Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Л. П. Лисовик, О построении разрешимых сингулярных теорий двух функций следования с дополнительным предикатом,
Алгебра и логика, 1984, том 23, номер 3, 266–277

https://www.mathnet.ru/al1860

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.85
6 декабря 2025 г., 18:15:28

Алгебра и логика, 23, № 3 (1984), 266-277

УДК 519.9

О ПОСТРОЕНИИ РАЗРЕШИМЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ТЕОРИЙ ДВУХ ФУНКЦИЙ СЛЕДОВАНИЯ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ПРЕДИКАТОМ

Л. П. ЛИСОВИК

Для любого натурального числа n под сингулярной теорией второго порядка n функций следования, обозначаемой через SnS, подразумевается сингулярная теория второго порядка модели $\langle D_n; \tau_1, \ldots, \tau_n \rangle$, где D_n – множество всех слов в алфавите $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и на нем заданы одноместные функции (непосредственного) следования $\tau_1, \ldots, \tau_n$ такие, что $\tau_i(x) = xe_i$. В теории SnS квантификация допускается по одноместным предикатным переменным и индивидуальным переменным. Известно, что сингулярная теория второго порядка n функций следования разрешима. Этот результат имеет многочисленные применения (см. [1, 2]). При $n = 1$ разрешимость теории SnS доказана в [3], при $n \geqslant 2$ – в [1]. В [4] было показано, что теория $S1S$ (называемая также ограниченной арифметикой второго порядка) имеет разрешимые расширения. Так, теория $S1S[P]$ разрешима, если P – одноместный предикат, истинный на тех и только тех словах, длины которых принимают значения из следующих множеств: $\{x! \mid x \in N\}$, $\{x^a \mid x \in N\}$, $\{a^x \mid x \in N\}$, $a \in N$. Подход, предложенный в [4], развивался далее в [5]. Некоторые результаты из [4, 5], имеющие непосредственное отношение к данной статье, сформулированы ниже.

В вышеуказанных и ряде других работ (например, [2, 6, 7, 8]) изучались вопросы разрешимости для различных расширений теории $S1S$. Вопрос о существовании разрешимых расширений теории $S2S$ до последнего времени оставался открытым. Этот вопрос положительно решается в настоящей работе. Из предложенного ниже способа доказательства следует также существование разрешимых расширений теории SnS при $n \geqslant 3$. Кроме того, это дает возможность

© Институт математики СО АН СССР, 1984

указать ряд разрешимых расширений для тех теорий, которые выразимы в теории $S2S$ (см. [1, 2]). Класс одноместных предикатов P, для которых теория $S2S[P]$ разрешима, оказывается очень широким.

Так, если f – строго возрастающая целочисленная неотрицательная функция, которая получается из функций $x!$, x^a, a^x $(a=1,2,\ldots)$ конечным применением операций суперпозиции, суммирования и мультиплицирования, а предикат P истинен на тех и только тех словах w, длина которых принадлежит области значений функции f, то теория $S2S[P]$ разрешима. Основой доказательств разрешимости теорий вида $S2S[P]$ является связь теории $S2S$ с теорией автоматов над бесконечными размеченными деревьями.

Введем необходимые определения и обозначения: $N=\{0,1,2,\ldots\}$, $N^+=N\setminus\{0\}$, $D=\{0,1\}^*$ – множество всех слов в алфавите $\{0,1\}$, ε – символ пустого слова, $\{0,1\}^+=\{0,1\}^*\setminus\{\varepsilon\}$, $|v|$ – длина слова v. Пусть D' – дерево с множеством вершин $\{0,1\}^*$, в котором вершины u, v соединены между собой ребром тогда и только тогда, когда $u\in v\{0,1\}$ или $v\in u\{0,1\}$. Размеченным деревом (или разметкой) называется функционал $\mu: D\to\{0,1\}$. Пусть (дерева D') есть любая последовательность $\langle v_0,v_1,\ldots\rangle$, где $v_0=\varepsilon$ и $v_{i+1}\in v_i\{0,1\}$, $i\in N$.

Конечным автоматом (или, короче, автоматом) здесь называется упорядоченная четверка $A=(K,H,q_0,F)$, где K – конечное множество, называемое множеством состояний, H – подмножество множества $K\times\{0,1\}\times K\times K$, $q_0\in K$ (начальное состояние автомата), F – некоторая совокупность подмножеств множества K.

Пару функционалов $\mu: D\to\{0,1\}$, $h: D\to K$ назовем согласованной относительно автомата A, если $(h(v),\mu(v),h(v0),h(v1))\in H$ для всех $v\in D$. Для любого функционала $h: D\to K$ и любого пути $\pi=\langle v_0,v_1,\ldots\rangle$ через $Kr(h,\pi)$ обозначим множество элементов, встречающихся в последовательности $\langle h(v_0),h(v_1),\ldots\rangle$ бесконечное число раз. Через $L(A)$ обозначим множество $\{\mu \mid$ существует функционал h такой, что пара (μ,h) согласована относительно автомата A, $h(\varepsilon)=q_0$ и для любого пути π множество $Kr(h,\pi)$ есть элемент совокупности $F\}$. Будем говорить, что разметка μ допустима относительно автомата A, если выполняется условие $\mu\in L(A)$.

Возможность построения расширенных разрешимых сингулярных теорий второго порядка двух функций следования вытекает из существования разметки μ такой, что условие $\mu\in L(A)$ эффективно разрешимо в классе всех конечных автоматов, причем не существует конечного автомата B, допускающего разметку μ и не допускающего других разметок. Действительно, пусть для

любого предиката $Q: D \to \{И, Л\}$ через μ_Q обозначается разметка такая, что $\mu_Q(\omega) = 1$, если и только если $Q(\omega) = И$. Тогда имеет место следующая

ЛЕММА 1. Если $Q: D \to \{И, Л\}$ – произвольный фиксированный унарный предикат, то теория $S2S[Q]$ разрешима тогда и только тогда, когда существует алгоритм, который по любому конечному автомату A проверяет выполнимость условия $\mu_Q \in L(A)$.

Справедливость этой леммы легко устанавливается с использованием того факта, что формулы языка теории $S2S$ эффективно представимы посредством $\sum^n$-автоматов [1, 2].

Ниже будут указаны разметки μ, для которых эффективно проверяемо условие $\mu \in L(A)$ в классе всех конечных автоматов. Введем некоторые необходимые определения и обозначения.

Разметку μ назовем R-разметкой, если $\mu(\varepsilon) = 1$ и для любых $u, v \in D$ из условия $|u| = |v|$ следует условие $\mu(u) = \mu(v)$, а множество $\{|\omega| \mid \omega \in D, \ \mu(\omega) = 1\}$, обозначаемое через I_μ, бесконечно. Условия $v \in u\{0,1\}^+$, $v \in u\{0,1\}^*$ будем записывать соответственно в виде $u \prec v$, $u \preccurlyeq v$. Для любого $u \in D$ через D_u обозначим множество $\{v \mid v \in D, \ u \preccurlyeq v\}$. Для любого автомата A через $|A|$ обозначим число его состояний.

В случае, когда функционалы $\mu: D \to \{0,1\}$, $h: D \to K$ таковы, что пара (μ, h) согласована относительно автомата A, условимся говорить, что h есть поведение автомата A над разметкой μ. В этом случае для любой вершины $\alpha \in D$ элемент $h(\alpha)$ будем называть следом поведения h на вершине α. Очевидно, что число различных следов вида $h(\alpha)$ не превосходит $|A|$. Если пара (μ, h) согласована относительно автомата A, то для любого натурального числа m пусть

$$S(A, \mu, h, m) = \{h(\alpha) \mid \alpha \in D, \ |\alpha| = m\}.$$

Предположим, что пары (μ_1, h_1), (μ_2, h_2) согласованы относительно автомата A и натуральные числа x, y таковы, что $S(A, \mu_1, h_1, x) = S(A, \mu_2, h_2, y)$. Пусть $n = 2^x$ и вершины $u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n$ выбраны так, что $\{u_1, \ldots, u_n\} = \{\omega \mid \omega \in D, |\omega| = x\}$, $|v_i| = y$, $h_1(u_i) = h_2(v_i)$, $i = \overline{1,n}$. Определим функционалы $\mu_0: D \to \{0,1\}$, $h_0: D \to K$ следующим образом:

1) $\mu_0(\omega) = \mu_1(\omega)$, $h_0(\omega) = h_1(\omega)$ при $|\omega| < x$;

2) $\mu_0(\omega) = \mu_2(v_i\alpha)$, $h_0(\omega) = h_2(v_i\alpha)$, если $\omega = u_i\alpha$, $i = \overline{1,n}$.

Тогда пара (μ_0, h_0) также согласована относительно автомата A.

Описанная конструкция, дающая согласованную относительно автомата A пару (μ_0, h_0) по согласованным относительно A парам (μ_1, h_1) и (μ_2, h_2), связана с "техникой следов" [9, 10], "леммой о замещениях" [10] и ее обобщениями применительно к преобразователям над размеченными бесконечными деревьями [11, 12]. Для наших целей наиболее интересен случай, когда пары (μ_1, h_1) и (μ_2, h_2) совпадают между собой. Пусть тогда (μ, h) есть (μ_1, h_1). В этом случае при условии $x < y$ будем говорить, что пара (μ_0, h_0) получается из пары (μ, h) операцией склейки. Если же $x > y$, то будем говорить, что пара (μ_0, h_0) получается из пары (μ, h) операцией вклейки. Представления о понятиях следа, операции склейки и операции вклейки могут быть полезны при чтении остальной части статьи. В то же время отметим такие два обстоятельства: 1) никакие конкретные результаты или специальные приемы из вышеуказанных работ, связанные с техникой следов, ниже не используются; 2) понятия следа, операций склейки и вклейки в дальнейшем тексте явно не используются. Однако обращение к представлениям об операциях склейки и вклейки, возможно, будет полезным, например, для понимания конструкции, предшествующей доказательству леммы 3.

Для любых $u, v \in D$, $u \prec v$, $r, s \in N^+$, $r < s$, и функционала $h : D \to K$ пусть $l(h, u, v) = \{h(\alpha) \mid u \prec \alpha \preceq v\}$,

$$T(h, u, r) = \{(h(u\beta), l(h, u, u\beta)) \mid \beta \in D,\ |\beta| = r\},$$

$$V(h, u, r, s) = \{(h(u\beta), l(h, u, u\beta), T(h, u\beta, s-r)) \mid \beta \in D,\ |\beta| = r\}.$$

Определим функцию $\psi : N^+ \to N^+$ так, что $\psi(x) = m^m$, где $m = 2^{x 2^x}$.

ЛЕММА 2. *Для любого автомата A число различных множеств вида $V(h, u, r, s)$ не превосходит $\sqrt{\psi(|A|)}$.*

Пусть (μ, h) – некоторая пара, согласованная относительно автомата A. Пусть, кроме того, натуральные числа x, y, b таковы, что $x < y < b$ и $V(h, \varepsilon, x, b) = V(h, \varepsilon, y, b)$. Тогда для любого $n \in N$ обозначим через $\{(\mu, h)\}_{[b, x, y, n]}$ множество $\mathfrak{M}_n$, где множества $\mathfrak{M}_n$, $n = 0, 1, \ldots$, состоят из пар (μ_n, h_n), согласованных относительно автомата A, и задаются индуктивно следующим образом. Для построения любой пары $(\mu_0, h_0) \in \mathfrak{M}_0$ выбираются произвольным образом попарно различные вершины $u_1, v_1, \ldots, u_s, v_s$ такие, что $\{u_1, \ldots, u_s\} = \{w \mid w \in D, |w| = x\}$, $|v_i| = y$, $h(u_i) = h(v_i)$,

$l(h,\varepsilon,u_i)=l(h,\varepsilon,v_i)$, $T(h,u_i,b-x)=T(h,v_i,b-y)$, $i=\overline{1,s}$.

Затем для любого $w\in D$ значения $\mu_0(w)$, $h_0(w)$ определяются так:

1) $\mu_0(w)=\mu(w)$, $h_0(w)=h(w)$ при $|w|<x$;

2) $\mu_0(w)=\mu(v_i\alpha)$, $h_0(w)=h(v_i\alpha)$, если $w=u_i\alpha$, $i=\overline{1,s}$.

Множество $\mathfrak{M}_1$ одноэлементно, $\mathfrak{M}_1=\{(h,\mu)\}$. Для $n=2,3,\ldots$ любая пара $(\mu_n,h_n)\in\mathfrak{M}_n$ строится по некоторой паре $(\mu_{n-1},h_{n-1})\in\mathfrak{M}_{n-1}$ следующим образом:

1) $\mu_n(w)=\mu_{n-1}(w)$, $h_{n-1}(w)=h_n(w)$ при $|w|<y$;

2) $\mu_n(w)=\mu_{n-1}(u_i'\alpha)$, $h_n(w)=h_{n-1}(u_i'\alpha)$, если $w=v_i'\alpha$, $i=\overline{1,r}$, где вершины $u_1',v_1',\ldots,u_r',v_r'$ выбраны произвольно, но так, что $r=2^y$, $\{v_1',\ldots,v_r'\}=$
$=\{w\mid w\in D,\ |w|=y\}$, $\{u_1',\ldots,u_r'\}=\{w\mid w\in D,\ |w|=x\}$,
$h(u_i')=h(v_i')$, $l(h_{n-1},\varepsilon,u_i')=l(h_{n-1},\varepsilon,v_i')$,
$T(h_{n-1},u_i',\ b+(n-2)(y-x)-x)=$
$=T(h_{n-1},v_i',\ b+(n-2)(y-x)-y)$, $i=\overline{1,r}$.

ЛЕММА 3. При любом $n\in N$ справедливо соотношение $T(h,\varepsilon,b)=T(h_n,\varepsilon,b+(n-1)(y-x))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n=0$. Докажем выполнимость соотношения $T(h,\varepsilon,b)\subseteq T(h_0,\varepsilon,b+x-y)$. Для этого для произвольного $\alpha\in\{0,1\}^b$ необходимо показать, что пара $(h(\alpha),l(h,\varepsilon,\alpha))$ принадлежит множеству $T(h_0,\varepsilon,b+x-y)$. Среди элементов $u_1,v_1,\ldots,u_s,v_s$, выбранных описанным выше образом, возьмем элемент v_i такой, что $\alpha=v_i\beta$ для некоторого $\beta\in\{0,1\}^*$. Тогда по построению пары (μ_0,h_0) имеем $(h(\alpha),l(h,\varepsilon,\alpha))=$
$=(h(v_i\beta),l(h,\varepsilon,v_i\beta))=(h_0(u_i\beta),l(h_0,\varepsilon,u_i\beta))$.
Значит, $(h(\alpha),l(h,\varepsilon,\alpha))\in T(h_0,\varepsilon,b+x-y)$.

Докажем выполнимость соотношения $T(h_0,\varepsilon,b+x-y)\subseteq T(h,\varepsilon,b)$. Для этого для каждого $\alpha\in D$ такого, что $|\alpha|=b+x-y$, необходимо показать, что пара $(h_0(\alpha),l(h_0,\varepsilon,\alpha))$ принадлежит множеству $T(h,\varepsilon,b)$. Пусть $\alpha=u_i\beta$, где $1\leq i\leq s$, $\beta\in\{0,1\}^*$. Тогда по построению пары (μ_0,h_0) получаем $(h_0(\alpha)$,
$l(h_0,\varepsilon,\alpha))=(h_0(u_i\beta),l(h_0,\varepsilon,u_i\beta))=(h(v_i\beta),l(h,\varepsilon,v_i\beta))$.

Значит,

$$(h_0(\alpha), l(h_0, \varepsilon, \alpha)) \in T(h, \varepsilon, b).$$

Следовательно, лемма доказана в случае $n = 0$.

Лемма очевидна при $n = 1$. Кроме того, из проведенного для случая $n = 0$ доказательства следует, что для любого $n \in N^+$ выполняется соотношение

$$T(h_n, \varepsilon, b + (n-1)(y-x)) = T(h_{n+1}, \varepsilon, b + n(y-x)).$$

Лемма 3 доказана.

Для любых натуральных чисел $c \geqslant 1$, $d \geqslant 2$ пусть

$$[c]_d = \begin{cases} c & \text{при} \quad c < d!\,d, \\ b & \text{при} \quad c \geqslant d!\,d, \end{cases}$$

где $b \equiv c \pmod{d!}$ и $d!(d-1) \leqslant b < d!\,d$. Для любой R-разметки μ и любого натурального числа $d \geqslant 2$ через $\tilde{\mu}^d$ обозначим R-разметку такую, что если $I_\mu = \{m_0, m_1, \ldots\}$, $m_0 < m_1 < \ldots$, то $I_{\tilde{\mu}^d} = \{n_0, n_1, \ldots\}$, где $n_1 - n_0 = [m_1 - m_0]_d$, $n_{i+1} - n_i = m_{i+1} - m_i$, $i \in N^+$.

ЛЕММА 4. Пусть μ есть R-разметка, A – конечный автомат и a, b, c, d – натуральные числа такие, что $a = |A|$, $d = \psi(a)$, $b = \min\{|v| \mid v \in D \setminus \{\varepsilon\}, \mu(v) = 1\}$, $c = [b]_d$. Тогда для любого множества M равносильны следующие условия:

1) $M = T(h, \varepsilon, b)$ для некоторого поведения h автомата A над μ;

2) $M = T(h', \varepsilon, c)$ для некоторого поведения h' автомата A над $\tilde{\mu}^d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем индукцией по числу b, что условие 1) влечет условие 2). Если $b < d!\,d$, то $c = b$ и тогда положим, что h' есть h. Пусть $b \geqslant d!\,d$. По лемме 2 существуют числа $y_0 \leqslant x_1 < y_1 \leqslant x_2 < y_2 \leqslant \ldots \leqslant x_m < y_m < b$ такие, что $y_0 = 1$, $v(h, \varepsilon, x_i, b) = v(h, \varepsilon, y_i, b)$, $y_{i+1} - y_i < \sqrt{d}$, $m \geqslant d!\sqrt{d}$.

Поскольку

$$d!\sqrt{d} > \sum_{k=1}^{\sqrt{d}} \left(\frac{d!}{k} - 1 \right),$$

то найдутся числа

$$k_0 \in \overline{1, \sqrt{d}}, \quad t = \frac{d!}{k_0}, \quad 1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_t \leqslant m,$$

такие, что

$$y_{\alpha_j} - x_{\alpha_j} = k_0, \quad j = \overline{1, t}.$$

Пусть пары

$$(\mu_n, h_n), \quad n = \overline{1, t},$$

таковы, что $(\mu_t, h_t) \in \{(\mu,h)\}_{[b, x_{\alpha_t}, y_{\alpha_t}, 0]}$, $(\mu_{n-1}, h_{n-1}) \in \{(\mu_n, h_n)\}_{[b, x_{\alpha_{n-1}}, y_{\alpha_{n-1}}, 0]}$, $1 \leq n \leq t$. Тогда, по лемме 3, имеем $T(h, \varepsilon, b) = T(h_1, \varepsilon, b - d!)$, $b - d! = \min\{|v| \mid v \in D \setminus \{\varepsilon\}, \mu_1(v) = 1\}$ и остается применить индуктивное предположение.

Покажем, что условие 2) влечет условие 1). Если $c = b$, то положим, что h есть h'. Пусть $c < b$. Тогда $c = b - d!r$, $r \in N^+$, $c \geq d!(d-1)$, поэтому, по лемме 2, найдутся числа $1 \leq x < y \leq d$ такие, что $V(h', \varepsilon, x, c) = V(h', \varepsilon, y, c)$.

Возьмем $(\mu, h) \in \{(\tilde{\mu}^d, h')\}_{[c, x, y, 1 + \frac{d!r}{y-x}]}$. Тогда, по лемме 3, имеем $T(h, \varepsilon, b) = T(h', \varepsilon, c)$. Лемма 4 доказана.

Для любой R-разметки μ и любого натурального числа $d \geq 2$ через μ^d обозначим R-разметку такую, что если $I_\mu = \{m_0, m_1, \ldots\}$, $m_0 < m_1 < \ldots$, то $I_{\mu^d} = \{n_0, n_1, \ldots\}$, где $n_{i+1} - n_i = [m_{i+1} - m_i]_d$, $i \in N$.

Укажем конструкцию $\mathcal{P}_1$ (называемую конструкцией кольцевого сокращения), которая по любой паре $(\bar{\mu}, \bar{h})$, согласованной относительно автомата A, строит согласованную относительно автомата A пару $(\bar{\mu}', \bar{h}')$, где $\bar{\mu}, \bar{\mu}'$ есть R-разметки.

КОНСТРУКЦИЯ $\mathcal{P}_1$. Возьмем натуральные числа a, b, c, d, n такие, что $a = |A|$, $d = \varphi(a)$, $n = \max\{|\gamma| \mid \gamma \in D, \mu(\gamma) = 1$ и для любого $\omega \in D$, если $\omega \preccurlyeq \gamma$, то $\mu^d(\omega) = \mu(\omega)\}$, $b - n = \min\{|v| \mid v \in D, |v| > n, \mu(v) = 1\}$, $c - n = [b - n]_d$.

Для любого $\gamma \in D$ пусть функционалы μ_γ, h_γ таковы, что $\mu_\gamma(\alpha) = \bar{\mu}(\gamma\alpha)$, $h_\gamma(\alpha) = \bar{h}(\gamma\alpha)$ для любого $\alpha \in D$. Пусть для каждого $\gamma \in D$, $|\gamma| = n$, пара $(\tilde{\mu}^d_\gamma, h'_\gamma)$ строится по паре (μ_γ, h_γ) так же, как пара $(\tilde{\mu}^d, h')$ строилась по паре (μ, h) в доказательстве леммы 4. Тогда пару $(\bar{\mu}', \bar{h}')$ определим следующим образом:

1) $\bar{\mu}'(\omega) = \bar{\mu}(\omega)$, $\bar{h}'(\omega) = \bar{h}(\omega)$, если $|\omega| \leq n$;

2) $\bar{\mu}'(\gamma\alpha) = \tilde{\mu}^d_\gamma(\alpha)$, $\bar{h}'(\gamma\alpha) = h'_\gamma(\alpha)$ для любых $\alpha, \gamma \in D$, где $|\gamma| = n$.

Заметим, что из доказательства леммы 4 имеем $T(\bar{h}, \gamma, b) = T(\bar{h}', \gamma, c)$ для любого $\gamma \in D$, где $|\gamma| = n$.

Укажем конструкцию $\mathcal{P}_2$ (называемую конструкцией кольцевого расширения), которая по любой паре $(\bar{\mu}', \bar{h}')$, согласованной относительно автомата A, и натуральным числам a, b, c, d, n, где $\bar{\mu}'$ есть R-размет-

ка, $a = |A|$, $d = \psi(a)$, $n \in I_{\bar{\mu}'}$, $c - n = \min\{|v| \mid v \in D, |v| > n, \bar{\mu}'(v) = 1\} = [b - n]_d$, строит согласованную относительно автомата A пару $(\bar{\mu}, \bar{h})$.

КОНСТРУКЦИЯ $\mathcal{P}_2$. Для любого $\gamma \in D$ пусть функционалы μ'_γ, h'_γ таковы, что $\mu'_\gamma(\alpha) = \bar{\mu}'(\gamma\alpha)$, $h'_\gamma(\alpha) = \bar{h}'(\gamma\alpha)$ для любого $\alpha \in D$. Пусть для каждого $\gamma \in D$, $|\gamma| = n$, пара (μ_γ, h_γ) строится по паре (μ'_γ, h'_γ) так же, как пара (μ, h) строилась по паре $(\tilde{\mu}^d, h')$ в доказательстве леммы 4. Тогда пару $(\bar{\mu}, \bar{h}')$ определим следующим образом:

1) $\bar{\mu}(w) = \bar{\mu}'(w)$, $\bar{h}(w) = \bar{h}'(w)$, если $|w| \leq n$;

2) $\bar{\mu}(\gamma\alpha) = \mu_\gamma(\alpha)$, $\bar{h}_\gamma(\gamma\alpha) = h_\gamma(\alpha)$ для любых $\alpha, \gamma \in D$, где $|\gamma| = n$.

Заметим, что из доказательства леммы 4 вновь имеем $T(\bar{h}, \gamma, b) = T(\bar{h}', \gamma, c)$ для любого $\gamma \in D$, где $|\gamma| = n$.

ТЕОРЕМА 1. Для любого конечного автомата $A = (K, H, q_0, F)$ и любой R-разметки μ равносильны следующие условия:

1) $\mu \in L(A)$,

2) $\mu^{\varphi(|A|)} \in L(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что условие 1) влечет условие 2). Поскольку $\mu \in L(A)$, то существует функционал h такой, что пара (μ, h) согласована относительно автомата A, $h(\varepsilon) = q_0$ и $Ker(h, \pi) \in F$ для любого пути π. Достаточно показать, что по функционалу h строится функционал τ такой, что пара $(\mu^{\varphi(|A|)}, \tau)$ согласована относительно автомата A, $\tau(\varepsilon) = q_0$ и $Ker(\tau, \pi) \in F$ для любого пути π. Покажем, как строится соответствующий функционал τ. Для этого возьмем $d = \psi(|A|)$ и определим последовательность согласованных относительно автомата A пар (μ_i, h_i), $i \in N$, где (μ_0, h_0) есть (μ, h), а пара (μ_{i+1}, h_{i+1}) строится по паре (μ_i, h_i) следующим образом. Пусть $n_i = \max\{|\gamma| \mid \gamma \in D, \mu_i(\gamma) = 1$ и для любого $w \in D$, если $w \preccurlyeq \gamma$, то $\mu_i(w) = \mu_i^d(w)\}$. Если значение n_i не определено, то положим, что (μ_{i+1}, h_{i+1}) есть (μ_i, h_i). Если же значение n_i определено, то пара (μ_{i+1}, h_{i+1}) строится по паре (μ_i, h_i) так же, как пара $(\bar{\mu}', \bar{h}')$ строилась по паре $(\bar{\mu}, \bar{h})$ в конструкции кольцевого сокращения $\mathcal{P}_1$.

Определим теперь функционал τ. Положим, что τ есть h_i, если значение n_i не определено, начиная с некоторого i. Если же все n_i, $i \in N$, определены, то для любого $w \in D$ положим, что $\tau(w) = h_i(w)$, где i – наименьшее натуральное число такое, что $|w| \leq n_i$. Покажем выполнимость условия $Ker(\tau, \pi) \in F$ для любого пути $\pi = \langle v_0, v_1, \ldots \rangle$. Согласно конструкции кольцевого сокращения $\mathcal{P}_1$ можно указать путь $\nu = \langle u_0, u_1, \ldots \rangle$ и натуральные числа $m_0 < m_1 < \ldots$ такие, что если $I_\mu = \{k_0, k_1, \ldots\}$, $k_0 < k_1 < \ldots$, то $I_{\mu^d} = \{m_0, m_1, \ldots\}$ и $l(h, u_{k_i}, u_{k_{i+1}}) = l(\tau, v_{m_i}, v_{m_{i+1}})$ для любого $i \in N$. Отсюда имеем $Ker(\tau, \pi) = Ker(h, \nu)$. По предположению, имеем $Ker(h, \nu) \in F$. Следовательно, $Ker(\tau, \pi) \in F$.

Тот факт, что условие 2) влечет условие 1), доказывается аналогично с использованием конструкции кольцевого расширения $\mathcal{P}_2$.

Отметим, что частный вид теоремы 1, когда вместо автоматов над размеченными деревьями рассматриваются автоматы над сверхсловами, был получен в [4].

Назовем R-разметку μ почти периодической, если существуют натуральные числа m, n такие, что $\mu(u) = \mu(uv)$ для любого $u, v \in D$, где $|u| > n$, $|v| = m$.

Далее, R-разметка μ называется RP-разметкой, если для любого натурального числа $d \geq 2$ разметка μ^d почти периодическая и по числу d эффективно строятся натуральные числа m, n такие, что $\mu^d(u) = \mu^d(uv)$ для любого $u, v \in D$, где $|u| > n$, $|v| = m$.

Предикат $Q : \{0,1\}^* \to \{И, Л\}$ называется RP-предикатом, если μ_Q есть RP-разметка.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть μ есть RP-разметка. Тогда существует алгоритм, который по любому автомату A определяет, выполняется ли условие $\mu \in L(A)$.*

ТЕОРЕМА 2.2. *Если Q есть RP-предикат, то теория $S2S[Q]$ разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эти два утверждения эквивалентны между собой согласно лемме 1. Первое из них есть следствие теоремы 1 и следующего истинного (согласно [1]) утверждения: если μ' – почти периодическая разметка,

то существует алгоритм, который по любому автомату A определяет выполнимость условия $\mu' \in L(A)$.

Следуя [4], можно указать некоторые примеры RP-предикатов. Отсюда вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Теория $S2S[Q]$ разрешима, если

$$Q(\omega) = \begin{cases} И & \text{при } |\omega| \in I, \\ Л & \text{при } |\omega| \notin I, \end{cases}$$

где I – одно из множеств вида $\{x! \mid x \in N\}$, $\{x^a \mid x \in N\}$, $\{a^x \mid x \in N\}$, $a \in N$.

Средства построения других RP-предикатов можно извлечь из [5]. Так, с каждой R-разметкой μ можно связать строго возрастающую функцию $f: N \to N$, область значений которой есть I_μ. Тогда изучение класса RP-предикатов эквивалентно изучению класса функций, связанных указанным образом с RP-разметками. Назовем такие функции RP-функциями. Класс RP-функций в других терминах изучался в [5]. Поэтому, основываясь на [5], укажем здесь некоторые свойства класса RP-функций.

1. Если функция $h(x) = f(g(x))$ получена операцией суперпозиции из RP-функций f и g, то такой же будет и функция h.

2. Пусть f и g есть RP-функции. Тогда такими же будут следующие функции: $h_1(x) = f(x) + g(x)$, $h_2(x) = f(x)\,g(x)$, $h_3(x) = \sum_{i=0}^{x} f(i)$. Если $f(0) > 0$, то $h_4(x) = \prod_{i=0}^{x} f(i)$ есть RP-функция. Кроме того, RP-функцией будет функция h_5, связанная с последовательностью Фибоначчи и задаваемая следующей рекурсивной схемой:

$$h_5(0) = 1,\ h_5(1) = 2,\ h_5(x+2) = h_5(x) + h_5(x+1).$$

3. Пусть f, g и h есть RP-функции. Тогда такими же будут функции $\varphi_1(x) = \sum_{i=0}^{g(x)} f(i)$ и $\varphi_2(x) = \prod_{i=0}^{g(x)} h(i)$, если $h(0) > 0$.

В силу теоремы 2.2 свойства 1–3 позволяют строить многочисленные примеры разрешимых теорий вида $S2S[Q]$, где Q есть RP-предикат. Теория $S2S[Q]$ будет разрешима также и при некоторых условиях для Q, более слабых, чем то, что Q есть RP-предикат. Пусть, например, $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ – вершины дерева D' такие, что каждый путь дерева D' содержит в точности одну из вершин $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$. Пусть $Q: D \to \{И, Л\}$ – произвольный предикат, который определяет предикаты $Q_i: D \to \{И, Л\}$ так, что $Q_i(\alpha) = Q(\gamma_i \alpha)$ для любого $\alpha \in D$, $1 \le i \le m$. В таком случае теория $S2S[Q]$, очевидно, разрешима тогда и только тогда, когда разрешима каждая теория $S2S[Q_i]$,

$1 \leq i \leq m$. Если при этом $Q_1, \ldots, Q_m$ есть RP-предикаты, то предикат Q уже, вообще говоря, не будет RP-предикатом, но теория $S2S[Q]$ будет разрешимой.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $Q : N \to \{И, Л\}$ – такой унарный предикат, задаваемый по некоторой RP-функции f, что $Q(x)$ истинно, если и только если число $[\log_2(x)]$ принадлежит области значений функций f. Тогда разрешима синглярная теория второго порядка модели

$$\langle N; 0, 2x, 2x+1, Q \rangle.$$

Литература

1. **M.O.RABIN, Definability of second-order theories and automata on infinite trees, Trans. Amer. Math. Soc., 141 (1969), 1-35.**

(Русский перевод: Кибернетический сборник, вып. 8, М., Мир, 1971, 72-116.)

2. А. И. КОКОРИН, А. Г. ПИНУС, Вопросы разрешимости расширенных теорий, Успехи матем. наук, 33, № 2 (1978), 49-84.

3. **J.R.BÜCHI, On a decision method in restricted second order arithmetic, Proc. Internat. Congr. Logic, Methodol. and Philos. Sci., 1960, Stanford. Univ. Press, 1962, 1-11.**

(Русский перевод: Кибернетический сборник, вып. 8, М., Мир, 1964, 78-90.)

4. **C.C.ELGOT, M.O.RABIN, Decidability and undecidability of extensions of second (first) order theory of (generalized) successor, J.Symb. Logic, 31, N° 2 (1966), 169-181.**

5. **D.SIEFKES, Decidable extensions of monadic second order successor arithmetic, Ber. Math. Forschungsinst. Oberwolfach, 3(1970), 441-472.**

6. **D.SIEFKES, Decidable and undecidable extensions of one-place second order arithmetic, J.Symb. Logic, 33, N° 3(1968), 494-495.**

7. **W.THOMAS, The theory of successor with an extra predicate, Math. Ann. 237, N° 2 (1978), 121-132.**

8. А. А. СЕМЁНОВ, Логические теории одноместных функций на натуральном ряде, Изв. АН СССР, Сер. матем., 47, № 3 (1983), 623-658.

9. Я. М. БАРЗДИНЬ, Сложность распознавания симметрии на машинах Тьюринга, Проблемы кибернетики, вып. 15, М., Наука, 1965, 245-248.

10. Б. А. ТРАХТЕНБРОТ, Тьюринговы вычисления с логарифмическим замедлением, Алгебра и логика, 3, № 4 (1964), 33-48.

11. А. А. ЛЕТИЧЕВСКИЙ, Эквивалентность автоматов относительно полугрупп, В кн. "Теоретическая кибернетика", вып. 6, Киев, 1970, 3-71.

12. Л. П. ЛИСОВИК, О конечных преобразователях над размеченными деревьями и квазитождествах в свободной полугруппе, Проблемы кибернетики, вып. 40, М., Наука, 1983, 19-41.

Поступило 15 ноября 1983 г.