А. П. Хромов, Смешанная задача для дифференциального уравнения с инволюцией и потенциалом специального вида,
Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика, 2010, том 10, выпуск 4, 17–22

https://www.mathnet.ru/isu185

7. *Дудов, С.И.* Об асферичности выпуклого компакта / С.И. Дудов, Е.А. Мещерякова // Математика. Механика: сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. – Вып. 11. – С. 24–27.
8. *Васильев, Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1988.
9. *Карманов, В.Г.* Математическое программирование / В.Г. Карманов. – М.: Наука, 1986.
10. *Рокафеллар, Р.* Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар. – М.: Мир, 1973.
11. *Зуховицкий, С.И.* Линейное и выпуклое программирование / С.И. Зуховицкий, Л.И. Авдеева. – М.: Наука, 1964.
12. *Половинкин, Е.С.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа / Е.С. Половинкин, М.В. Балашов. – М.: Физматлит, 2004.

УДК 517.984

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ И ПОТЕНЦИАЛОМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А.П. Хромов

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

Для решения некоторой смешанной задачи с инволюцией и вещественным симметричным потенциалом найдено явное аналитическое представление методом Фурье. При этом использованы приемы, позволяющие избегать почленного дифференцирования функционального ряда и накладывать минимальные условия на начальные данные задачи.

Ключевые слова: смешанная задача, инволюция, метод Фурье, классическое решение.

The Mixed Problem for the Differential Equation with Involution and Potential of the Special Kind

A.P. Khromov

Saratov State University,
Chair of Differential Equations and Applied Mathematics
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

For the solution of some mixed problem with involution and real symmetrical potential, explicit analytical formula has been found with the use of the Fourier method. Techniques allowing to avoid term-by-term differentiation of the functional series and impose the minimum conditions for initial problem data, are used.

Key words: mixed problem, involution, Fourier method, classical solution.

Рассматривается следующая смешанная задача:

$$\frac{1}{\beta i}u_t(x,t) = u_\xi(\xi,t)|_{\xi=1-x} + q(x)u(x,t), \qquad x\in[0,1], \qquad t\in(-\infty,+\infty), \tag{1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad u(0,t)=0. \tag{2}$$

Предполагаем выполненными следующие условия: 1) β — вещественное число, $\beta\neq 0$, 2) $q(x)\in C[0,1]$, $q(x)=q(1-x)$, $q(x)$ — вещественная функция; 3) $\varphi\in C^1[0,1]$ и $\varphi(0)=0$, $\varphi'(1)=0$.

Уравнение (1) представляет собой простейшее уравнение в частных производных, содержащее инволюцию $\nu(x)=1-x$. Краевые задачи с инволюцией активно исследуются (см., например, работу [1] и библиографию в ней).

Решение задачи (1)–(2) будем искать методом Фурье. Наши предположения позволяют получить классическое решение, т. е. решение, непрерывно дифференцируемое по обеим переменным. Условия на $\varphi(x)$ являются естественными, так как им удовлетворяют собственные функции порождаемой (1)–(2) краевой задачи. Условия на $q(x)$ снимают многие трудности при исследовании задачи и позволяют дать хорошую структурную форму для решения.

В работе широко используются приемы из [2], позволяющие получить решение, избегая почленного дифференцирования функционального ряда.

1. Согласно методу Фурье положим $u(x,t)=y(x)T(t)$. Тогда получим следующую задачу на собственные значения для $y(x)$:

$$y'(1-x)+q(x)y(x)=\lambda y(x), \tag{3}$$

$$y(0)=0, \tag{4}$$

а для $T(t)$ имеем $T(t)=ce^{\lambda\beta it}$.

2. Найдем решение задачи (3)–(4). Выполняя в (3) замену x на $1-x$ и полагая $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, где $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(1-x)$, получим следующую систему уравнений относительно $z(x)$:

$$Bz'(x) + P(x)z(x) = \lambda z(x), \tag{5}$$

где $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P(x) = \mathrm{diag}\,(q(x), q(1-x)) = \mathrm{diag}\,(q(x), q(x))$.

Верно и обратное: если $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ — решение (5) и $z_1(x) = z_2(1-x)$, то $y(x) = z_1(x)$ есть решение уравнения (3).

Лемма 1. *Общее решение системы* (5) *имеет вид*

$$z(x) = z(x, \lambda) = \Gamma V(x, \lambda)c, \tag{6}$$

где $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$, $V(x,\lambda) = \mathrm{diag}\,\left(u_1(x)e^{-\lambda ix}, u_2(x)e^{\lambda ix}\right)$, $u_1(x) = \exp\left(i\int\limits_0^x q(t)\,dt\right)$, $u_2(x) = \exp\left(-i\int\limits_0^x q(t)\,dt\right)$, $c = (c_1, c_2)^T$, c_k — *произвольные постоянные.*

Доказательство. Матрицу B в системе (5) можно привести к диагональному виду с помощью преобразования $\Gamma^{-1}B\Gamma = D$, где $D = \mathrm{diag}\,(i, -i)$ ($\pm i$ — собственные значения матрицы B), Γ — невырожденная матрица, определяемая неоднозначно. В качестве Γ выберем матрицу, указанную в условии леммы. Выполнив в (5) замену $z = \Gamma v$, $v = (v_1, v_2)^T$, придем к системе

$$v'(x) + P_1(x)v(x) = \lambda D^{-1}v(x), \tag{7}$$

где $D^{-1} = \mathrm{diag}\,(-i, i)$, $P_1(x) = D^{-1}\Gamma^{-1}P(x)\Gamma = D^{-1}q(x)$ (благодаря симметричности $q(x)$ матрица $P_1(x)$ также диагональна).

Система (7) распадается на два уравнения:

$$v_1'(x) - iq(x)v_1(x) = -\lambda i v_1(x), \qquad v_2'(x) + iq(x)v_2(x) = \lambda i v_2(x),$$

общие решения которых соответственно есть

$$v_1(x) = v_1(x,\lambda) = c_1u_1(x)e^{-\lambda ix}, \qquad v_2(x) = v_2(x,\lambda) = c_2u_2(x)e^{\lambda ix},$$

где $u_k(x)$ — функции, определенные в условии леммы, c_1, c_2 — произвольные постоянные. Записывая решение (7) в матричной форме, придем к (6).

Лемма 2. *Общее решение системы* (3) *имеет вид*

$$y(x) = y(x,\lambda) = c\varphi(x,\lambda), \tag{8}$$

где $\varphi(x,\lambda) = u_1(x)e^{-i\int\limits_0^1 q(t)\,dt}e^{\lambda i(1-x)} - iu_2(x)e^{\lambda ix}$, c — *произвольная постоянная.*

Доказательство. Как было показано выше, функция $y(x) = z_1(x)$ является решением (3), если $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ удовлетворяет (5) и $z_1(x) = z_2(1-x)$. Отсюда, в частности, получаем условие

$$z_1(0) = z_2(1). \tag{9}$$

В силу (6) и (9) имеем

$$c_1u_1(0) - ic_2u_2(0) = -c_1iu_1(1)e^{-\lambda i} + c_2u_2(1)e^{\lambda i},$$

или

$$c_1[u_1(0) + iu_1(1)e^{-\lambda i}] = c_2[u_2(1)e^{\lambda i} + iu_2(0)]. \tag{10}$$

Так как $u_1(0) = 1$, $u_2(0) = 1$, $u_2(1) = e^{-i\int\limits_0^1 q(t)\,dt} = u_1^{-1}(1)$, то из (10) получим

$$c_1[1 + iu_1(1)e^{-\lambda i}] = c_2u_2(1)e^{\lambda i}[1 + iu_1(1)e^{-\lambda i}],$$

откуда $c_1 = c_2 u_2(1) e^{\lambda i}$. Тогда $y(x) = z_1(x) = c_1 u_1(x) e^{-\lambda i x} - i c_2 u_2(x) e^{\lambda i x} = c_2 \varphi(x, \lambda)$, что доказывает (8). □

Лемма 3. *Собственные значения краевой задачи* (3)–(4) *есть*

$$\lambda_n = 2\pi n + a, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{11}$$

где $a = \pi/2 + \int\limits_0^1 q(t)\,dt$, *а соответствующие собственные функции*

$$y_n(x) = p(1-x) e^{2\pi n i (1-x)} - i p(x) e^{2\pi n i x}, \tag{12}$$

где $p(x) = u_2(x) e^{aix}$.

Доказательство. Согласно (4) и (8) для собственных значений имеем уравнение $\varphi(0, \lambda) = 0$, корни которого есть (11).

Найдем собственные функции $y_n(x) = \varphi(x, \lambda_n)$. Учитывая, что $u_1(x) = \exp\left\{ i \int\limits_0^1 q(t)\,dt - i \int\limits_x^1 q(t)\,dt \right\} = \exp\left\{ a - i \int\limits_0^{1-x} q(t)\,dt \right\} = e^{ia} u_2(1-x)$ (здесь снова использована симметричность $q(x)$), получим $y_n(x) = u_1(x) e^{-ia} e^{2\pi n i(1-x)} e^{ia(1-x)} - i u_2(x) e^{2\pi n i x} e^{aix} = u_2(1-x) e^{ia(1-x)} e^{2\pi n i (1-x)} - i u_2(x) e^{aix} e^{2\pi n i x}$, откуда следует (12). □

3. Исследуем свойства системы $y_n(x)$.

Лемма 4. *Функции* $y_n(x)$, ($n \in \mathbb{Z}$) *образуют ортогональную систему, полную в* $L_2[0,1]$.

Доказательство. Обозначим через L оператор

$$Ly = y'(1-x) + q(x) y(x), \quad y(0) = 0,$$

собственными функциями которого являются $y_n(x)$. Найдем сопряженный оператор L^*. Пусть $z(x) \in W_2^1[0,1]$. Тогда

$$(Ly, z) = \int\limits_0^1 y'(x)\overline{z(1-x)}\,dx + \int\limits_0^1 q(x) y(x) \overline{z(x)}\,dx = y(x)\overline{z(1-x)}\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 y(x)\overline{z'(1-x)}\,dx +$$
$$+ \int\limits_0^1 q(x) y(x)\overline{z(x)}\,dx = y(1)\overline{z(0)} + \int\limits_0^1 y(x)\overline{(z'(1-x) + \overline{q(x)} z(x))}\,dx,$$

откуда $L^* z(x) = z'(1-x) + \overline{q(x)} z(x)$, $z(0) = 0$. Так как $q(x)$ — вещественная функция, то $L = L^*$, откуда следует ортогональность собственных функций.

Докажем полноту. Пусть $f \in L[0,1]$ и f ортогональна y_n, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$(y_n, f) = \int\limits_0^1 y_n(x)\overline{f(x)}\,dx = \int\limits_0^1 \overline{f(x)} \left[p(1-x) e^{2\pi n i (1-x)} - i p(x) e^{2\pi n i x} \right] dx =$$
$$= \int\limits_0^1 \overline{f(1-x)} p(x) e^{2\pi n i x}\,dx - i \int\limits_0^1 \overline{f(x)} p(x) e^{2\pi n i x}\,dx = \int\limits_0^1 \left[\overline{f(1-x)} - i\overline{f(x)} \right] p(x) e^{2\pi n i x}\,dx = 0.$$

Отсюда в силу полноты тригонометрической системы $\{e^{2\pi n i x}\}$ имеем

$$f(1-x) + i f(x) \equiv 0, \quad x \in [0,1]. \tag{13}$$

Заменим в (13) x на $1-x$ и полученное уравнение умножим на i:

$$i\, f(x) + i^2\, f(1-x) \equiv 0. \tag{14}$$

Сложив (13) и (14), получим, что $f(x) \equiv 0$, и лемма доказана. □

Замечание. Из леммы 4 следует, что собственные значения (11) однократны.

Лемма 5. *Пусть* $y_n^0(x) = y_n(x)/\|y_n\|$ ($\|\cdot\|$ — *норма в* $L_2[0,1]$). *Тогда* $y_n^0(x) = \gamma_n y_n(x)$, *где константы* γ_n *имеют асимптотику*

$$\gamma_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[1], \qquad [1] = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Доказательство. Имеем

$$\|y_n\|^2 = \int_0^1 y_n(x)\overline{y_n(x)}\,dx = \int_0^1 p(1-x)\overline{p(1-x)}\,dx + \int_0^1 p(x)\overline{p(x)}\,dx +$$

$$+ i\int_0^1 p(1-x)\overline{p(x)}e^{-4\pi nix}\,dx - i\int_0^1 p(x)\overline{p(1-x)}e^{4\pi nix}\,dx.$$

Выполняя в третьем и четвертом интегралах интегрирование по частям и учитывая ограниченность входящих в них экспонент, а также, что $\|p(x)\| = 1$, получим $\|y_n\|^2 = 2 + O(1/n)$, откуда следует утверждение леммы. □

Лемма 6. *Если* $f(x) \in D_L$ (D_L — *область определения оператора* L *в пространстве* $L_2[0,1]$), *то ее ряд Фурье по системе* $\{y_n(x)\}$ *сходится абсолютно и равномерно на* $[0,1]$.

Доказательство. Ряд Фурье функции $f(x)$ по системе $\{y_n(x)\}$ есть

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(f, y_n)\gamma_n^2 y_n(x) = \sum_{-\infty}^{\infty}(f, y_n^0)y_n^0(x).$$

Пусть вещественное число μ_0 не является собственным значением оператора L. Положим $(L - \mu_0 E)f = g$ (E — единичный оператор). Тогда $f = R_{\mu_0}g$, где R_λ есть резольвента оператора L. Далее,

$$(L - \mu_0 E)y_n^0 = (\lambda_n - \mu_0)y_n^0,$$

откуда $y_n^0 = (\lambda_n - \mu_0)R_{\mu_0}y_n^0$ и

$$(f, y_n^0) = (R_{\mu_0}g, y_n^0) = (g, R_{\mu_0}y_n^0) = \frac{1}{\overline{\lambda_n} - \mu_0}\,(g, y_n^0).$$

Поэтому

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(f, y_n^0)y_n^0(x) = \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\overline{\lambda_n} - \mu_0}(g, y_n^0)y_n^0(x).$$

Так как $\frac{1}{\lambda_n - \mu_0} = O\left(\frac{1}{n}\right)$, а $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}|(g, y_n^0)|^2 < \infty$, то утверждение леммы следует из неравенства Коши – Буняковского и равномерной ограниченности $y_n^0(x)$. □

4. Из леммы 6 следует, что ряд $\sum|c_n|$ сходится. Поэтому функция $f_0(x) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi nix}$ непрерывна на $(-\infty, \infty)$ и периодическая с периодом 1.

Лемма 7. *При* $x \in [0,1]$ *имеет место формула*

$$f_0(x) = \frac{1}{2p(x)}\left[i\varphi(x) + \varphi(1-x)\right]. \tag{15}$$

Доказательство. Согласно лемме 6 при $x \in [0,1]$ имеем

$$\varphi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}(\varphi, y_n)\gamma_n^2 y_n(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}c_n y_n(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}c_n\left[p(1-x)e^{2\pi ni(1-x)} - ip(x)e^{2\pi nix}\right],$$

откуда

$$\varphi(x) = p(1-x)f_0(1-x) - ip(x)f_0(x). \tag{16}$$

Отсюда

$$\varphi(1-x)=p(x)f_0(x)-ip(1-x)f_0(1-x). \tag{17}$$

Из (16) и (17) получаем

$$i\varphi(x)+\varphi(1-x)=2p(x)f_0(x). \tag{18}$$

Из (18) следует (15). □

Замечание. Функция $f_0(x)$ в силу своей периодичности однозначно определяется на всей оси заданием ее лишь на отрезке $[0,1]$. Таким образом, $f_0(x)$ определяется не рядом, а по формуле (15).

Лемма 8. *Если $\varphi(x)\in C^1[0,1]$, $\varphi(0)=\varphi'(1)=0$, то $f_0(x)$ непрерывно дифференцируема на всей вещественной оси.*

Доказательство. Из (15) следует, что $f_0(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0,1]$ (в концевых точках имеются в виду односторонние производные). В силу периодичности функция $f_0(x)$ непрерывно дифференцируема всюду на $(-\infty,+\infty)$, кроме точек $x=n$ (n – целое). Покажем, что $f_0'(n-0)=f_0'(n+0)$. В силу периодичности функции $f_0(x)$ достаточно установить, что

$$f_0'(0+0)=f_0'(0-0). \tag{19}$$

Дифференцируя (18), получим:

$$i\varphi'(x)-\varphi'(1-x)=2p'(x)f_0(x)+2p(x)f_0'(x). \tag{20}$$

Из (20), условия леммы и соотношений

$$f_0(0)=f_0(1), \qquad f_0'(1-0)=f_0'(0-0)$$

имеем

$$2p'(0)f_0(0)+2p(0)f_0'(0+0)=i\varphi'(0), \qquad 2p'(1)f_0(0)+2p(1)f_0'(0-0)=-\varphi'(0),$$

откуда

$$2[p'(0)+ip'(1)]f_0(0)+2[p(0)f_0'(0+0)+ip(1)f_0'(0-0)]=0. \tag{21}$$

Так как $p(0)=1$, $p(1)=\exp\left(-i\int_0^1 q(t)\,dt\right)e^{ia}=e^{\pi i/2}=i$, $u_2'(x)=-iq(x)u_2(x)$, $p'(0)=-iq(0)+ia$, $p'(1)=q(1)-a$, а также $q(0)=q(1)$, то $p'(0)+ip'(1)=0$, и из (21) следует (19). Лемма доказана. □

Замечание. Условие $\varphi'(1)=0$ является естественным, так как ему удовлетворяют все собственные функции.

5. Согласно методу Фурье, решение $u(x,t)$ задачи (1)–(2) представляется формальным рядом

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(\varphi,y_n^0)y_n^0(x)e^{\lambda_n\beta it}=\sum_{-\infty}^{\infty}c_ny_n(x)e^{\lambda_n\beta it}, \tag{22}$$

где $c_n=(\varphi,y_n)\gamma_n^2$.

Лемма 9. *Ряд* (22) *сходится абсолютно и равномерно по $x\in[0,1]$ и $t\in(-\infty,\infty)$, и для его суммы имеет место формула*

$$\sum_{-\infty}^{\infty}c_ny_n(x)e^{\lambda_n\beta it}=e^{a\beta it}\big[p(1-x)f_0(1-x+\beta t)-ip(x)f_0(x+\beta t)\big], \tag{23}$$

где $p(x)=u_2(x)e^{iax}$.

Доказательство. Сходимость ряда (22) следует из леммы 6. Далее, имеем

$$\sum_{-\infty}^{\infty}c_ny_n(x)e^{\lambda_n\beta it}=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n\big[p(1-x)e^{2\pi ni(1-x)}-ip(x)e^{2\pi nix}\big]e^{\lambda_n\beta it}=$$

$$=e^{a\beta it}\Big[p(1-x)\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{2\pi ni(1-x+\beta t)}-ip(x)\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{2\pi ni(x+\beta t)}\Big],$$

откуда следует (23). □

Теорема. *Если $\varphi(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$, $q(x) \in C[0,1]$, $q(x) = q(1-x)$, то классическое решение задачи* (1)–(2) *существует и имеет вид*

$$u(x,t) = e^{a\beta it}\big[p(1-x)f_0(1-x+\beta t) - ip(x)f_0(x+\beta t)\big], \tag{24}$$

где $p(x) = \exp\left(aix - i\int\limits_0^x q(t)\,dt\right)$, *$f_0(x)$ — периодическая с периодом 1 функция, причем на отрезке* $[0,1]$

$$f_0(x) = \frac{1}{2p(x)}\big[i\varphi(x) + \varphi(1-x)\big]. \tag{25}$$

Доказательство. Как установлено выше, если функцию $f_0(x)$, заданную с помощью (25), продолжить периодически с периодом 1 на всю ось, то получим непрерывно дифференцируемую всюду функцию. Проверим теперь, что $u(x,t)$, заданная формулой (24), является решением смешанной задачи (1)–(2).

Сначала покажем, что $u(x,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1). Имеем

$$\frac{1}{\beta i}u_t(x,t) = ae^{a\beta it}\big[p(1-x)f_0(1-x+\beta t) - ip(x)f_0(x+\beta t)\big] +$$
$$+\frac{1}{i}e^{a\beta it}\big[p(1-x)f_0'(1-x+\beta t) - ip(x)f_0'(x+\beta t)\big],$$
$$u_\xi(\xi,t)\Big|_{\xi=1-x} = e^{a\beta it}\big[-p'(1-\xi)f_0(1-\xi+\beta t) - p(1-\xi)f_0'(1-\xi+\beta t)-$$
$$-ip'(\xi)f_0(\xi+\beta t) - ip(\xi)f_0'(\xi+\beta t)\big]\Big|_{\xi=1-x} = e^{a\beta it}\big[-p'(x)f_0(x+\beta t) - p(x)f_0'(x+\beta t)-$$
$$-ip'(1-x)f_0(1-x+\beta t) - ip(1-x)f_0'(1-x+\beta t)\big].$$

Подставляя данные соотношения в (1), получим

$$e^{a\beta it}\Big\{f_0(1-x+\beta t)\big[ap(1-x) + ip'(1-x) - p(1-x)q(x)\big] + f_0(x+\beta t)\big[-aip(x) + p'(x)+$$
$$+ip(x)q(x)\big] + f_0'(1-x+\beta t)\big[\frac{1}{i}p(1-x) + ip(1-x)\big] + f_0'(x+\beta t)\big[-p(x) + p(x)\big]\Big\}.$$

Последние две квадратные скобки равны нулю. Подставляя явные выражения для $p(x)$ и $p'(x)$, получим, что первая и вторая квадратные скобки также равны нулю, т. е. $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1).

Далее, при $x \in [0,1]$ имеем $u(x,0) = p(1-x)f_0(1-x) - ip(x)f_0(x) = \varphi(x)$. Наконец,

$$u(0,t) = e^{a\beta it}\big[p(1)f_0(\beta t) - ip(0)f_0(\beta t)\big] = 0,$$

т.е. начальное и краевое условие выполнены. Теорема доказана. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00270) *и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ* (*проект* НШ-4383.2010.1) .

Библиографический список

1. *Андреев, А.А.* О корректности краевых задач для некоторых уравнений в частных производных с карлемановским сдвигом/ А.А. Андреев // Дифференциальные уравнения и их приложения: Тр. 2-го Междунар. семинара. – Самара, 1998. – С. 5–18.
2. *Чернятин, В.А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных / В.А. Чернятин. – М., 1991. – 112 с.