С. Г. Пятков, Л. В. Неустроева, О разрешимости обратных задач об определении точечных источников, *Математические заметки СВФУ*, 2022, том 29, выпуск 2, 43–58

DOI: 10.25587/SVFU.2022.32.61.004

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2022. Том 29, № 2

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ

С. Г. Пятков, Л. В. Неустроева

Аннотация. Рассмотрен вопрос о разрешимости, единственности и некоторых качественных свойствах решений обратных задач об определении точечных источников (правой части специального вида) в параболическом уравнении. Описаны классы данных, для которых задача имеет решение, приведены некоторые результаты о существовании и единственности решений с данными из этих классов, а также асимптотические формулы для функции Грина стационарной задачи.

DOI: 10.25587/SVFU.2022.32.61.004

Ключевые слова: параболическое уравнение, обратная задача, начально-краевая задача, существование, единственность.

В работе рассматриваются обратные задачи об определении правой части в уравнении

$$u_t + Lu = \sum_{i=1}^{m} N_i(t)\delta(x - x_i) + f_0(t,x), \quad Lu = -\Delta u + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{x_i} + a_0(x)u, \tag{1}$$

где $(x,t) \in Q = (0,T) \times G$, G — область $\mathbb{R}^n$ $(n = 2,3)$ с границей $\Gamma \in C^2$. Уравнение (1) дополняется начальными и граничными условиями

$$Bu|_S = g, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad S = (0,T) \times \Gamma, \tag{2}$$

где $Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u$ или $Bu = u$ (ν — внешняя единичная нормаль к Γ), и условиями переопределения

$$u(y_j,t) = \psi_j(t), \quad j = 1,2,\dots,s. \tag{3}$$

В теории тепломассопереноса функция u — концентрация переносимого вещества, а правая часть характеризует источники (стоки) [1]. В самой общей постановке задачи (1)–(3) определению подлежат как сами мощности точечных источников $N_i(t)$, так и их местоположение x_i и их число m. Описание моделей такого сорта можно найти, например, в [1]. Обратным задачам такого вида посвящено очень большое количество работ, однако основные результаты связаны с методами численного решения подобных задач, причем многие из них далеко не всегда обоснованы. Можно строить примеры, когда постановки оказываются некорректными в том смысле, что имеет место несуществование решений или их неединственность. Очень часто методы основаны на сведении задачи к задаче оптимального управления и минимизации соответствующего функционала, что, как правило, требует больших вычислительных возможностей и не всегда приводит к желаемому результату [2–7]. Некоторые теоретические результаты по исследованию задачи (1)–(3) имеются в [8–12]. В [11] рассматривается стационарный случай, а в [10] и нестационарный, и граничные условия переопределения (данные Коши), что позволяет, используя наборы тестовых функций и алгоритмы типа Прони, полностью решить задачу определения числа источников, их местоположения и интенсивности. В [12] рассматривается модельная задача (1)–(3). С помощью явного представления решений прямой задачи и использования вспомогательной вариационной задачи авторы определили величины $\sum_i N_i r_{ij}^l$ (здесь $N_i(t) = \text{const}$ для всех i и $r_{ij} = |x_i - y_j|$), что позволило решить задачу при помощи алгоритма из [11] (см. теорему 2). Однако, как оказалось, можно решить задачу и при помощи асимптотических представлений решений стационарных задач [13]. В одномерном случае некоторые подобные результаты на эту тему приведены в [14] (асимптотическая формула определения источника и численный алгоритм). Каких-либо общих теорем существования решений задачи (1)–(3) фактически в литературе не имеется (см. одномерный случай в [14]). В настоящей работе приведена теорема существования и единственности решений в случае менее общей задачи, в нашем случае неизвестными являются только мощности источников, а координаты предполагаемых источников считаются известными. Полученное интегральное уравнение может быть использовано при численных расчетах в задачах определения мощностей. Также приведем некоторые асимптотические формулы для функции Грина стационарной задачи, аналогичные представленным в [13].

1. Определения и вспомогательные утверждения

Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$. Через $L_p(G)$ и $W_p^s(G)$ $(1 \le p \le \infty)$ обозначим пространства Лебега и Соболева соответственно [15]. Пусть E — банахово пространство. Через $L_p(G;E)$ (G — область в $\mathbb{R}^n$) обозначим пространство сильно измеримых функций, определенных на G, со значениями в E, наделенное конечной нормой $\| \|u(x)\|_E \|_{L_p(G)}$ [15]. Также используем пространства $C^k(\overline{G};E)$, состоящие из функций со значениями в E, имеющих в G все производные до порядка k включительно, непрерывные в G и допускающие непрерывное продолжение на замыкание $\overline{G}$. Определение пространств Соболева $W_p^s(G;E)$ также стандартное (см. [15–17]). Для данного интервала $J = (0,T)$, цилиндра $Q = G \times J$ и $S = \Gamma \times J$ положим

$$W_p^{s,r}(Q) = W_p^s(J; L_p(G)) \cap L_p(J; W_p^r(G)),$$
$$W_p^{r,s}(S) = W_p^s(J; L_p(\Gamma)) \cap L_p(J; W_p^r(\Gamma)).$$

Если Γ, S некоторые множества, то символ $\rho(\Gamma, S)$ обозначает расстояние между этими множествами. Обозначим через $D(L)$ область определения оператора L. Символ $B_r(x_0)$ обозначает шар радиуса r с центром в точке x_0.

Мы рассматриваем случай: G — область в $\mathbb{R}^n$ с компактной границей Γ класса C^2 (см. определение включения $\Gamma \in C^2$ в [18]). В случае неограниченной области G искомое решение принадлежит некоторому пространству Лебега, т. е. фактически предполагается убывание решения при $|x| \to \infty$. Пусть $\vec{a} = (a_1, a_2)$ для $n = 2$ и $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ для $n = 3$. Скобками $(\cdot, \cdot)$ обозначим скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Введем функцию

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (\vec{a}(x_0 + \tau(x - x_0)), (x - x_0))\, d\tau, \quad x_0 \in G.$$

Относительно коэффициентов уравнения (1) и граничного оператора (которые считаются вещественными) предположим, что

$$a_i \in W_\infty^2(G)\ (i = 1, \dots, n), \quad \nabla\psi, \Delta\psi, a_0 \in L_\infty(G), \quad \sigma \in C^1(\Gamma), \tag{4}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$-\Delta u + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} + a_0 u + \lambda u = \delta(x - x_0), \quad x \in G \subset \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

$$Bu|_\Gamma = 0. \tag{6}$$

Будем использовать следующую теорему (теорема 3.5 в [13]).

Теорема 1. *Пусть* $G = \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ *и выполнены условия* (4). *Фиксируем* $\delta_0 \in (0, \pi)$. *Тогда найдется* $\lambda_1 \geq 0$ *такое, что при всех* λ *с* $|\arg(\lambda - \lambda_1)| \leq \pi - \delta_0$ *решение* $u_n(x)$ $(n = 2, 3)$ *задачи* (5), (6) *допускает на любом компакте* K, *не содержащем точку* x_0, *представление вида*

$$u_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi|x - x_0|}\lambda^{1/4}} e^{\psi(x) - \sqrt{\lambda}|x - x_0|}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\right)\right); \tag{7}$$

$$u_{2x_i}(x) = \frac{-\lambda^{1/4} e^{\psi(x) - \sqrt{\lambda}|x - x_0|}}{2\sqrt{2\pi|x - x_0|}}\left(\frac{x_i - x_{0i}}{|x - x_0|} + O\left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\right)\right); \tag{8}$$

$$u_3(x) = \frac{1}{4\pi|x - x_0|} e^{\psi(x) - \sqrt{\lambda}|x - x_0|}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\right)\right); \tag{9}$$

$$u_{3x_i}(x) = \frac{-\sqrt{\lambda} e^{\psi(x) - \sqrt{\lambda}|x - x_0|}}{4\pi|x - x_0|}\left(\frac{x_i - x_{0i}}{|x - x_0|} + O\left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\right)\right). \tag{10}$$

Приведем теоремы разрешимости для задач (1), (2). Предположим, что

$$u_0(x) \in W_2^1(G), \quad u_0(x)|_\Gamma = g(x, 0), \quad \text{если } Bu = u. \tag{11}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$u_t + Lu = f_0(t, x), \quad Bu|_S = g, \quad u|_{t=0} = u_0(x). \tag{12}$$

Следующая теорема вытекает из теоремы 8.2 в [19].

Теорема 2. *Предположим, что выполнено условие* (11) *и* $a_i \in L_\infty(G)$ $(i = 0, 1, \dots, n)$. *Тогда найдется* $\lambda_0 \geq 0$ *такое, что для любых* $\lambda \geq \lambda_0$ *если* $e^{-\lambda t} f_0 \in L_2(Q)$, $e^{-\lambda t} g(x,t) \in W_2^{3/4,3/2}(S)$ *в случае граничных условий Дирихле или*
$e^{-\lambda t} g(x,t) \in W_2^{1/4,1/2}(S)$ *и* $\sigma \in C^1(\Gamma)$ *в противном случае, то существует единственное решение задачи* (12) *такое, что* $e^{-\lambda t} u \in W_2^{1,2}(Q)$.

Если $T < \infty$, то можем взять $\lambda_0 = 0$ и вышеупомянутая теорема может быть сформулирована так.

Теорема 3. *Предположим, что выполнено условие* (11) *и* $a_i \in L_\infty(G)$ $(i = 0, 1, \dots, n)$. *Тогда если* $f_0 \in L_2(Q)$, $g(x,t) \in W_2^{3/4,3/2}(S)$ *в случае граничных условий Дирихле или* $g(x,t) \in W_2^{1/4,1/2}(S)$ *и* $\sigma \in C^1(\Gamma)$ *в противном случае, то существует единственное решение задачи* (12) *такое, что* $u \in W_2^{1,2}(Q)$.

Рассмотрим еще одно вспомогательное уравнение

$$w_t + Lw + \lambda w = \sum_{i=1}^{m} N_i(t)\delta(x - x_i), \tag{13}$$

$$Bw|_S = 0, \quad w|_{t=0} = 0. \tag{14}$$

Пусть $W_{p,B}^1(G)$ — пространство функций $u \in W_p^1(G)$, удовлетворяющих однородным условиям Дирихле, если $Bu = u$, и $W_{p,B}^1(G) = W_p^1(G)$, если $Bu \neq u$. Обозначим через $W_{p,B}^{-1}(G)$ двойственное пространство к $W_{q,B}^1(G)$ (отношение двойственности задается скалярным произведением в $L_2(G)$, см. [20]).

Утверждение следующей теоремы содержится в теореме 2 из [19].

Теорема 4. *Пусть* $a_i \in L_\infty(G)$ $(i = 0, 1, \dots, n)$, $p \in (1, n/(n-1))$ *и* $\sigma \in C^1(\Gamma)$ *если* $Bu \neq u$. *Тогда найдется* $\lambda_0 \geq 0$ *такое, что для любых* $\lambda \geq \lambda_0$ *если* $e^{-\lambda t} N_i \in L_2(0,T)$, *то существует единственное решение задачи* (13), (14) *такое, что* $e^{-\lambda t} w \in L_2\big(0, \infty; W_{p,B}^1(G)\big)$ *и* $e^{-\lambda t} w_t \in L_2\big(0, \infty; W_{p,B}^{-1}(G)\big)$, $e^{-\lambda t} w \in W_2^{1,2}(Q_\varepsilon)$ *с* $Q_\varepsilon = \{(x,t) \in Q : \ |x - x_i| > \varepsilon \ \forall i \leq m\}$ *для всех* $\varepsilon > 0$.

Уравнение (13) выполняется в пространстве $L_2\big(0, T; W_{p,B}^{-1}(G)\big)$. Если $T < \infty$, то теорема может быть переформулирована по аналогии с теоремой 2.

2. Основные результаты

Для начала опишем условия на данные. Зафиксируем параметр $\lambda \geq \lambda_0$ (λ_0 — максимальный из параметров, определенных в теоремах 2, 4). Мы предполагаем, что

$$e^{-\lambda t} g \in W_2^{1/4,1/2}(S), \text{ если } Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u \ (\sigma \in C^1(\Gamma)), \tag{15}$$

$$e^{-\lambda t} g \in W_2^{3/4,3/2}(S), \text{ если } Bu = u, \ f_0 e^{-\lambda t} \in L_2(G). \tag{16}$$

В этом случае при выполнении условия (11) и условий теоремы 2 существует единственное решение w_0 вспомогательной задачи (12) такое, что $e^{-\lambda t} w_0 \in$

$W_2^{1,2}(Q)$. Рассмотрим обратную задачу (1)–(3). После замены переменных $w = u - w_0$ придем к более простой задаче

$$w_t + Lw = \sum_{i=1}^{m} N_i(t)\delta(x - x_i), \tag{17}$$

$$Bw|_S = 0, \quad w|_{t=0} = 0, \tag{18}$$

$$w(y_j, t) = \psi_j(t) - w_0(t, y_j) = \widetilde{\psi}_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, s. \tag{19}$$

Мы предполагаем, что справедливо представление

$$\widetilde{\psi}_j(t) = \int_0^t V_{\delta_j}(t - \tau)\psi_{0j}(\tau)\, d\tau, \quad \psi_{0j}e^{-\lambda t} \in L_2(0, T), \tag{20}$$

где $V_\gamma(t)$ определяется своим преобразованием Лапласа

$$\widehat{V}_\gamma(\lambda) = e^{-\sqrt{\lambda}\gamma},\ n = 3; \quad \widehat{V}_\gamma(\lambda) = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(i\sqrt{\lambda}\gamma),\ n = 2.$$

Здесь $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля и $\sqrt{\lambda} = |\lambda|^{1/2}e^{i\arg\lambda/2}$ — ветвь корня, аналитическая в плоскости с разрезом $\arg\lambda = \pi$. Нетрудно установить, что $V_\gamma(t) = \frac{e^{-\gamma^2/4t}}{4\pi t}$ при $n = 2$ и при $n = 3$ будет $V_\gamma = \frac{\gamma e^{-\gamma^2/4t}}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}}$. Второе равенство выводится в лемме 1.6.7 из [21]. Относительно первого отметим следующее. При $n = 2$ функция $\widehat{u}(x) = \widehat{V}_{|x|}(\lambda)$ — решение уравнения Гельмгольца $\lambda\widehat{u} - \Delta\widehat{u} = \delta(x)$ и (см. § 10, 11 в [22], § 3.6, 7.23 в [23]) на любом компакте, не содержащем 0, имеем

$$\widehat{V}_\gamma(\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi\gamma}\lambda^{1/4}}e^{-\sqrt{\lambda}\gamma}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\right)\right). \tag{21}$$

С другой стороны, решение задачи Коши

$$u_t - \Delta u = \delta(x),\ x \in \mathbb{R}^n, \quad u(0, x) = 0, \tag{22}$$

запишем в следующем виде (формула Пуассона):

$$u|_{|x|=\gamma} = \int_0^t \frac{e^{-\gamma^2/4(t-\tau)}}{4\pi(t - \tau)}\, d\tau.$$

Применяя преобразование Лапласа $\mathscr{L}$ к (22), получим

$$\mathscr{L}\left(\int_0^t \frac{e^{-\gamma^2/4(t-\tau)}}{4\pi(t - \tau)}\, d\tau\right) = \frac{1}{\lambda}\widehat{V}_\gamma(\lambda). \tag{23}$$

Имеем

$$\lambda\mathscr{L}\left(\int_0^t \frac{e^{-\gamma^2/4(t-\tau)}}{4\pi(t - \tau)}\, d\tau\right)(\lambda) = \mathscr{L}(\partial_t\int_0^t \frac{e^{-\gamma^2/4(t-\tau)}}{4\pi(t - \tau)}\, d\tau)(\lambda)$$

$$= \mathscr{L}\left(\int_0^t -\partial_\tau\frac{e^{-\gamma^2/4(t-\tau)}}{4\pi(t - \tau)}\, d\tau\right)(\lambda) = \mathscr{L}\left(\frac{e^{-\gamma^2/4t}}{4\pi t}\right) = \widehat{V}_\gamma(\lambda).$$

Таким образом, $\mathscr{L}V_\gamma(t)=\widehat{V}_\gamma(\lambda)$.

Далее считаем, что $m=s$ в (1)–(3). Введем множество

$$K=\left\{y\in G:\rho\left(y,\bigcup_{i=1}^{m}x_i\right)\le\rho(y,\Gamma)\right\}.$$

Можно отметить, что, используя стандартные методы продолжения функций (см. например, [15]), без ограничения общности можем считать, что все коэффициенты в уравнении определены на всем пространстве $\mathbb{R}^n$ и условия (4) выполнены с $G=\mathbb{R}^n$.

Введем функции

$$\varphi_j(x)=-\frac{1}{2}\int\limits_0^1(\vec{a}(y_j+\tau(x-y_j)),(x-y_j))\,d\tau$$

и предположим, что

$$a_i\in W^2_\infty(G)\ (i=1,\dots,n),\ \nabla\varphi_j,\Delta\varphi_j\ (j=1,\dots,s),\ a_0\in L_\infty(G),\ \sigma\in C^1(\Gamma),\tag{24}$$

Пусть $\delta_j=\min\limits_i r_{ij}$, $j=1,2,\dots,s$, где $r_{ij}=|x_i-y_j|$. Введем матрицу A_0 с элементами $a_{ji}=e^{\varphi_j(x_i)}$, если $|x_i-y_j|=\delta_j$, и $a_{ji}=0$ в противном случае. Условие корректности записывается в виде

$$\det A_0\neq 0.\tag{25}$$

Фиксируем $p\in(1,n/(n-1))$.

Теорема 5. *Пусть $T=\infty$, $m=s$, выполнены условия* (11), (24), (25) *и $y_i\in K$ для всех $i=1,2,\dots,s$. Тогда найдется $\lambda_0\ge 0$ такое, что при $\lambda\ge\lambda_0$ и выполнении условий* (15), (16), (20) *существует единственное решение задачи* (1)–(3) *такое, что $u=w_0+w$, w_0 есть решение вспомогательной задачи* (12), *$e^{-\lambda t}w_0\in W_2^{1,2}(Q)$, $e^{-\lambda t}\vec{N}\in L_2(0,\infty)$, $e^{-\lambda t}w\in L_2\big(0,\infty;W^1_{p,B}(G)\big)$, $e^{-\lambda t}w_t\in L_2\big(0,\infty;W^{-1}_{p,B}(G)\big)$, $e^{-\lambda t}w\in W_2^{1,2}(Q_\varepsilon)$ для всех $\varepsilon>0$.*

Доказательство. Найдем параметр λ_0 такой, что при $\lambda\ge\lambda_0$ и выполнении условий (15), (16) решение w_0 вспомогательной задачи (12) существует и единственно. После замены $u=w_0+w$ сведем обратную задачу (1)–(3) к задаче (17)–(19). Применяя преобразование Лапласа к уравнению (17), придем к задаче

$$L_0\widehat{w}=\lambda\widehat{w}+L\widehat{w}=\sum_{i=1}^{m}\widehat{N}_i(\lambda)\delta(x-x_i),\quad B\widehat{w}|_\Gamma=0,\tag{26}$$

$$\widehat{w}(y_j)=\widehat{\widehat{\psi}}_j,\quad j=1,2,\dots,s.\tag{27}$$

Вначале рассмотрим случай $Bu=\frac{\partial u}{\partial\nu}+\sigma u$. Построим сопряженный оператор

$$L^*v=-\Delta v-\sum_{i=1}^{n}a_iv_{x_i}+\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}a_{ix_i}\right)v$$

и рассмотрим задачу

$$\overline{\lambda}v_j + L^* v_j = \delta(x - y_j), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{28}$$

Найдется $\lambda_1 \geq \lambda_0$ такое, что при $\operatorname{Re}\lambda \geq \lambda_1$ решение этой задачи из класса $v_j \in W^1_{p,B}(G)$ существует, единственно и справедливы асимптотические представления из теоремы 1 (см. теорему 3.3 в [13]). Отметим, что $v_j \in W_2^2(G_j(\varepsilon))$, $G_j(\varepsilon) = \{x \in G : |x - y_j| \geq \varepsilon\}$ ($j = 1, \dots, s$, $\varepsilon > 0$). Этот факт легко позволяет обосновать интегрирование по частям и получить, используя (26), (28), формулу Грина вида

$$\widehat{w}(y_j) - \int\limits_\Gamma \left(\frac{\partial \widehat{w}}{\partial \nu} + \sigma \widehat{w}\right)\overline{v_j(x)}\, d\Gamma + \int\limits_\Gamma \left(\overline{\frac{\partial v_j}{\partial \nu} + \widetilde{\sigma} v_j}\right)\widehat{w}(x)\, d\Gamma = \sum_{i=1}^m \widehat{N}_i \overline{v_j(x_i)}, \quad \widetilde{\sigma} = \sigma + \sum_{i=1}^n a_i \nu_i. \tag{29}$$

Из граничного условия вытекает, что первый интеграл в левой части равенства (29) равен нулю. Используя также равенство (27), получим систему уравнений

$$\sum_{i=1}^m \widehat{N}_i \overline{v_j(x_i)} = \widehat{\widehat{\psi}}_j + \int\limits_\Gamma \widehat{w}(x) \left(\overline{\frac{\partial v_j}{\partial \nu} + \widetilde{\sigma} v_j}\right) d\Gamma, \quad j = 1, \dots, s, \tag{30}$$

где функция w — решение прямой задачи (17), (18) и эта функция определяется через функции N_i, функция $\widehat{w}$ — решение задачи (26). Воспользуемся теоремой 1. Тогда ($\overline{(\overline{\lambda})^{1/2}} = \lambda^{1/2}$)

$$\overline{v_j(x)} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi |x - y_j|}\lambda^{1/4}} e^{\varphi_j(x) - \sqrt{\lambda}|x - y_j|}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\right)\right) \quad (n = 2); \tag{31}$$

$$\overline{v_{jx_i}(x)} = \frac{-\lambda^{1/4} e^{\varphi_j - \sqrt{\lambda}|x - y_j|}}{2\sqrt{2\pi |x - y_j|}}\left(\frac{x_i - y_j^i}{|x - x_0|} + O\left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\right)\right) \quad (n = 2); \tag{32}$$

$$\overline{v_j(x)} = \frac{1}{4\pi |x - y_j|} e^{\varphi_j(x) - \sqrt{\lambda}|x - y_j|}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\right)\right) \quad (n = 3); \tag{33}$$

$$\overline{v_{jx_i}(x)} = \frac{-\sqrt{\lambda} e^{\varphi_j(x) - \sqrt{\lambda}|x - y_j|}}{4\pi |x - y_j|}\left(\frac{x_i - y_j^i}{|x - y_j|} + O\left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\right)\right) \quad (n = 3), \tag{34}$$

где y_j^i — i-я координата точки y_j. Равенства имеют место на любом компакте в $\mathbb{R}^n$ и, в частности, при $x \in \Gamma$. Рассмотрим, например, случай $n = 3$, случай $n = 2$ рассматривается аналогично. Умножим равенство (30) на $e^{\delta_j \sqrt{\lambda}}$. Тогда если используем равенство (33), то левую часть равенств (30) можно записать в виде $A(\lambda)\vec{\widehat{N}}$, где элементы матрицы $A(\lambda)$ имеют вид $\alpha_{ij}\big(1 + O\big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\big)\big)$ (α_{ij} — элементы матрицы A_0) и равенства (30) можно записать в виде

$$A(\lambda)\vec{\widehat{N}} = \vec{\alpha} + S_0(\vec{\widehat{N}}), \tag{35}$$

где координаты векторов $\vec{\alpha}, S_0(\vec{\widehat{N}})$ записываются в виде

$$\alpha_j = e^{\delta_j\sqrt{\lambda}}\widehat{\widetilde{\psi}}_j, \quad S_{0j} = e^{\delta_j\sqrt{\lambda}}\int\limits_{\Gamma}\widehat{w}(x)\overline{\left(\frac{\partial v_j}{\partial\nu} + \widetilde{\sigma}v_j\right)}\,d\Gamma, \quad j = 1,\dots,s.$$

Удобнее записать систему (35) в виде

$$\vec{\widehat{N}} = A(\lambda)^{-1}\vec{\alpha} + A(\lambda)^{-1}S_0(\vec{\widehat{N}}). \tag{36}$$

Без ограничения общности считаем, что матрица $A(\lambda)$ обратима при $\operatorname{Re}\lambda \geq \lambda_1$ и норма оператора $A^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ограничена одной и той же постоянной c_0 при всех $\operatorname{Re}\lambda \geq \lambda_1$, иначе увеличим величину λ_1. Оценим норму вектора $A(\lambda)^{-1}S_0(\vec{\widehat{N}})$. Для этого рассмотрим выражение

$$S_{0j} = e^{\delta_j\sqrt{\lambda}}\int\limits_{\Gamma}\widehat{w}(x)\overline{\left(\frac{\partial v_j}{\partial\nu} + \widetilde{\sigma}v_j\right)}\,d\Gamma. \tag{37}$$

Запишем представление для этого выражения:

$$e^{\delta_j\sqrt{\lambda}}\overline{\left(\frac{\partial v_j}{\partial\nu} + \widetilde{\sigma}v_j\right)} = -\sqrt{\lambda}\frac{e^{\varphi_j(x)-\sqrt{\lambda}(|x-y_j|-\delta_j)}}{4\pi|x-y_j|}\left(\frac{(x-y_j,\nu)}{|x-y_j|} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)$$
$$+ \widetilde{\sigma}\frac{e^{\varphi_j(x)-\sqrt{\lambda}(|x-y_j|-\delta_j)}}{4\pi|x-y_j|}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right). \tag{38}$$

Поскольку $y_j \in K$, имеем $\sqrt{|x-y_j|} - \delta_j \geq 0$ для $x \in \Gamma$, и тогда приходим к оценке

$$\left|e^{\delta_j\sqrt{\lambda}}\left(\frac{\partial v_j}{\partial\nu} + \widetilde{\sigma}v_j\right)\right| \leq C\sqrt{\lambda}, \tag{39}$$

для всех $\operatorname{Re}\lambda \geq \lambda_2 \geq \lambda_1$, где постоянная C не зависит от λ. Поскольку $\widehat{w}$ есть решение задачи (26), найдется $\lambda_3 \geq \lambda_2$ такое, что при всех $\operatorname{Re}\lambda \geq \lambda_3$ справедлива оценка

$$\|\widehat{w}\|_{W^1_{p,B}(G)} + |\lambda|\|\widehat{w}\|_{W^{-1}_{p,B}(G)} \leq c\left\|\sum_{i=1}^{m}\widehat{N}_i(\lambda)\delta(x-x_i)\right\|_{W^{-1}_{p,B}(G)} \leq C_1\|\vec{\widehat{N}}\|, \tag{40}$$

где постоянная C_1 не зависит от λ и под нормой вектора понимаем стандартную норму в $\mathbb{C}^m$. Утверждение вытекает из теоремы 37 в [22]. Введем функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, равную 1 в ε-окрестности G_ε границы Γ и нулю вне 2ε-окрестности Γ. Без ограничения общности считаем, что 2ε-окрестность Γ не содержит точек $\{y_j\}$ и $\{x_i\}$. Умножим уравнение (26) на φ. Имеем

$$L(\varphi\widehat{w}) + \lambda(\varphi\widehat{w}) = -2\nabla\varphi\cdot\nabla\widehat{w} - \Delta\varphi\widehat{w} + \sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_{x_i}\widehat{w} = g_0.$$

Ссылаясь на теорему 8.2 в [16] и (40) или снова на теорему 37 в [24], при всех $\operatorname{Re}\lambda \geq \lambda_3$ для некоторого $\lambda_3 \geq \lambda_2$ имеем

$$\|\varphi\widehat{w}\|_{W^2_p(G)} + |\lambda|\|\varphi\widehat{w}\|_{L_p(G)} \leq c\|g_0\|_{L_p(G)} \leq c_1\|\widehat{w}\|_{W^1_p(G)} \leq C_3\|\vec{\widehat{N}}\|. \tag{41}$$

Используя теоремы вложения, можем записать

$$\|\widehat{w}\|_{L_p(\Gamma)} \le c_3\|\widehat{w}\|_{W_p^{r_0}(G_\varepsilon)} \le \|\varphi\widehat{w}\|_{W_p^{r_0}(G)}, \quad r_0 = 1/p + \varepsilon_0, \tag{42}$$

где $\varepsilon_0 > 0$ — произвольный параметр, выберем его таким, чтобы $r_0 < 1$. Используя интерполяционные неравенства (см. [15]) и (42), приходим к оценке

$$\|\widehat{w}\|_{L_p(\Gamma)} \le \|\varphi\widehat{w}\|_{W_p^{r_0}(G)} \le c_4\|\varphi\widehat{w}\|^{r_0/2}_{W_p^2(G)}\|\varphi\widehat{w}\|^{1-r_0/2}_{L_p(G)} \le C_4|\lambda|^{r_0/2-1}\|\vec{\widehat{N}}\|. \tag{43}$$

Из (37), (39), (43) имеем

$$|S_{0j}| \le C\|\widehat{w}\|_{L_p(\Gamma)}\left\|e^{\delta_j\sqrt{\lambda}}\left(\frac{\partial v_j}{\partial \nu} + \widetilde{\sigma}v_j\right)\right\|_{L_q(\Gamma)} \le C_1|\lambda|^{(r_0-1)/2}\|\vec{\widehat{N}}\|, \tag{44}$$

где постоянная C_1 не зависит от λ. Отсюда получим оценку

$$\|A(\lambda)^{-1}S_0(\vec{\widehat{N}})\| \le c_0 m C_1|\lambda|^{(r_0-1)/2}\|\vec{\widehat{N}}\|. \tag{45}$$

Выберем параметр $\lambda_4 \ge \lambda_3$ такой, что при $\operatorname{Re}\lambda \ge \lambda_4$

$$c_0 m C_1|\lambda|^{(r_0-1)/2} = q < 1.$$

Тогда система уравнений (36) имеет единственное решение и справедлива оценка

$$\|\vec{\widehat{N}}\| \le \frac{1}{1-q}\|A(\lambda)^{-1}\vec{\alpha}\| \le \frac{c_0}{1-q}\|\vec{\alpha}\| \quad \forall \operatorname{Re}\lambda \ge \lambda_4. \tag{46}$$

Определив $\vec{\widehat{N}}$ как решение системы (36), построим функцию $\widehat{w}$ как решение уравнения (26). Покажем, что построенная функция $\widehat{w}$ удовлетворяет условиям (27). Действительно, имеем равенство (29). Учитывая равенства (30), которые эквивалентны системе (36), получим (27).

Выберем параметр $\lambda_5 \ge \lambda_4$ такой, что задача (17), (18) имеет при всех функциях N_i со свойством $N_i e^{-\lambda t} \in L_2(0,\infty)$ $(i = 1, \dots, m)$ единственное решение w из класса, указанного в формулировке теоремы. Это возможно (см. теорему 2 в [20]). Оценим правую часть в (46). Фиксируем $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что $\lambda \ge \lambda_5$, и предположим, что выполнено условие (20) с этим λ. В силу свойств преобразования Лапласа

$$\alpha_j = e^{\delta_j\sqrt{\lambda}}\widehat{V}_{\delta_j}(\lambda)\widehat{\psi}_{0j} = \widehat{\psi}_{0j}.$$

Из (46) вытекает, что (см. § 7 в [25])

$$\sup_{\gamma>\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\|\widehat{N}_i(\gamma+i\xi)\|^2\,d\xi \le C\sup_{\gamma>\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\|\widehat{\psi}_{0j}(\gamma+i\xi)\|^2\,d\xi$$
$$\le C\sum_{j=1}^{m}\|e^{-\lambda t}\psi_{0j}\|^2_{L_2(0,\infty)} < \infty. \tag{47}$$

Последнее влечет, что для вектор-функции $\widehat{\vec{N}}$ определено обратное преобразование Лапласа и справедлива оценка

$$\|e^{-\lambda t}\vec{N}\|_{L_2(0,\infty)} \leq C\sum_{i=1}^{m}\|e^{-\lambda t}\psi_{0j}\|_{L_2(0,\infty)} < \infty, \tag{48}$$

где $\vec{N} = \mathscr{L}^{-1}(\widehat{\vec{N}})$. Используя построенную функцию $\vec{N}$ и теорему 4, можем построить решение w задачи (17), (18) из требуемого в теореме класса. Легко понять, что функция w — искомое решение. Единственность такого решения очевидна, поскольку, применив преобразование Лапласа, придем к задаче (26), (27), единственность решения которой мы уже фактически доказали.

Рассмотрим случай $Bu = u$. Доказательство аналогично. Приведем основные отличия в доказательстве. Формула Грина (29) с учетом краевого условия запишется в виде

$$\widehat{w}(y_j) - \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial \widehat{w}}{\partial \nu}\overline{v_j(x)}\,d\Gamma = \sum_{i=1}^{m}\widehat{N}_i\overline{v_j(x_i)}. \tag{49}$$

Система (35) перепишется в виде

$$\widehat{\vec{N}} = A(\lambda)^{-1}\vec{\alpha} + A(\lambda)^{-1}S_0(\widehat{\vec{N}}), \tag{50}$$

где координаты векторов $\vec{\alpha}, S_0(\widehat{\vec{N}})$ записываются в виде

$$\alpha_j = e^{\delta_j\sqrt{\lambda}}\widehat{\psi}_j, \quad S_{0j} = -e^{\delta_j\sqrt{\lambda}}\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial \widehat{w}}{\partial \nu}\overline{v_j(x)}\,d\Gamma, \quad j = 1,\dots,s,$$

Вместо оценки (39) имеем оценку

$$|e^{\delta_j\sqrt{\lambda}}\overline{v_j}| \leq C, \tag{51}$$

где постоянная C не зависит от λ. Используя оценку (42), которая в этом случае также справедлива, и теоремы вложения, аналогично получим

$$\left\|\frac{\partial \widehat{w}}{\partial \nu}\right\|_{L_p(\Gamma)} \leq c_3\|\widehat{w}\|_{W_p^{r_0}(G_\varepsilon)} \leq \|\varphi\widehat{w}\|_{W_p^{r_0}(G)}, \quad r_0 = 1 + 1/p + \varepsilon_0, \tag{52}$$

где $\varepsilon_0 > 0$ — произвольный параметр, выберем его таким, чтобы $r_0 < 2$. Используя интерполяционные неравенства, как и ранее, приходим к оценке

$$\left\|\frac{\partial \widehat{w}}{\partial \nu}\right\|_{L_p(\Gamma)} \leq \|\varphi\widehat{w}\|_{W_p^{r_0}(G)} \leq c_4\|\varphi\widehat{w}\|^{r_0/2}_{W_p^2(G)}\|\varphi\widehat{w}\|^{1-r_0/2}_{L_p(G)} \leq C_4|\lambda|^{r_0/2-1}\|\widehat{\vec{N}}\|. \tag{53}$$

Имеем

$$|S_{0j}| \leq C\|\frac{\partial \widehat{w}}{\partial \nu}\|_{L_p(\Gamma)}\|e^{\delta_j\sqrt{\lambda}}\overline{v_j}\|_{L_q(\Gamma)} \leq C_1|\lambda|^{(r_0/2-1)}\|\widehat{\vec{N}}\|, \tag{54}$$

где постоянная C_1 не зависит от λ. Остальные рассуждения в доказательстве полностью совпадают. Доказательства в случае $n = 2$ вполне аналогичны, и мы их опустим.

Приведем формулировку теоремы в случае конечного интервала $(0, T)$.

Теорема 6. *Пусть* $m = s$ *и выполнены условия* (11), (24), (25), *условия* (15), (16), (20) *при* $\lambda = 0$, $y_i \in K$ *для всех* $i = 1, 2, \dots, s$. *Тогда существует решение задачи* (1)–(3) *такое, что* $u = w_0 + w$, w_0 — *решение вспомогательной задачи* (12), $w_0 \in W_2^{1,2}(Q)$, $\vec{N} \in L_2(0,T)$, $w \in L_2\big(0,T; W^1_{p,B}(G)\big)$, $w_t \in L_2\big(0,T; W^{-1}_{p,B}(G)\big)$, $w \in W_2^{1,2}(Q_\varepsilon)$ *для всех* $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Используя теорему 3, строим решение вспомогательной задачи ω_0 и делаем замену переменных $u = w_0 + w$. Функция w — решение вспомогательной задачи (17)–(19). По условию на промежутке $[0,T]$ имеет место представление (20). Продолжим функции ψ_{0j} нулем при $t > T$. Полученная функция удовлетворяет условию $e^{-\lambda t}\psi_{0j} \in L_2(0,\infty)$ для любого $\lambda \geq 0$. Ссылаясь на доказательство предыдущей теоремы, можно сказать, что существуют функция $N(t) \in L_2(0,T)$ и функция w из требуемого в формулировке теоремы класса. Мы их строим, решая задачу (17)–(19) на бесконечном промежутке времени $(0,\infty)$.

Замечание 1. Единственность решений задачи (1)–(3) в классе, описанном в теореме 7, в случае конечного временного промежутка имеет место. Однако доказательство достаточно долгое и в этой работе не приводится.

3. Уточнение асимптотических представлений

В [20] приведены асимптотические представления вида (31)–(34) в случае комплексных параметров λ только в случае $G = \mathbb{R}^n$ или в случае $G = \mathbb{R}^n_+$. Здесь уточним их для случая области G с компактной границей.

Рассмотрим задачу

$$Lw + \lambda w = \delta(x - x_0), \quad Bw|_S = 0, \tag{55}$$

Найдется $\lambda_0 > 0$ такое, что при $|\arg(\lambda - \lambda_0)| \leq \pi - \delta_0$ ($\delta_0 > 0$) уравнение (55) разрешимо и полученное решение принадлежит классу $W^1_{p,B}(G)$, причем справедлива оценка

$$\|\widehat{w}\|_{W^1_{p,B}(G)} + |\lambda| \|\widehat{w}\|_{W^{-1}_{p,B}(G)} \leq c_1, \tag{56}$$

где постоянная c_1 не зависит от λ (см. теорему 37 в [22]). Кроме того, имеем $w \in W_p^2(G_\varepsilon)$ для всех $\varepsilon > 0$ и $p \geq n/(n-1)$, где $G_\varepsilon = \{x \in G : \ |x - x_0| \geq \varepsilon\}$. Утверждение вытекает из свойств внутренней гладкости решений эллиптических задач (см. [26]). Рассмотрим, например, случай $Bu \neq u$. Построим сопряженный оператор

$$L^* v = -\Delta v - \sum_{i=1}^n a_i v_{x_i} + \left(a_0 - \sum_{i=1}^n a_{ix_i}\right) v$$

и рассмотрим задачу

$$\overline{\lambda} v(x,y) + L^* v(x,y) = \delta(x - y), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{57}$$

где y — параметр. Пусть $K_{x_0,\delta_0} = \{x : -|x - x_0| + \rho(x, \Gamma) \geq \delta_0\}$, где $\delta_0 > 0$ — фиксированная постоянная. Фиксируем также постоянную $\delta_1 \in (0, \pi)$, и пусть

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\vec{a}(x_0 + \tau(x - x_0)), (x - x_0))\, d\tau.$$

Теорема 7. *Пусть выполнены условия* (4). *Тогда найдутся* $\lambda_0 \geq 0$, $\delta_2 > 0$ *такие, что при* $|\arg(\lambda - \lambda_0)| \leq \pi - \delta_1$ *существует единственное решение задачи* (55) *такое, что* $w \in W^1_{p,B}(G)$ *для всех* $p \in (1, n/(n-1))$, $w \in W_2^2(Q_\varepsilon)$, *для всех* $\varepsilon > 0$ *и для* $x \in \{x \in K_{x_0,\delta_0} : |x - x_0| \geq \varepsilon_0,\ |y| \leq R\}$, *где* $R, \varepsilon_0 > 0$ — *постоянные, имеет место представление*

$$w(x, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi|x - x_0|}\lambda^{1/4}} e^{\psi(x) - \sqrt{\lambda}|x - x_0|}(1 + O(e^{-\delta_2\sqrt{|\lambda|}})) \quad (n = 2); \tag{58}$$

$$w(x, \lambda) = \frac{1}{4\pi|x - x_0|} e^{\psi_0(x) - \sqrt{\lambda}|x - x_0|}(1 + O(e^{-\delta_2\sqrt{|\lambda|}})) \quad (n = 3); \tag{59}$$

Доказательство. Существование и единственность решений вытекает из теоремы 3.3 в [13]. Покажем асимптотику решений. Запишем формулу Грина (используем граничное условие)

$$w(y) + \int_\Gamma \overline{\left(\frac{\partial v}{\partial \nu} + \widetilde{\sigma} v\right)} w(x)\, d\Gamma_x = \overline{v(x_0, y)}, \quad \widetilde{\sigma} = \sigma + \sum_{i=1}^n a_i \nu_i. \tag{60}$$

Рассмотрим, например, случай $n = 3$, случай $n = 2$ рассматривается аналогично. Пусть $y \in K_{x_0,\delta_0}$. Запишем второе слагаемое в виде

$$\int_\Gamma \overline{\left(\frac{\partial v}{\partial \nu} + \widetilde{\sigma} v\right)} w(x)\, d\Gamma_x 4\pi|x_0 - y| e^{\sqrt{\lambda}|x_0 - y|} \cdot \frac{e^{-\sqrt{\lambda}|x_0 - y|}}{4\pi|x_0 - y|}$$

Чтобы получить утверждение теоремы, достаточно показать неравенство вида

$$\left|\int_\Gamma \overline{\left(\frac{\partial v}{\partial \nu} + \widetilde{\sigma} v\right)} w(x)\, d\Gamma_x\right| 4\pi|x_0 - y| e^{\sqrt{\lambda}|x_0 - y|} \leq C e^{-\delta_2\sqrt{|\lambda|}},$$

где постоянная C не зависит от λ и $\delta_2 > 0$ — некоторая постоянная. Используем аналог равенства (38):

$$e^{|x_0 - y|\sqrt{\lambda}} \overline{\left(\frac{\partial v}{\partial \nu} + \widetilde{\sigma} v\right)} = \left(-\sqrt{\lambda} \frac{e^{-\psi(x) - \sqrt{\lambda}(|x - y| - |x_0 - y|)}}{4\pi|x - y|} \left(\frac{((x - y), \nu)}{|x - y|} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)\right.$$
$$\left. + \widetilde{\sigma} \frac{e^{-\psi(x) - \sqrt{\lambda}(|x - y| - |x_0 - y|)}}{4\pi|x - y|} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)\right). \tag{61}$$

Поскольку $y \in K_{x_0,\delta_0}$, имеем $\sqrt{|x - y|} - |x_0 - y| \geq \delta_0$ и приходим к оценке

$$\left|e^{|x_0 - y|\sqrt{\lambda}} |x_0 - y| \left(\frac{\partial v_j}{\partial \nu} + \widetilde{\sigma} v_j\right)\right| \leq C e^{-\delta_0 \operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} \leq C e^{-\delta_2\sqrt{|\lambda|}}, \tag{62}$$

где δ_2 — положительная постоянная, откуда и вытекает утверждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Marchuk G. I.* Mathematical models in environmental problems. Amsterdam: Elsevier Sci. Publ., 1986. (Stud. Math. Appl.; V. 16).

2. *Ozisik M. N., Orlande H. R. B.* Inverse heat transfer. New York: Taylor & Francis, 2000.

3. *Алифанов О. М., Артюхов Е. А., Ненароков А. В.* Обратные задачи сложного теплообмена. М.: Янус-К, 2009.

4. *Панасенко А. Е., Старченко А. В.* Численное решение некоторых обратных задач с различными типами источников атмосферного загрязнения // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика. 2008. № 2(3). С. 47–55.

5. *Пененко В. В.* Вариационные методы усвоения данных и обратные задачи для изучения атмосферы, океана и окружающей среды // Сиб. журн. вычисл. математики. 2009. Т. 2, № 4. С. 341–351.

6. *Deng X., Zhao Y., Zou J.* On linear finite elements for simultaneously recovering source location and intensity // Int. J. Numer. Anal. Model. 2013. V. 10, N 3. P. 588–602.

7. *Пененко А. В., Рахметуллина С. Ж.* Алгоритмы локализации источников загрязнения атмосферного воздуха на основе данных автоматизированной системы экологического мониторинга // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. Т. 10. С. 35–54.

8. *Badia A. El, Ha-Duong T., Hamdi A.* Identification of a point source in a linear advection-dispersion-reaction equation: application to a pollution source problem // Inverse Probl. 2005. V. 21, N 3. P. 1121–1136.

9. *Badia A. El, Hamdi A.* Inverse source problem in an advection-dispersion-reaction system: application to water pollution // Inverse Probl. 2007. V. 23. P. 2103–2120.

10. *Badia A. El, Ha-Duong T.* Inverse source problem for the heat equation: application to a pollution detection problem // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2002. V. 10, N 6. P. 585–599.

11. *Badia A. El, Ha-Duong T.* An inverse source problem in potential analysis // Inverse Probl. 2000. V. 16, N 3. P. 651–663.

12. *Ling L., Takeuchi T.* Point sources identification problems for heat equations // Commun. Comput. Phys. 2009. V. 5, N 5. P. 897–913.

13. *Pyatkov S. G., Neustroeva L. V.* On some asymptotic representations of solutions to elliptic equations and their applications // Complex Variables Elliptic Equ. 2021. V. 66, N 6-7. P. 964–987.

14. *Pyatkov S. G., Safonov E. I.* Point sources recovering problems for the one-dimensional heat equation // J. Adv. Res. Dyn. Control Syst. 2019. V. 11, N 01. P. 496–510.

15. *Triebel H.* Interpolation theory. Function spaces. Differential operators. Berlin: VEB Deutscher Verl. Wiss., 1978.

16. *Denk R., Hieber M., Prüss J.* R-boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type. Mem. Amer. Math. Soc. 2003. V. 166, N 788.

17. *Grisvard P.* Équations différentielles abstraites // Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., IV. Ser. 1969. V. 2. P. 311–395.

18. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

19. *Pyatkov S. G., Neustroeva L. V.* On recovering a point source in some heat and mass transfer problems // AIP Conf. Proc. 2021. V. 2328. 020006.

20. *Amann H.* Nonhomogeneous linear and quasilinear elliptic and parabolic boundary value problems // Function spaces, Differential operators and nonlinear analysis. Stuttgart: Teubner, 1993. P. 9–126. (Teubner-Texte Math.; Bd. 133).

21. *Arendt W., Batty C. J. K., Neubrander F., Hieber M.* Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. Berlin: Springer, 2011.

22. *Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В.* Лекции по математической физике. М.: Изд-во МГУ, 1993.

23. *Watson G. N.* A treatise of the theory of Bessel functions. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1944.

24. *Amann H.* Maximum principles and principal eigenvalues // Ten mathematical essays on approximation in analysis and topology (J. Ferrera, J. Lopez-Gomez, F. R. Ruiz del Portal, eds.). Amsterdam: Elsevier, 2005. P. 1–60.

25. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19, № 3. С. 53–161.

26. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию 22 декабря 2021 г.
После доработки 13 марта 2022 г.
Принята к публикации 31 мая 2022 г.

Пятков Сергей Григорьевич
Югорский государственный университет,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Академия наук Республики Саха (Якутия),
пр. Ленина, 33, Якутск 677007
s_pyatkov@ugrasu.ru, pyatkov@math.nsc.ru

Неустроева Любовь Владимировна
Югорский государственный университет,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012
starkovaLV@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2022. Том 29, № 2

UDC 517.95

ON SOLVABILITY OF INVERSE PROBLEMS OF DETERMINING POINT SOURCES

S. G. Pyatkov and L. V. Neustroeva

Abstract: We examine the questions of solvability, uniqueness, and some qualitative properties of solutions to inverse problems of determining point sources (the right-hand side of a special form) in a parabolic equation. We describe the classes of data for which the problem has a solution, present some existence and uniqueness results with data in these classes, and also some asymptotic representations of the Green function of the stationary problem.

DOI: 10.25587/SVFU.2022.32.61.004

Keywords: parabolic equation, inverse problem, initial-boundary value problem, well-posedness, existence, uniqueness.

REFERENCES

1. *Marchuk G. I.*, Mathematical Models in Environmental Problems, Elsevier, Amsterdam (1986) (Stud. Math. Appl.; vol. 16).

2. *Ozisik M. N. and Orlande H. R. B.*, Inverse Heat Transfer, Taylor & Francis, New York (2000).

3. *Alifanov O. M., Artyukhov E. A., and Nenarokom A. V.*, Inverse Problems of Complex Heat Transfer [in Russian], Yanus-K, Moscow (2009).

4. *Panasenko A. E. and Starchenko A. V.*, "Numerical solution of some inverse problems with different types of sources of the atmospheric pollution [in Russian]," Vestn. Tomsk. Gos. Univ., Mat., Mekh., No. 2, 47–55 (2008).

5. *Penenko V. V.*, "Variational methods of data assimilation and inverse problems for studying the atmosphere, ocean, and environment [in Russian]," Numer. Anal. Appl., **2**, No. 4, 341–351 (2009).

6. *Deng X., Zhao Y., and Zou J.*, "On linear finite elements for simultaneously recovering source location and intensity," Int. J. Numer. Anal. Model., **10**, No. 3, 588–602 (2013).

7. *Penenko A. V. and Rachmetullina S. Zh.*, "Algorithms for atmospheric emission source localization based on the automated ecological monitoring system data," Sib. Electron. Math. Rep., **10**, 35–544 (2013).

8. *Badia A. El, Ha-Duong T., and Hamdi A.*, "Identification of a point source in a linear advection-dispersion-reaction equation: application to a pollution source problem," Inverse Probl., **21**, No. 3, 1121–1136 (2005).

9. *Badia A. El and Hamdi A.*, "Inverse source problem in an advection-dispersion-reaction system: application to water pollution," Inverse Probl., **23**, 2103–2120 (2007).

10. *Badia A. El and Ha-Duong T.*, Inverse source problem for the heat equation: application to a pollution detection problem," J. Inverse Ill-Posed Probl., **10**, No. 6, 585–599 (2002).

11. *Badia A. El and Ha-Duong T.*, "An inverse source problem in potential analysis," Inverse Probl., **16**, No. 3, 651–663 (2000).

12. *Ling L. and Takeuchi T.*, "Point sources identification problems for heat equations," Commun. Comput. Phys., **5**, No. 5, 897–913 (2009).

13. *Pyatkov S. G. and Neustroeva L. V.*, "On some asymptotic representations of solutions to elliptic equations and their applications," Complex Variables Elliptic Equ., **66**, No. 6-7, 964–987 (2021).

14. *Pyatkov S. G. and Safonov E. I.*, "Point sources recovering problems for the one-dimensional heat equation," J. Adv. Res. Dyn. Control Syst., **11**, No. 01, 496–510 (2019).

15. *Triebel H.*, Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, VEB Deutscher Verl. Wiss., Berlin (1978).

16. *Denk R., Hieber M., and Prüss J.*, "$\mathcal{R}$-boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type," Mem. Amer. Math. Soc., **166**, No. 788 (2003).

17. *Grisvard P.*, "Équations différentielles abstraites," Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., IV. Ser., **2**, 311–395 (1969).

18. *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., and Ural'tseva N. N.*, Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1967) (Transl. Math. Monogr.; vol. 23).

19. *Pyatkov S. G. and Neustroeva L. V.*, "On recovering a point source in some heat and mass transfer problems," AIP Conf. Proc., **2328**, 020006 (2021).

20. *Amann H.*, "Nonhomogeneous linear and quasilinear elliptic and parabolic boundary value problems," in: Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis, pp. 9–126, Teubner, Stuttgart (1993) (Teubner-Texte Math.; Bd. 133).

21. *Arendt W., Batty C. J. K., Neubrander F., and Hieber M.*, Vector-Valued Laplace Transforms and Cauchy Problems, Springer, Berlin (2011).

22. *Sveshnikov A. G., Bogolyubov A. N., and Kravtsov V. V.*, Lectures on Mathematical Physics [in Russian], Izdat. MGU, Moscow (1993).

23. *Watson G. N.*, A Treatise of the Theory of Bessel Functions, Camb. Univ. Press, Cambridge (1944).

24. *Amann H.*, "Maximum principles and principal eigenvalues," in: Ten Mathematical Essays on Approximation in Analysis and Topology (J. Ferrera, J. Lopez-Gomez, and F. R. Ruiz del Portal, eds.), pp. 1–60, Elsevier, Amsterdam (2005).

25. *Agranovich M. S. and Vishik M. I.*, "Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of a general type," Russ. Math. Surv., **19**, No. 3, 53–157 (1964).

26. *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., and Ural'tseva N. N.*, Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type [in Russian], Nauka, Moscow (1967).

Submitted December 22, 2021
Revised March 13, 2022
Accepted May 31, 2022

Sergey G. Pyatkov
Yugra State University,
16 Chekhov Street, Khanty-Mansiisk 628012, Russia;
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, Novosibirsk 630090, Russia;
Academy of Sciences of the Republic of Sakha (Yakutia),
33 Lenin Avenue, Yakutsk 677007, Russia
`s_pyatkov@ugrasu.ru`

Lyubov V. Neustroeva
Yugra State University,
16 Chekhov Street, Khanty-Mansiisk 628012, Russia
`starkovalv@mail.ru`