Ю. Ю. Абрамов, Приближенный метод решения кинетического уравнения вблизи границы. II. Температурный скачок, *ТВТ*, 1970, том 8, выпуск 5, 1013–1017

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР
Том 8 1970 № 5

УДК 532.51

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ.

II. ТЕМПЕРАТУРНЫЙ СКАЧОК

Ю. Ю. Абрамов

Получена приближенная формула для величины скачка температуры газа на стенке при произвольных коэффициентах аккомодации тангенциального импульса q и энергии $\varkappa$. Отличие приближенной формулы от известного точного результата при $q = 1$ менее 1,5%.

1. В работе [1] на основе приближенного метода, предложенного в [2], вычисляются коэффициенты скольжения газа вблизи поверхности. Сравнение с известными данными позволяет судить о точности метода. Показано, что в тех случаях, когда удается провести сравнение, ошибка, вносимая приближением, не превышает 1—2% [1, 2]. В данном сообщении тот же метод применяется для рассмотрения температурного скачка на границе между стенкой и газом, который имеет место в случае, когда вдоль нормали к поверхности существует градиент температуры [3, 4]. В [3, 4] этот вопрос рассматривается с помощью модельного уравнения БГК, закон отражения молекул от стенки предполагается чисто диффузный. В [5] предлагается вариационный метод для нахождения величины температурного скачка и вводится степень зеркальности стенки $(1 - q)$; однако считается, что молекулы, отражающиеся диффузно от границы, имеют температуру, равную температуре стенки.

Наше рассмотрение включает оба случая. Вводится два коэффициента аккомодации: тангенциального импульса q ($(1 - q)$ — степень зеркальности) и коэффициент аккомодации энергии $\varkappa$. При $q = 1$ (диффузное отражение) наш результат совпадает с результатом работ [3, 4], при $\varkappa = 1$ — с результатом работы [5]. Рассмотрение проводится на основе модельного кинетического уравнения БГК [4].

2. Запишем линеаризованное уравнение БГК для добавки $(\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{r}))$ к функции распределения $f(\mathbf{v}, \mathbf{r})$ в виде [1]

$$\tau v_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi = \frac{n_0}{(2\pi T_0 m^{-1})^{3/2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2T_0}\right) \times \left[1 + \frac{\delta n}{n_0} + \frac{\delta T}{T_0}\left(\frac{mv^2}{2T_0} - \frac{3}{2}\right)\right], \tag{1}$$

где τ — время релаксации, $\varphi = f - \dfrac{n_0}{(2\pi T_0 m^{-1})^{3/2}} \exp\left(-\dfrac{mv^2}{2T_0}\right) \ll f$,

$$n = n_0 + \delta n = \int f(\mathbf{v}, \mathbf{r})\, d\mathbf{v} = n_0 + \int \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{r})\, d\mathbf{v},$$

$$T = T_0 + \delta T = \frac{m}{3n} \int f(\mathbf{v}, \mathbf{r})\, v^2\, d\mathbf{v} = T_0 - T_0 \frac{\delta n}{n_0} + \frac{m}{3n_0} \int \varphi v^2\, d\mathbf{v},$$

ось x направлена по нормали к поверхности (в объеме, занимаемом газом, $x > 0$). В дальнейшем удобно ввести величину давления

$$P = \frac{m}{3}\int f(\mathbf{v}, \mathbf{r}) v^2 d\mathbf{v} = P_0 + \delta P = nT.$$

Величины n_0, T_0 и P_0 в написанных формулах представляют собой фиктивные значения плотности, температуры и давления газа на стенке, т. е. те значения этих величин, которые следует использовать в качестве граничных условий к уравнениям гидродинамики [4]. Величина температурного скачка по определению

$$\Delta T = T_0 - T_w \equiv -T_0 t_w,$$

где T_w — температура стенки. Граничное условие к уравнению (1) запишем через функцию $f(\mathbf{v}, x) = n_0\left(\frac{2\pi T_0}{m}\right)^{-3/2}\exp\left(-\frac{mv^2}{2T_0}\right) + \varphi(\mathbf{v}, x)$:

$$f(v_x, v_y, v_z, x = 0)_{v_x > 0} = (1 - q) f(-v_x, v_y, v_z, 0) + $$
$$+ q\frac{n_r}{\left(\frac{2\pi T_r}{m}\right)^{3/2}}\exp\left(-\frac{mv^2}{2T_r}\right), \tag{2}$$

где T_r и n_r — температура и плотность диффузно отраженных частиц. Величина n_r определяется из условия непроницаемости

$$j_x\Big|_{x=0} = \int f v_x d\mathbf{v} = \int \varphi(\mathbf{v}, x = 0) v_x d\mathbf{v} = 0, \qquad n_r\sqrt{T_r} = n_w\sqrt{T_w}. \tag{3}$$

Температура отраженных частиц T_r связана с температурой стенки T_w коэффициентом аккомодации энергии $\varkappa$ и находится из соотношения [4]

$$E_r = E_i - \varkappa(E_i - E_w), \tag{4}$$

где E_r — поток энергии отраженных частиц

$$E_r = \int_0^\infty v_x dv_x \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{mv^2}{2}\varphi\, dv_y dv_z, \tag{5}$$

E_i — поток энергии падающих частиц и E_w — значение E_r при $T_r = T_w$, $n_r = n_w$, т. е. при $\varkappa = 1$. Введем безразмерные координату и скорость

$$\xi = \frac{x}{\tau\sqrt{2T_0/m}}, \qquad c = \frac{v_x}{\sqrt{2T_0/m}}, \tag{6}$$

а также

$$t_0 = \delta T / T_0, \quad \Pi_0 = \delta P / P_0, \quad \nu_0 = \delta n / n_0 \quad \text{и} \quad t_r = T_r - T_0 / T_0,$$
$$\nu_r = n_r - n_0 / n_0, \quad t_w = (T_w - T_0) / T_0 \; (\Pi_0 = t_0 + \nu_0, \; \Pi_r = \nu_r + t_r). \tag{7}$$

Тогда интегрируя уравнение (1) по v_y, v_z с весом единица и с весом $mv^2/3$, получаем следующую систему для функций Π_0 и ν_0 ($t_0 = \Pi_0 - \nu_0$):

$$c\frac{\partial\nu}{\partial\xi} + \nu = \frac{e^{-c^2}}{\sqrt{\pi}}\left[\nu_0\left(\frac{3}{2} - c^2\right) - \Pi_0\left(\frac{1}{2} - c^2\right)\right], \tag{8}$$

$$c\frac{\partial\Pi}{\partial\xi}+\Pi=\frac{e^{-c^2}}{\sqrt{\pi}}\left[\nu_0\left(\frac{1}{3}+\frac{c^2}{3}-\frac{2}{3}c^4\right)+\Pi_0\left(\frac{1}{3}+\frac{c^2}{3}+\frac{2}{3}c^4\right)\right] \tag{9}$$

причем

$$\nu=\frac{1}{n_0}\sqrt{\frac{2T_0}{m}}\int\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\,dv_y\,dv_z,\qquad \Pi=\frac{m}{3n_0T_0}\sqrt{\frac{2T_0}{m}}\int\int_{-\infty}^{\infty}v^2\varphi\,dv_y\,dv_z, \tag{10}$$

так что

$$\nu_0=\int_{-\infty}^{\infty}\nu\,dc,\qquad \Pi_0=\int_{-\infty}^{\infty}\Pi\,dc,\qquad j_x=n_0\sqrt{\frac{2T_0}{m}}\int_{-\infty}^{\infty}\nu c\,dc. \tag{11}$$

Граничные условия к уравнениям (8), (9) следуют из (2) — (4):

$$\nu(c,\xi=0)_{c>0}=(1-q)\nu(-c,0)+q\frac{e^{-c^2}}{\sqrt{\pi}}\left[\nu_r\left(\frac{3}{2}-c^2\right)-\right.$$
$$\left.-\Pi_r\left(\frac{1}{2}-c^2\right)\right], \tag{12}$$

$$\Pi(c,\xi=0)_{c>0}=(1-q)\Pi(-c,0)+q\frac{e^{-c^2}}{\sqrt{\pi}}\left[\nu_r\left(\frac{1}{3}+\frac{c^2}{3}-\frac{2}{3}c^4\right)+\right.$$
$$\left.+\Pi_r\left(\frac{1}{3}+\frac{c^2}{3}+\frac{2}{3}c^4\right)\right], \tag{13}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\nu(c,\xi=0)c\,dc=0,\qquad \nu_r=\frac{1}{2}t_r=\nu_w+\frac{1}{2}t_w, \tag{14}$$

$$\int_{-\infty}\Pi(c\ \xi=0)c\,dc=\frac{2\varkappa q}{3(1-\varkappa)}\frac{t_w-t_r}{\sqrt{\pi}} \tag{15}$$

Нетрудно показать, что при $\xi\gg1$ решения системы (8), (9) линейно растут с ростом ξ, т. е.

$$\Pi_0=\alpha_\Pi\xi+\beta_\Pi,\qquad \nu_0=\alpha_\nu\xi+\beta_\nu\quad \text{при}\ \xi\gg1. \tag{16}$$

Из определения величин P_0 и n_0 следует, что

$$\beta_\Pi=0,\qquad \beta_\nu=0. \tag{17}$$

Поскольку константы β_ν и β_Π являются функциями от ν_r и Π_r, что следует из граничных условий (12), (13), то (17) позволяет найти выражение для ν_r и Π_r (или t_r), после чего требуемая нам, согласно (7), величина t_w определяется из условия (15).

3. Для определения величин $\beta_\Pi(\nu_r,\Pi_r)$ и $\beta_\nu(\nu_r,\Pi_r)$ поступим следующим образом [1]. Из уравнений (8), (9) следуют законы сохранения

$$K_\nu=\int_{-\infty}^{\infty}\nu(c,\xi)c\,dc=\text{const},\qquad K_\Pi=\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(c,\xi)c\,dc=\text{const} \tag{18}$$

и

$$L_\nu=\int_{-\infty}^{\infty}\nu c^2\,dc+K_\nu\xi=\text{const},\qquad L_\Pi=\int_{-\infty}^{\infty}\Pi c^2\,dc+K_\Pi\xi=\text{const}. \tag{19}$$

Величины $K_{\nu,\text{п}}$ и $L_{\nu,\text{п}}$ можно выразить через $\alpha_{\nu,\text{п}}$ и $\beta_{\nu,\text{п}}$ (см. (16)), поскольку из (8), (9) и (16) $\nu(c, \xi)$ и $\Pi(c, \xi)$ при $\xi \gg 1$ легко находятся. При этом получаем

$$K_\nu = -\frac{\alpha_\text{п}}{2}, \qquad K_\text{п} = \frac{5}{6}\alpha_\nu - \frac{5}{3}\alpha_\text{п}, \tag{20}$$

$$L_\nu = \frac{\beta_\text{п}}{2}, \qquad L_\text{п} = -\frac{5}{6}\beta_\nu + \frac{5}{3}\beta_\text{п}. \tag{21}$$

Из (14), (18) и (20) следует, что $\alpha_\text{п} = 0$, т. е. гидродинамическое давление не меняется вдоль нормали к стенке. Поскольку $t_0 = \Pi_0 - \nu_0$, то из (16) находим, что

$$t_0 = (T - T_0) / T_0 = -\alpha_\nu \xi, \qquad \xi \gg 1,$$

т. е.

$$\alpha_\nu = -\frac{1}{T_0}\frac{\partial T_\text{г}}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0}, \tag{22}$$

где $T_\text{г}$ — экстраполированная до стенки гидродинамическая температура газа (при $\xi \gg 1$ $T = T_\text{г}$).

Таким образом, из (21) и (19) следует, что

$$\beta_\text{п} = 2\int_{-\infty}^{\infty} c^2\nu(c, 0)\,dc, \qquad \beta_\nu = -\frac{6}{5}\int_{-\infty}^{\infty} c^2\Pi(c, 0)\,dc + 4\int_{-\infty}^{\infty} c^2\nu(c, 0)\,dc, \tag{23}$$

причем функции $\nu(c, 0)$ и $\Pi(c, 0)$ удовлетворяют условиям (18) и (20)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \nu(c, 0)\,dc = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(c, 0)\,c\,dc = -\frac{5}{6T_0}\frac{\partial T_\text{г}(0)}{\partial \xi}. \tag{24}$$

Величина температурного скачка (см. (15)) есть

$$\Delta T = T_0 - T_w = -T_0 t_w = -T_0 t_r + \frac{5}{4}\frac{(1-\varkappa)}{q\varkappa}\sqrt{\pi}\frac{\partial T_\text{г}(0)}{\partial \xi}. \tag{25}$$

Чтобы воспользоваться (17) для определения величины $t_r = \Pi_r - \nu_r$, поставим в (23) приближенные значения функций $\nu(c, 0)$ и $\Pi(c, 0)$, которые находятся из (8), (9) и (12), (13), если в (8) и (9) положить (см. (16))

$$\Pi_0 = \beta_\text{п}^{(1)}, \qquad \nu_0 = -\frac{1}{T_0}\frac{\partial T_\text{г}(0)}{\partial \xi}\xi + \beta_\nu^{(1)} \tag{26}$$

и для нахождения $\beta_\text{п}^{(1)}$ и $\beta_\nu^{(1)}$ потребовать выполнения условий (24). Поступая таким образом, находим

$$\beta_\text{п}^{(1)} = \frac{5}{16}\frac{\sqrt{\pi}(2-q)}{q}\frac{1}{T_0}\frac{\partial T_\text{г}(0)}{\partial \xi} + \nu_r + t_r,$$

$$\beta_\nu^{(1)} = -\frac{5}{16}\frac{\sqrt{\pi}(2-q)}{q}\frac{1}{T_0}\frac{\partial T_\text{г}}{\partial \xi} + \nu_r \tag{27}$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} c^2\nu(c, 0)\,dc \simeq \frac{(2-q)}{4\pi}\frac{1}{T_0}\frac{\partial T_\text{г}(0)}{\partial \xi} + \frac{\beta_\text{п}^{(1)}}{4}(2-q) + \frac{q}{4}(t_r + \nu_r), \tag{28}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} c^2\Pi(c,0)\,dc \simeq \frac{3(2-q)}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{T_0}\frac{\partial T_\text{г}(0)}{\partial\xi} -$$

$$-\frac{5}{12}\beta_\nu^{(1)}(2-q)+\frac{5}{6}\beta_\Pi^{(1)}(2-q)+\frac{5q}{12}(\nu_r+2t_r). \qquad (29)$$

Из (23) и (17) определяется величина t_r

$$t_r = -\frac{5}{8}\frac{\sqrt{\pi}(2-q)}{q}\left[1+\left(\frac{52}{25\pi}-\frac{1}{2}\right)q\right]\frac{1}{T_0}\frac{\partial T_\text{г}(0)}{\partial\xi}. \qquad (30)$$

Подставляя (30) в (25), находим окончательно

$$\Delta T = \frac{5}{8}\sqrt{\pi}\frac{2-a\varkappa q}{\varkappa q}\frac{\partial T_\text{г}(0)}{\partial\xi}, \qquad a = 0{,}676+0{,}162q. \qquad (31)$$

При $\varkappa = 1$ (31) совпадает с результатом, приведенным в [5]. При $q = 1$ величина a в (31) равна 0,838, что менее чем на 1,5% отличается от значения 0,827, полученного в [3] численным интегрированием систем (8), (9).

Институт атомной энергии
им. И. В. Курчатова

Поступила в редакцию
12 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Ю. Абрамов. Теплофизика высоких температур, 8, № 4, 1970.
2. Ю. Ю. Абрамов, А. П. Напартович. Теплофизика высоких температур, 6, 870, 1968.
3. P. Welander. Arkiv fys., 7, Häfte 6, 507, 1954.
4. М. Н. Коган. Динамика разреженного газа. «Наука», 1957.
5. S. K. Loyalka. J. Chem. Phys., 48, 5432, 1968.