \tag{24}$$

Далее, замечая, что $\iota \circ \overset{-1}{\tau_s} = \iota \circ \overset{-1}{\tau_d} = \iota$, получаем из (24)

$$\iota = \eta_s \circ \overset{-1}{\tau_b} = \eta_d \circ \overset{-1}{\tau_b}. \tag{25}$$

Очевидно также, что левые и правые проекторы будут включаться в отношение инцидентности

$$\eta_s \subset \iota, \quad \eta_d \subset \iota. \tag{26}$$

Отсюда, в частности, следует, что каждый элементарный срез $\iota\langle a\rangle$ будет непуст, так как он содержит левую и правую единичные проекции $\eta_s(a)$, $\eta_d(a)$. Единичные элементы, из которых состоит элементарный срез $\iota\langle a\rangle$, называются инцидентными с элементом a. Пользуясь (7), получаем следующее выражение для отношения инцидентности:

$$\iota = \bigcap_{(a,\, e)} \bigvee_{(a_1,\, a_2)} (\{a_1\}\{e\}\{a_2\} = \{a\}). \tag{27}$$

Пользуясь (3) и (7), получаем, что отношение инцидентности в любой категории $(A, \circ)$ удовлетворяет условию

$$(a_1, a_2) \in \delta \rightarrow \iota\langle a_1\rangle \cup \iota\langle a_2\rangle \subset \iota\langle a_1 a_2\rangle. \tag{28}$$

Категория $(A, \circ)$ называется инцидентно гомоморфируемой, если полуглобальное отображение $\tilde{\iota}$, называемое инцидентным, является ее гомоморфизмом в полугруппу $(\mathfrak{P}(E), \circ_{\cup})$, где $\circ_{\cup}$ — операция взятия объединения пары подмножеств множества E всех единичных элементов, что эквивалентно условию

$$(a_1, a_2) \in \delta \rightarrow \iota\langle a_1\rangle \cup \iota\langle a_2\rangle = \iota\langle a_1 a_2\rangle, \tag{29}$$

которое в силу (28) эквивалентно условию

$$(a_1, a_2) \in \delta \rightarrow \iota\langle a_1 a_2\rangle \subset \iota\langle a_1\rangle \cup \iota\langle a_2\rangle. \tag{30}$$

Категория $(A, \circ)$ называется инцидентно определенной, если каждый ее элемент a однозначно определяется множеством $\iota\langle a\rangle$ инцидентных с ним единичных элементов, т. е. если инцидентное полуглобальное отображение $\tilde{\iota}$ взаимно однозначно. Инцидентно определенная и инцидентно гомоморфируемая категория называется инцидентно мономорфируемой, так как для нее инцидентное полуглобальное отображение $\tilde{\iota}$ будет мономорфизмом в полугруппу $(\mathfrak{P}(E), \circ_{\cup})$.

Категория называется локально линейной, если она локализована и все ее локальные подкатегории линейны.

Легко убедиться, что всякая линейная категория будет также и локально линейной.

Теорема 6. *То, что категория локально линейна, эквивалентно тому, что она интрарегулярна, единично проста и инцидентно гомоморфируема.*

Доказательство. Докажем прежде всего, что всякая линейная категория инцидентно гомоморфируема, что, очевидно, эквивалентно тому, что инцидентно гомоморфируема всякая линейно порядковая категория. Рассматривая линейно порядковую категорию, базисным бинарным отношением которой является линейное отношение порядка ω в множестве B, получаем, что единичными элементами, инцидентными с элементом $(b_1, b_2) \in \omega$, будут все пары (b, b), где b принадлежит сегменту $[b_1, b_2]$, откуда

$$(b_1, b_2) \in \omega \rightarrow \iota\langle (b_1, b_2)\rangle = \Delta_{[b_1,\, b_2]}. \tag{31}$$

Так как $(b_1, b_2), (b_2, b_3) \in \omega \to [b_1, b_2] \cup [b_2, b_3] = [b_1, b_3]$, то получаем $(b_1, b_2), (b_2, b_3) \in \omega \to \iota\langle(b_1, b_2)\rangle \cup \iota\langle(b_2, b_3)\rangle = \iota\langle(b_1, b_3)\rangle$, откуда следует, что всякая линейно порядковая, а следовательно и всякая линейная категория, будет инцидентно гомоморфируемой. Если $(\mathfrak{a}, \circ_{\mathfrak{a}})$ — стабильная коидеальная подкатегория произвольной категории $(A, \circ)$, то, пользуясь (27), легко видеть, что ее отношение инцидентности $\iota_{\mathfrak{a}}$ является ограничением на подмножестве $\mathfrak{a}$ отношения инцидентности ι самой категории $(A, \circ)$

$$\iota_{\mathfrak{a}} = \iota \circ \Delta_{\mathfrak{a}}. \tag{32}$$

Покажем теперь, что всякая локально линейная категория $(A, \circ)$ будет инцидентно гомоморфируемой. Рассматривая локальную подкатегорию, порождаемую элементом a_1a_2, где $(a_1, a_2) \in \delta$, находим, в силу предыдущего, что она будет инцидентно гомоморфируемой. Отсюда, замечая, что $a_1, a_2 \in \overset{-1}{\tau_b}\langle a_1a_2\rangle$, и пользуясь (32), получаем $\iota\langle a_1\rangle \cup \iota\langle a_2\rangle = \iota\langle a_1a_2\rangle$. Таким образом, мы доказали, что категория $(A, \circ)$ удовлетворяет условию (29); это означает, что всякая локально линейная категория является инцидентно гомоморфируемой. То, что она является также интрарегулярной и единично простой, следует из теоремы 5. Пользуясь (27), мы можем условие (30) инцидентной гомоморфируемости произвольной категории $(A, \circ)$ преобразовать к виду

$$\{a_3\}\{e\}\{a_4\} = \{a_1\}\{a_2\} \neq \varnothing \to$$
$$\to \bigvee_{(a_5,\, a_6)} (\{a_5\}\{e\}\{a_6\} = \{a_1\} \vee \{a_5\}\{e\}\{a_6\} = \{a_2\}). \tag{33}$$

Замечая далее, что согласно (27) $e_1, e_2 \in \iota\langle a\rangle \leftrightarrow \bigvee_{(a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4)} (\{a_1\}\{e_1\}\{a_2\} = \{a_3\}\{e_2\}\{a_4\} = \{a\})$ и что согласно (33) для инцидентно гомоморфируемой категории

$$\{a_1\}\{e_1\}\{a_2\} = \{a_3\}\{e_2\}\{a_4\} =$$
$$= \{a\} \to \bigvee_{(a_5,\, a_6)} (\{a_5\}\{e_2\}\{a_6\} = \{a_1\} \vee \{a_5\}\{e_2\}\{a_6\} = \{a_2\}),$$

откуда

$$\{a_1\}\{e_1\}\{a_2\} = \{a_3\}\{e_2\}\{a_4\} =$$
$$= \{a\} \to \bigvee_{(a_5,\, a_6)} (\{a_5\}\{e_2\}\{a_6\}\{e_1\}\{a_2\} = \{a\} \vee \{a_1\}\{e_1\}\{a_5\}\{e_2\}\{a_6\} = \{a\}),$$

получаем для инцидентно гомоморфируемой категории $(A, \circ)$:

$$e_1, e_2 \in \iota\langle a\rangle \to \bigvee_{a_0 \in \overset{-1}{\tau_b}\langle a\rangle} (\{e_1\}\{a_0\}\{e_2\} \neq \varnothing \vee \{e_2\}\{a_0\}\{e_1\} \neq \varnothing),$$

или

$$e_1, e_2 \in \iota\langle a\rangle \to \bigvee_{a_0 \in \overset{-1}{\tau_b}\langle a\rangle} (\eta(a_0) = (e_1, e_2) \vee \eta(a_0) = (e_2, e_1)),$$

или

$$e_1, e_2 \in \iota\langle a\rangle \to (e_1, e_2) \in \overset{\cup}{\eta}(\overset{-1}{\tau_b}\langle a\rangle) \vee (e_2, e_1) \in \overset{\cup}{\eta}(\overset{-1}{\tau_b}\langle a\rangle),$$

откуда $\iota\langle a\rangle \times \iota\langle a\rangle \subset \overset{\cup}{\eta}(\overset{-1}{\tau_b}\langle a\rangle) \cup \overset{\cup}{\eta}\overline{(\overset{-1}{\tau_b}\langle a\rangle)}$. С другой стороны, со-

гласно (25) имеем $\overset{\cup}{\eta}{}^{-1}(\tau_b\langle a\rangle)\subset\iota\langle a\rangle\times\iota\langle a\rangle$, что вместе с предыдущим дает

$$\overset{\cup}{\eta}{}^{-1}(\tau_b\langle a\rangle)\cup\overline{\overset{\cup}{\eta}{}^{-1}(\tau_b\langle a\rangle)}^{-1}=\iota\langle a\rangle\times\iota\langle a\rangle. \tag{34}$$

Таким образом, для инцидентно гомоморфируемой категории бинарное отношение между единичными элементами $\overset{\cup}{\eta}{}^{-1}(\tau_b\langle a\rangle)$ является полууниверсальным[1] бинарным отношением в множестве $\iota\langle a\rangle$. Очевидно, что для локальной подкатегории, порождаемой локализующим элементом a категории $(A, \circ)$, $\iota\langle a\rangle$ будет множеством всех единичных элементов, а $\overset{\cup}{\eta}{}^{-1}(\tau_b\langle a\rangle)$ — ее отношением смыкаемости единичных элементов. Таким образом, если категория $(A, \circ)$ интрарегулярна, единично проста и инцидентно гомоморфируема, то согласно теореме 5 она будет локализована, и ее локальные подкатегории будут элементарными категориями, отношения смыкаемости единичных элементов которых будут отношениями порядка, являющимися согласно (34) полууниверсальными бинарными отношениями, что, как известно, эквивалентно тому, что они будут линейными отношениями порядка. Вместе с предыдущим это дает доказательство теоремы.

Теорема 7. *Всякая стабильная коидеальная подкатегория локально линейной категории будет также локально линейной категорией.*

Доказательство. Пользуясь (32), получаем, что всякая стабильная коидеальная подкатегория инцидентно гомоморфируемой категории будет также инцидентно гомоморфируемой категорией. Отсюда согласно теореме 6 очевидным образом получаем доказываемую теорему.

Пусть (X, ω) — произвольное упорядоченное множество. Симметричное замыкание отношения порядка ω будем называть отношением сравнимости и обозначать для краткости через σ_ω:

$$\sigma_\omega=\omega\cup\overset{-1}{\omega}. \tag{35}$$

Пару элементов (x_1, x_2) упорядоченного множества (X, ω) будем называть сравнимой, если $(x_1, x_2)\in\sigma_\omega$. Элемент x будем называть сравнимым с подмножеством $\mathfrak{x}$ упорядоченного множества, если он сравним с каждым элементом подмножества $\mathfrak{x}$, что, как легко видеть, эквивалентно условию $x\in\overset{\frown}{\sigma}_\omega(\mathfrak{x})$. Отсюда следует, что дуальный срез $\overset{\frown}{\sigma}_\omega(\mathfrak{x})$ будет множеством всех элементов, сравнимых с подмножеством $\mathfrak{x}$. Элемент x, сравнимый с подмножеством $\mathfrak{x}$ и сам принадлежащий этому подмножеству, будем называть звеньевым элементом этого подмножества. Таким образом, пересечение $\mathfrak{x}\cap\overset{\frown}{\sigma}_\omega(\mathfrak{x})$ будет множеством всех звеньевых элементов под-

[1] Бинарное отношение ρ в множестве X называется полууниверсальным, если его симметричное замыкание является универсальным бинарным отношением, т. е. $\rho\cup\overset{-1}{\rho}=X\times X$. Подмножество $\mathfrak{x}$ называется полууниверсальным относительно некоторого произвольного бинарного отношения ρ в X, если ρ индуцирует в нем полууниверсальное бинарное отношение, что эквивалентно тому, что $\mathfrak{x}$ является универсальным подмножеством относительно симметричного замыкания ρ, т. е. если $\mathfrak{x}\times\mathfrak{x}\subset\rho\cup\overset{-1}{\rho}$.

множества $\mathfrak{x}$. Заметим, что, в частности, звеньевыми элементами всегда будут наименьший и наибольший элементы подмножества. Легко убедиться, что если все элементы подмножества $\mathfrak{x}$ будут звеньевыми, то это эквивалентно тому, что подмножество $\mathfrak{x}$ будет универсальным подмножеством отношения сравнимости, т. е. $\mathfrak{x} \times \mathfrak{x} \subset \sigma_\omega$, или, что то же самое, полууниверсальным подмножеством отношения порядка ω, т. е. будет подмножеством, в котором ω индуцирует отношение порядка $\omega_{\mathfrak{x}}$, являющееся линейным. Как известно, такого рода подмножества называются цепями упорядоченного множества. Очевидно, что множество всех звеньевых элементов произвольного подмножества является цепью, которую будем называть главной цепью этого подмножества. Обозначим через $\varkappa_\omega$ преобразование в $\mathfrak{P}(X)$, при котором образом произвольного подмножества $\mathfrak{x}$ является его главная цепь

$$\varkappa_\omega(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x} \cap \widehat{\sigma_\omega}(\mathfrak{x}). \tag{36}$$

Сегмент упорядоченного множества $(\mathfrak{x}, \omega_{\mathfrak{x}})$, где $\omega_{\mathfrak{x}}$ — индуцированное отношение порядка в подмножестве $\mathfrak{x}$, будем называть сегментом подмножества $\mathfrak{x}$. Сегмент подмножества $\mathfrak{x}$ называется главным, если он определяется парой звеньевых элементов подмножества $\mathfrak{x}$.

Подмножество упорядоченного множества, имеющее наименьший и наибольший элементы, будем называть псевдосегментом. Обозначим через $\mathfrak{X}_\omega$ множество всех псевдосегментов упорядоченного множества (X, ω), а через λ_ω — отображение $\mathfrak{X}_\omega$ в $X \times X$, при котором образом псевдосегмента $\mathfrak{x}$ является пара элементов X, являющихся соответственно наименьшим и наибольшим элементами $\mathfrak{x}$. Очевидно, что $(\mathfrak{X}_\omega, X, \lambda_\omega)$ будет в этом случае диаграммой, которую будем называть диаграммой всех псевдосегментов упорядоченного множества (X, ω). Легко видеть, что отношение порядка ω будет отношением смыкаемости для диаграммы $(\mathfrak{X}_\omega, X, \lambda_\omega)$.

Теорема 8. *Частичный бинарный оператив* $(\mathfrak{X}_\omega, \circ_\omega)$, *где* $\mathfrak{X}_\omega$ — *множество всех псевдосегментов упорядоченного множества* (X, ω) *и* $\circ_\omega$ — *частичная бинарная операция в нем, определяемая формулой*

$$\circ_\omega = \underset{(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3)}{\complement} (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3 \in \mathfrak{X}_\omega \wedge (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) \in \alpha_\omega \wedge \mathfrak{x}_1 \cup \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_3), \tag{37}$$

в которой α_ω *означает отношение примыкаемости диаграммы всех псевдосегментов в* (X, ω), *является локально линейной категорией, диаграммируемой диаграммой* $(\mathfrak{X}_\omega, X, \lambda_\omega)$.

Доказательство. Легко видеть, что объединение $\mathfrak{x}_1 \cup \mathfrak{x}_2$ двух примыкающих псевдосегментов $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \in \mathfrak{X}_\omega$ будет также псевдосегментом, наименьший элемент которого совпадает с наименьшим элементом $\mathfrak{x}_1$, а наибольший элемент — с наибольшим элементом $\mathfrak{x}_2$:

$$(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) \in \alpha_\omega \to \mathfrak{x}_1 \cup \mathfrak{x}_2 \in \mathfrak{X}_\omega \wedge \lambda_{s\omega}(\mathfrak{x}_1 \cup \mathfrak{x}_2) = \lambda_{s\omega}(\mathfrak{x}_1) \wedge \lambda_{d\omega}(\mathfrak{x}_1 \cup \mathfrak{x}_2) = \lambda_{d\omega}(\mathfrak{x}_2), \tag{38}$$

где через $\lambda_{s\omega}$ и $\lambda_{d\omega}$ обозначаются левый и правый вершинные проекторы диаграммы $(\mathfrak{X}_\omega, X, \lambda_\omega)$. Очевидно, что (38) выражает, что диаграмма $(\mathfrak{X}_\omega, X, \lambda_\omega)$ диаграммирует частичный бинарный оператив $(\mathfrak{X}, \circ_\omega)$. В частности, имеем отсюда, что отношение определенности δ_ω для $(\mathfrak{X}, \circ_\omega)$ совпадает с отношением примыкаемости для

$(\mathfrak{X}_\omega, X, \lambda_\omega)$, т. е. $\delta_\omega = \alpha_\omega$. Далее заметим, что частичная бинарная операция $\circ_\omega$ является ограничением относительно α_ω операции объединения пары подмножеств в $\mathfrak{R}(X)$, и потому, в силу ассоциативности этой последней, будет слабо ассоциативна[1].

Легко видеть, что всякий диаграммируемый частичный бинарный оператив [3] со слабо ассоциативной частичной бинарной операцией является полукатегорией. Таким образом, $(\mathfrak{X}_\omega, \circ_\omega)$ будет полукатегорией. Далее, замечая, что единичными элементами $(\mathfrak{X}_\omega, \circ_\omega)$ являются одноэлементные псевдосегменты, получаем, что левой единичной проекцией псевдосегмента $\mathfrak{x}$ является одноэлементный псевдосегмент $\{\lambda_{s\omega}(\mathfrak{x})\}$, а правой единичной проекцией — одноэлементный псевдосегмент $\{\lambda_{d\omega}(\mathfrak{x})\}$; это означает, что полукатегория $(\mathfrak{X}_\omega, \circ_\omega)$ является единично проектируемой и, следовательно, будет категорией. Пользуясь (7), нетрудно убедиться, что отношение двусторонней транзитивности $\tau_{b\omega}$ категории $(\mathfrak{X}_\omega, \circ_\omega)$ является множеством всех пар $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ псевдосегментов, где $\mathfrak{x}_1$ является главным сегментом $\mathfrak{x}_2$. Отсюда, главный коидеал $\overset{-1}{\tau_b}\langle\mathfrak{x}\rangle$ будет множеством всех главных сегментов псевдосегмента $\mathfrak{x}$. Далее, легко показать, что объединение двух примыкающих главных сегментов псевдосегмента $\mathfrak{x}$ будет также главным сегментом $\mathfrak{x}$; это означает, что главный коидеал $\overset{-1}{\tau_b}\langle\mathfrak{x}\rangle$ является стабильным подмножеством категории $(\mathfrak{X}_\omega, \circ_\omega)$. Таким образом, $(\mathfrak{X}_\omega, \circ_\omega)$ является локализованной категорией. Локальная подкатегория, порождаемая псевдосегментом $\mathfrak{x}$, будет диаграммироваться диаграммой $(\overset{-1}{\tau_b}\langle\mathfrak{x}\rangle, \varkappa_\omega(\mathfrak{x}), \lambda_{\mathfrak{x}})$, где $\lambda_{\mathfrak{x}}$ является ограничением λ_ω на $\overset{-1}{\tau_b}\langle\mathfrak{x}\rangle$ и, очевидно, будет взаимно однозначным отображением. Далее очевидно, что отношение смыкаемости этой диаграммы будет совпадать с линейным отношением порядка $\omega_{\varkappa_\omega(\mathfrak{x})}$, индуцированным на $\varkappa_\omega(\mathfrak{x})$ отношением порядка ω. Таким образом, все локальные подкатегории категории $(\mathfrak{X}_\omega, \circ_\omega)$ будут линейными, значит $(\mathfrak{X}_\omega, \circ_\omega)$ будет локально линейной категорией.

Псевдосегмент упорядоченного множества, являющийся цепью, будем называть цепным. Множество всех цепных псевдосегментов упорядоченного множества (X, ω) обозначим через $X_{\omega c}$. Легко видеть, что $\mathfrak{X}_{\omega c}$ будет смыкающим стабильным коидеалом категории $(\mathfrak{X}_\omega, \circ_\omega)$ и, следовательно, будет определять каноническую подкатегорию $(\mathfrak{X}_{\omega c}, \circ_{\omega c})$ этой последней, которую будем называть категорией всех цепных псевдосегментов упорядоченного множества (X, ω). Согласно теореме 7 $(\mathfrak{X}_{\omega c}, \circ_{\omega c})$ — локальная линейная категория.

Теорема 9. *Для локально линейной категории* $(A, \circ)$ *инцидентное полуглобальное отображение* $\tilde{\iota}$ *является ее сильным функ-*

---

[1] Частичная бинарная операция частичного бинарного оператива $(A, \circ)$ называется слабо ассоциативной, если она удовлетворяет условию $(\{a_1\}\{a_2\})\{a_3\} \neq \neq \varnothing \wedge \{a_1\}\{a_2\}a_3\}) \neq \varnothing \to (\{a_1\}\{a_2\})\{a_3\} = \{a_1\}(\{a_2\}\{a_3\})$. Очевидно, что ограничение $\circ \circ \Delta_\rho$ слабо ассоциативной частичной бинарной операции $\circ$ относительно произвольного бинарного отношения ρ в A будет также слабо ассоциативной частичной бинарной операцией.

тором в категорию $(\mathfrak{E}_{\beta c}, \circ_{\beta c})$ *всех цепных псевдосегментов упорядоченного множества* (E, β), *причем образом* $(A, \circ)$ *будет каноническая подкатегория категории* $(\mathfrak{E}_{\beta c}, \circ_{\beta c})$.

Доказательство. Если $(A, \circ)$ — локально линейная категория, то, как было показано при доказательстве теоремы 6, бинарное отношение $\overset{\cup}{\eta}{}^{-1}(\tau_b\langle a\rangle)$ является линейным отношением порядка в подмножестве $\iota\langle a\rangle$. Замечая, что отношение смыкаемости β для $(A, \circ)$ является согласно теореме 5 отношением порядка, обозначим через β_a индуцируемое β в $\iota\langle a\rangle$ отношение порядка. Очевидно, что $\overset{\cup}{\eta}{}^{-1}(\tau_b\langle a\rangle)\subset\beta_a$. Так как, будучи линейным отношением порядка, $\overset{\cup}{\eta}{}^{-1}(\tau_b\langle a\rangle)$ должно быть максимальным среди всех отношений порядка в множестве $\iota\langle a\rangle$, то из этого включения следует, что β_a и $\overset{\cup}{\eta}{}^{-1}(\tau_b\langle a\rangle)$ совпадают:

$$\beta_a=\iota\langle a\rangle\times\iota\langle a\rangle\cap\beta=\overset{\cup}{\eta}{}^{-1}(\tau_b\langle a\rangle). \tag{39}$$

Таким образом, мы доказали, что подмножества $\iota\langle a\rangle$ являются цепями упорядоченного множества (E, β). При этом очевидно, что $\eta_s(a)$ в $\eta_d(a)$ являются соответственно наименьшим и наибольшим элементами $\iota\langle a\rangle$ и, следовательно, подмножества $\iota\langle a\rangle$ являются цепными псевдосегментами.

Далее, легко видеть, что из единичной простоты локально линейной категории $(A, \circ)$ следует

$$\iota\langle e\rangle=\{e\}; \tag{40}$$

это означает, что инцидентное полуглобальное отображение $\tilde{\iota}$, являясь гомоморфизмом $(A, \circ)$ в полугруппу $(\mathfrak{P}(E), \circ_{\cup})$, будет функтором $(A, \circ)$ в категорию $(\mathfrak{E}_{\beta c}, \circ_{\beta c})$. Нетрудно убедиться, что то, что функтор одной категории в другую является сильным, т. е. представляет собой сильный гомоморфизм, эквивалентно тому, что его ограничение на множестве всех единичных элементов первой категории взаимно однозначно. Из (40) получаем $\tilde{\iota}\circ\Delta_E=\tilde{\Delta}_E$, что означает, что функтор $\tilde{\iota}$ удовлетворяет этому условию и, следовательно, является сильным. Из того, что $\eta\circ\Delta_{\overset{-1}{\tau_b}\langle a\rangle}$ будет взаимно однозначным отображением $\overset{-1}{\tau_b}\langle a\rangle$ на β_a, очевидным образом следует, что $\tilde{\iota}\circ\Delta_{\overset{-1}{\tau_b}\langle a\rangle}$ будет взаимно однозначным отображением $\overset{-1}{\tau_b}\langle a\rangle$ на множество всех сегментов линейно упорядоченного множества $(\iota\langle a\rangle, \beta_a)$. Таким образом, получаем, что если цепной псевдосегмент e принадлежит $\mathrm{pr}_2\tilde{\iota}$, то и все сегменты e также принадлежат $\mathrm{pr}_2\tilde{\iota}$; это означает, что $\mathrm{pr}_2\tilde{\iota}$ является коидеалом категории $(\mathfrak{E}_{\beta c}, \circ_{\beta c})$.

Смыкаемость пары $(\{e_1\}, \{e_2\})$ единичных элементов категории $(\mathfrak{E}_{\beta c}, \circ_{\beta c})$, очевидно, эквивалентна смыкаемости пары (e_1, e_2) единичных элементов категории $(A, \circ)$. Если a — элемент, смыкающий пару (e_1, e_2), то очевидно, что элемент $\iota\langle a\rangle$ из $\mathrm{pr}_2\tilde{\iota}$ будет смыкать пару $(\{e_1\}, \{e_2\})$ единичных элементов категории $(\mathfrak{E}_{\beta c}, \circ_{\beta c})$. Это означает, что $\mathrm{pr}_2\tilde{\iota}$ является смыкающим подмножеством категории

$(\mathfrak{E}_{\beta c}, \circ_{\beta c})$. Наконец, из того, что $\tilde{\iota}$ — сильный гомоморфизм, непосредственно следует, что $\mathrm{pr}_2\tilde{\iota}$ — стабильное подмножество. Таким образом, получаем, что $\mathrm{pr}_2\tilde{\iota}$ определяет каноническую подкатегорию категории $(\mathfrak{E}_{\beta c}, \circ_{\beta c})$, чем и заканчивается доказательство теоремы.

Инцидентно определенную локально линейную категорию будем называть частично линейной категорией. Легко убедиться, что всякая линейная категория будет также и частично линейной. Как непосредственное следствие теоремы 6, вытекает

Теорема 10. *То, что категория частично линейна, эквивалентно тому, что она интрарегулярна, единично проста и инцидентно мономорфируема.*

Теорема 11. *Всякая стабильная коидеальная подкатегория частичной линейной категории будет также частично линейной категорией.*

Доказательство. Пользуясь (32), получаем, что всякая стабильная коидеальная подкатегория инцидентно определенной категории будет также инцидентно определенной категорией. Отсюда, пользуясь теоремой 7, получаем доказываемую теорему.

Теорема 12. *Класс всех частично линейных категорий совпадает с классом всех категорий, изоморфных каноническим подкатегориям категорий всех цепных псевдосегментов упорядоченных множеств.*

Доказательство. Докажем, что категория $(\mathfrak{X}_{\omega c}, \circ_{\omega c})$ всех цепных псевдосегментов произвольного упорядоченного множества (X, ω) является частично линейной; это эквивалентно доказательству того, что она является инцидентно определенной. Действительно, обозначая через $\iota_{\omega c}$ отношение инцидентности для $(\mathfrak{X}_{\omega c}, \circ_{\omega c})$, имеем для произвольного цепного псевдосегмента $\mathfrak{x}$

$$\iota_{\omega c}\langle\mathfrak{x}\rangle = \overset{\sim}{\Delta}_X(\mathfrak{x}), \tag{41}$$

откуда очевидным образом следует, что $\iota_{\omega c}$ будет взаимно однозначным. Отсюда согласно теореме 11 получаем, что всякая стабильная коидеальная подкатегория категории $(\mathfrak{X}_{\omega c}, \circ_{\omega c})$, а следовательно всякая каноническая подкатегория, будет частично линейна. С другой стороны, из теоремы 9 следует, что для каждой частично линейной категории $(A, \circ)$ инцидентное полуглобальное отображение $\tilde{\iota}$ будет ее изоморфизмом на каноническую подкатегорию категории $(\mathfrak{E}_{\beta c}, \circ_{\beta c})$ всех цепных псевдосегментов упорядоченного множества (E, β), чем и заканчивается доказательство теоремы.

Очевидно, что каждый цепной псевдосегмент $\mathfrak{x}$ упорядоченного множества (X, ω) можно рассматривать как цепь сегмента $[\lambda_s(\mathfrak{x}), \lambda_d(\mathfrak{x})]$. Если при этом $\mathfrak{x}$ является максимальной цепью $[\lambda_s(\mathfrak{x}), \lambda_d(\mathfrak{x})]$, то $\mathfrak{x}$ называется полным цепным псевдосегментом. Множество всех полных цепных псевдосегментов упорядоченного множества (X, ω) обозначим через $\mathfrak{X}_{\omega m}$. Легко видеть, что $\mathfrak{X}_{\omega m}$ будет смыкающим стабильным коидеалом категории $(\mathfrak{X}_{\omega c}, \circ_{\omega c})$ и, следовательно, будет определять каноническую подкатегорию $(\mathfrak{X}_{\omega m}, \circ_{\omega m})$ этой последней, которую будем называть категорией всех полных цепных псевдосегментов упорядоченного множества (X, ω). Оче-

видно, что $(\mathfrak{X}_{\omega m}, \circ_{\omega m})$ будет также канонической подкатегорией и категории $(X_\omega, \circ_\omega)$.

Локально линейная категория $(A, \circ)$ называется полной, если все элементарные срезы $\iota\langle a\rangle$ ее отношения инцидентности, являющиеся согласно теореме 9 цепными псевдосегментами упорядоченного множества (E, β), где β — отношение смыкаемости единичных элементов, будут полными цепными псевдосегментами.

Легко убедиться, что всякая линейная категория будет полной.

Теорема 13. *Всякая стабильная коидеальная подкатегория полной локально линейной категории будет также полной локально линейной категорией.*

Доказательство. Теорема непосредственно следует из теоремы 7 и формулы (32).

Теорема 14. *Класс всех полных частично линейных категорий совпадает с классом всех категорий, изоморфных каноническим подкатегориям категорий всех полных цепных псевдосегментов упорядоченных множеств.*

Доказательство. Очевидно, что в силу (41) категория $(\mathfrak{X}_{\omega m}, \circ_{\omega m})$ всех полных цепных псевдосегментов произвольного упорядоченного множества (X, ω) является полной частично линейной категорией. Отсюда согласно теореме 13 всякая каноническая подкатегория категории всех полных цепных псевдосегментов упорядоченного множества будет полной частичной категорией. Обратно, согласно теореме 12 всякая полная частично линейная категория будет изоморфна канонической подкатегории категории всех полных цепных псевдосегментов упорядоченного множества.

г. Саратов

Поступила
24 IX 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Вагнер В. В. Полупрямое произведение бинарных отношений и бинарно разложимые полугруппы. Изв. вузов, Матем., 1963, № 1, с. 21—32.
2. Вагнер В. В. Теория отношений и алгебра частичных отображений. В сб.: „Теория полугрупп и ее приложения“, Изд. Саратовск. ун-та, 1965, с. 3—178.
3. Вагнер В. В. Диаграммируемые полугруппоиды и обобщенные группоиды. Изв. вузов, Матем., 1967, № 10, с. 11—23.
4. Вагнер В. В. Бинарно разложимые категории. Изв. вузов, Матем., 1969, № 4, с. 3—13.
5. Clifford A. H., Preston G. B. The algebraic theory of semigroups, v. 1. Math. Surveys № 7 Amer. Math. Soc., 1961.

Г. П. ГУБАНОВ. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ НАИЛУЧШЕГО (КВАДРАТИЧЕСКОГО) ПРИБЛИЖЕНИЯ

(аннотация статьи, принятой к печати)

Получена оценка верхней грани уклонений функций класса H_ω от тригонометрических полиномов наилучшего (квадратического) приближения в заданной системе точек. Полученная оценка распространяется на двумерный случай. (Работа поступила в журнал „Математика“ 18. II. 1969.)