I. Ya. Gol'dbaum, New Bound for the Number of Signals in Binary Codes with Asymmetrical Error Correction,
Probl. Peredachi Inf., 1977, Volume 13, Issue 1, 102–104

ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том XIII 1977 Вып. 1

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 621.391.15:519.2

НОВАЯ ОЦЕНКА ЧИСЛА СИГНАЛОВ В ДВОИЧНЫХ КОДАХ С КОРРЕКЦИЕЙ НЕСИММЕТРИЧЕСКИХ ОШИБОК

И. Я. Гольдбаум

Приводится новая верхняя оценка мощности двоичных кодов, позволяющих исправлять от 1 до r ошибок вида $1 \to 0$, полученная как приближенное решение двойственной задачи линейного программирования.

Основной результат данной работы может быть сформулирован следующим образом: для двоичного кода длины n, позволяющего исправлять от 1 до r ошибок вида $1 \to 0$, имеет место следующая оценка числа сигналов (мощности):

$$M \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{[n/(r+1)]} \left(\sum_{i=(k-1)(r+1)+1}^{k(r+1)} C_n^i \Big/ \sum_{j=0}^{r} C_{k(r+1)}^{j} \right), \tag{1}$$

где $[x]$ — целая часть x.

В [1] для получения оценки M сверху в численном виде решалась задача линейного программирования на отыскание максимума целевой функции $\sum\limits_{i=0}^{n} g_i$ при условиях

$$g_i \geqslant 0 \qquad (i=\overline{0,n}),$$

$$\sum_{i=t}^{t+r} g_i C_i^t \leqslant C_n^t \qquad (t=\overline{0,n}).$$

Руководствуясь общими правилами [2], выпишем двойственную к ней задачу

$$\sum_{t=0}^{n} u_t C_n^t \to \min \tag{2}$$

при условиях

$$u_t \geqslant 0 \qquad (t=\overline{0,n}), \tag{3}$$

$$\begin{array}{l}
C_0^0 u_0 \geqslant 1, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
C_r^r u_0 + C_r^{r-1} u_1 + \ldots + C_r^0 u_r \geqslant 1, \\
C_{r+1}^r u_1 + C_{r+1}^{r-1} u_2 + \ldots + C_{r+1}^1 u_r + C_{r+1}^0 u_{r+1} \geqslant 1, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
C_{2r+1}^r u_{r+1} + C_{2r+1}^{r-1} u_{r+2} + \ldots + C_{2r+1}^0 u_{2r+1} \geqslant 1, \\
C_{2r+2}^r u_{r+2} + C_{2r+2}^{r-1} u_{r+3} + \ldots + C_{2r+2}^1 u_{2r+1} + C_{2r+2}^0 u_{2r+2} \geqslant 1, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
C_{k(r+1)-1}^r u_{k(r+1)-1-r} + C_{k(r+1)-1}^{r-1} u_{k(r+1)-r} + \ldots + C_{k(r+1)-1}^0 u_{k(r+1)-1} \geqslant 1, \\
C_{k(r+1)}^r u_{k(r+1)-r} + C_{k(r+1)}^{r-1} u_{k(r+1)-(r-1)} + \ldots + C_{k(r+1)}^1 u_{k(r+1)-1} + C_{k(r+1)}^0 u_{k(r+1)} \geqslant 1, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
C_n^r u_{n-r} + C_n^{r-1} u_{n-r+1} + \ldots + C_n^1 u_{n-1} + C_n^0 u_n \geqslant 1.
\end{array} \tag{4}$$

Как известно [2], любая совокупность значений переменных $U^*=(u_0^*, u_1^*, \dots, u_n^*)$, удовлетворяющая условиям (3) и (4), при подстановке в (2) даст оценку сверху оптимального значения целевой функции прямой задачи, т. е.

$$M \leqslant \sum_{t=0}^{n} C_n^t u_t^*. \tag{5}$$

Совокупность U^* можно, в частности, найти с помощью достаточно общей процедуры, описываемой ниже.

Пусть условия двойственной задачи имеют вид

$$u_t \geqslant 0 \qquad (t=\overline{0,\ m}), \tag{6}$$

$$\sum_{t=0}^{m} a_{it} u_t \geqslant z_i \qquad (i=\overline{0,n}), \tag{7}$$

причем по смыслу задачи $z_i>0$, $a_{it}\geqslant 0$ $(i=\overline{0,\ n};\ t=\overline{0,\ m})$.

Найдем минимальную из $n+1$ сумм

$$\sigma_i = \frac{1}{z_i} \sum_{t=0}^{m} a_{it} \qquad (i=\overline{0,n}) \tag{8}$$

и выделим из (7) соответствующее неравенство-ограничение (если это значение принимают сразу несколько сумм, остановимся на том из соответствующих неравенств, которое имеет наименьший «порядковый» номер i). Припишем всем переменным, входящим в выделенное неравенство с ненулевыми коэффициентами, одно и то же значение $1/\sigma_i$ и подставим их во все неравенства. Вычитая образующиеся при этом в левых частях некоторых неравенств свободные члены из их правых частей и отбрасывая те неравенства, правые части которых оказались меньше или равны 0, получим сокращенную систему неравенств, к которой вновь можно применить тот же прием и определить значения, которые нужно приписать следующей группе переменных. Применяя прием многократно, можно, «исчерпав» систему (7), получить совокупность U^*, заведомо удовлетворяющую условиям (6) и (7), т. е. обеспечивающую получение оценки сверху оптимального значения целевой функции прямой задачи.

В частности, для задачи (2) – (4) $z_0=z_1=\dots=z_n=1$, $m=n$, а сумма коэффициентов при переменных в i-м неравенстве системы (4) равна V_i – объему сферы притяжения кодовой комбинации с весом Хэмминга i. Поскольку для рассматриваемых кодов заведомо $V_0<V_1<\dots<V_i<\dots<V_n$, а для биномиальных коэффициентов справедливо соотношение

$$\sum_{i=0}^{r} C_{k(r+1)}^{i} \leqslant \sum_{i=1}^{r} C_{k(r+1)+1}^{i} \leqslant \dots \leqslant C_{k(r+1)+r}^{r}, \tag{9}$$

то, применяя описанную процедуру к (4), получаем совокупность

$$\begin{aligned} &u_0^*=1,\\ &u_1^* = u_2^* = \dots = u_{r+1}^* = 1 \Big/ \sum_{i=0}^{r} C_{r+1}^{i},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &u_{k(r+1)-r}^* = u_{k(r+1)-(r-1)}^* = \dots = u_{k(r+1)}^* = 1 \Big/ \sum_{i=0}^{r} C_{k(r+1)}^{i} \end{aligned} \tag{10}$$

с $k_{\max}=[n/(r+1)]$, подстановка которой в (5) дает оценку (1).

Оценка Варшамова [3] при $r=1$ имеет вид $M\leqslant 2^{n+1}/(n+2)$, а оценка (1) при $r=1$ может быть представлена в таком виде:

$$M \leqslant \begin{cases} \dfrac{2^{n+1}}{n+2} & \text{при четном } n,\\[2ex] \dfrac{2^{n+1}}{n+2} - \dfrac{1}{n+2} & \text{при нечетном } n. \end{cases}$$

n	M								
	$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$	$r=6$	$r=7$	$r=8$	$r=9$
7	28	12	7	4	3	2			
8	51	21	12	8	4	3	2		
9	93	35	20	13	8	4	3	2	
10	170	60	33	22	14	8	4	3	2
11	315	102	53	36	24	15	8	4	3
12	585	177	87	58	41	27	15	8	5
13	1092	309	142	92	68	46	28	16	8
14	2048	542	233	145	110	80	51	30	16
15	3855	959	387	228	173	132	90	55	31
16	7281	1708	649	360	268	214	155	100	58
17	13797	3059	1098	574	413	339	260	176	107

n	M						
	$r=10$	$r=11$	$r=12$	$r=13$	$r=14$	$r=15$	$r=16$
11	2						
12	3	2					
13	5	3	2				
14	8	5	3	2			
15	16	8	5	3	2		
16	31	16	8	5	3	2	
17	60	32	16	9	5	3	2

При других значениях r, как это следует из сравнения таблицы с работой [1], во всех просчитанных точках найденная оценка лучше оценки Варшамова.

Оценка (1) практически во всех просчитанных точках хуже, чем полученная в [1], но зато представлена в более удобной для подсчета форме.

Основным преимуществом оценки (1) по сравнению с [3, 4], по-видимому, является то, что ею можно пользоваться при больших значениях r (соответственно $>n/2$ и $>n/4$), которые несомненно представляют интерес, поскольку могут быть реализованы в кодах соответствующего класса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольдбаум И. Я.* Об оценке числа сигналов в кодах с коррекцией несимметрических ошибок. Автоматика и телемеханика, 1971, 32, *11*, 94–97.
2. *Гольштейн Е. Г.* Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М., «Наука», 1971.
3. *Варшамов Р. Р.* Оценка числа сигналов в кодах с коррекцией несимметрических ошибок. Автоматика и телемеханика, 1964, 25, *11*, 1628–1629.
4. *Бассальго Л. А.* Новые верхние границы для кодов, исправляющих ошибки. Проблемы передачи информации, 1965, 1, *4*, 41–44.

Поступила в редакцию
10 декабря 1974 г.

УДК 519.211:621.395.3:

ОПТИМАЛЬНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ ОЧЕРЕДЕЙ В МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПРИ КОСВЕННЫХ НАБЛЮДЕНИЯХ

А. А. Назаров

Рассмотрена двулинейная система обслуживания с одним входящим потоком и распределительным устройством, режим работы которого определяется косвенными наблюдениями за состояниями системы и задачей которого является распределение оптимальным образом заявок между обслуживающими приборами.

§ 1. Введение

Одной из важных задач теории связи является изучение управляемых систем передачи информации, интерпретируемых как системы массового обслуживания (СМО). Подобные задачи уже рассматривались ранее (например, в [1]). Как правило, рассматриваются СМО без обратной связи, т. е. случай, когда управление не зависит от состояния системы [2]. Ниже будет рассмотрена задача управления СМО при наличии обратной связи, причем в каждый момент управления известно не точное состояние системы, а приближенное. Примером такой системы может служить вычислительный комплекс, состоящий из нескольких ЭВМ и диспетчера, функцией которого является распределение поступающих программ между машинами. Вообще говоря, диспетчеру неизвестно точное состояние системы, например пото-