В. А. Гриценко, Рекуррентные соотношения в теории операторов Гекке, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1983, том 125, 65–73

В.А.Гриценко

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ ГЕККЕ

Изучение мультипликативных свойств коэффициентов Фурье модулярных форм тесно связано с задачей о разложении многочленов Гекке на множители в подходящем расширении кольца Гекке (см.работу [I]). В работе автора [2] описан широкий класс многочленов с коэффициентами из кольца Гекке рода $n+1$, раскладывающихся на множители в ступенчатом расширении этого кольца, при этом коэффициенты множителей выражены через "отрицательные степени" элементов Фробениуса этого кольца (см.(I.6) ниже). Разложения многочлена Ранкина рода n и многочлена Гекке рода 3 описываются с использованием лишь "−2 степени" элемента Фробениуса Λ . Это объясняет актуальность задачи явного вычисления Λ^{-2} . Соответствующая формула была анонсирована в 2 (формула (4.8)). Данная работа посвящена доказательству этой формулы.

§ I. Кольца Гекке

Обозначим через $M_n(\mathbb{A})$ кольцо $n\times n$-матриц с элементами из кольца $\mathbb{A}$. Пусть p – простое число, q – произвольное натуральное число, взаимно простое с p , E_n – единичная $n\times n$ -матрица,

$$\mathbb{Z}[p]=\{z=ap^{b};\ a,b\in\mathbb{Z}\},\quad J_n=\begin{pmatrix}0 & E_n\\ -E_n & 0\end{pmatrix},$$

$$\Gamma_n(q)=\left\{M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in M_{2n}(\mathbb{Z});\ {}^tMJ_nM=J_n,\ C\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ q)\right\}$$

конгруэнц-подгруппа модулярной группы Зигеля $Sp_n(\mathbb{Z})$,

$$S_n^p(q)=\left\{M=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\in M_{2n}(\mathbb{Z}[p]),\ {}^tMJ_nM=p^{\delta(M)}J_n,\ \delta(M)\in\mathbb{Z},\right.$$
$$\left.C\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ q)\right\}.$$

Пусть $\Gamma_{n,1}(q)$ (соответственно $S^p_{n,1}(q)$) – подгруппа группы $\Gamma_{n+1}(q)$ (соответственно $S^p_{n+1}(q)$), состоящая из тех матриц, последняя строка которых имеет вид $(0,0,\dots,0,\delta)$. Через $L_p^{n+1}(q)$ будем обозначать кольцо Гекке пары $(\Gamma_{n+1}(q),\ S^p_{n+1}(q))$. Напомним (см. [I] , глава I), что кольцо Гекке $L_p^{n+1}(q)$ это $\Gamma_{n+1}(q)$ -инвариантное подпространство $\mathbb{Q}$ -векторного пространства V , состоящего из всех формальных конечных линейных комбинаций

$$X=\sum_i a_i\left(\Gamma_{n+1}(q)g_i\right),\ a_i\in\mathbb{Q},\ g_i\in S^p_{n+1}(q).$$

Представление группы $\Gamma_{n+1}(q)$ на V задается равенством

$$X\longrightarrow X\cdot\gamma=\sum_i a_i\left(\Gamma_{n+1}(q)g_i\gamma\right).$$

Для любых двух элементов

$$X=\sum a_i(\Gamma_{n+1}(q)g_i)\ \text{ и }\ Y=\sum b_j(\Gamma_{n+1}(q)h_j)$$

кольца $L^{n+1}_p(q)$ их произведение $X\cdot Y$ определено равенством

$$X\cdot Y=\sum_{i,j}a_i b_j\left(\Gamma_{n+1}g_i h_j\right).$$

Если мы заменим в определении кольца Гекке $L^{n+1}_p(q)$ группы $\Gamma_{n+1}(q)$ и $S^p_{n+1}(q)$ на группы $\Gamma_{n,1}(q)$ и $S^p_{n,1}(q)$, то получим определение ступенчатого кольца Гекке $L^{n,1}_p(q)$. Положим

$$L^{n+1}=L^{n+1}_p(q)\ \text{ и }\ L^{n,1}=L^{n,1}_p(q).$$

Хорошо известно (см. [3]), что любой элемент X кольца L^{n+1} можно представить в виде суммы классов $X=\sum a_i\Gamma_{n+1}(q)g_i$, где

$$g_i=\begin{pmatrix}p^{\delta}{}^t\mathcal{D}^{-1} & B\\ 0 & \mathcal{D}\end{pmatrix}\ \text{ и }\ \mathcal{D}=\begin{pmatrix}p^{d_1} & * & *\cdots * \\ 0 & p^{d_2} & *\cdots *\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0\cdots p^{d_n}\end{pmatrix}. \tag{I.I}$$

Отображение

$$\mathcal{E}:X\to\widetilde{X}=\sum_i a_i\Gamma_{n,1}(q)g_i \tag{I.2}$$

является вложением кольца L^{n+1} в кольцо $L^{n,1}$ (см. [I], лемма I.I.3). Мы будем отождествлять кольцо Гекке L^{n+1} с его образом $\mathcal{E}(L^{n+1})$ в кольце L^{n+1}. Любой элемент $X\in L^{n,1}$ можно представить в виде суммы $X=\sum_i a_i\Gamma_{n,1}(q)g_i$, где g_i имеет вид (I.I). Положим

$$\Phi_{n+1}(X)=\sum_i a_i x_0^{\delta_i}\prod_{j=1}^{n+1}\left(x_j\,p^{-j}\right)^{d_{ij}}. \tag{I.3}$$

Отображение Φ (см. [4]) является гомоморфизмом кольца $L^{n,1}$ в кольцо многочленов от $n+2$ переменных, а сужение $\Phi \mid L^{n+1}$ является изоморфизмом кольца L^{n+1} и кольца многочленов $\mathbb{Q}^{W_{n+1}}[x_0^{\pm 1}, \ldots, x_{n+1}^{\pm 1}]$, инвариантных относительно перестановок переменных $x_1, \ldots, x_{n+1}$, и преобразований вида

$$x_0 \longrightarrow x_0 x_i,\ x_i \longrightarrow x_i^{-1},\ x_j \longrightarrow x_j \quad (j \neq i).$$

Пусть

$$\tau^{(n)}(z) = \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i^{-1} z)(1 - x_i z) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \tau_i^{(n)} z^i. \qquad (I.4)$$

Коэффициенты $\tau_i \in \mathbb{Q}^{W_n}[x_0^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$, поэтому можно определить многочлен Ранкина $R^{(n)}(z)$ из кольца $L^n[z]$ такой, что

$$R^{(n)}(z) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i R_i^{(n)} z^i = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \Phi_n^{-1}(\tau_i) z^i. \qquad (I.5)$$

Кольцо $L^{n,1}$ в отличие от кольца L^{n+1} некоммутативно и обладает делителями нуля. Структура кольца $L^{n,1}$ была исследована в параграфе 3 работы [2]. Элементами Фробениуса кольца $L^{n,1}$ назовем элементы

$$\Lambda = \Lambda_- = \Gamma_{n,1}(q) \begin{pmatrix} pE_n & 0 \\ 0 & p^2 pE_{n_1} \end{pmatrix} \Gamma_{n,1}(q),\ \Lambda_+ = \Gamma_{n,1}(q) \begin{pmatrix} pE_{n_1} & 0 \\ 0 & pE_{n_{p^2}} \end{pmatrix} \Gamma_{n,1}(q).$$

В работе [2] установлено (см. теорему 3.I), что $p^{-n-1}\Lambda_- \Delta^{-1}$ и $p^{-n-1}\Lambda_+ \Delta^{-1}$ ($\Delta = \Gamma_{n,1}(q)\, p E_{2n+2}$ – обратимый элемент кольца $L^{n,1}$) являются, соответственно, левым и правым корнем многочлена Ранкина $R^{(n+1)}(z)$, что позволяет определить рекуррентную последовательность "отрицательных степеней" элементов $\Lambda_\mp$:

$$\Lambda_-^k = \sum_{i=1}^{2n+2} (-1)^{i+1} p^{-(n+1)i} \Lambda_-^{i+k} R_i^{(n+1)} \Delta^{-i}, \qquad (I.6)$$

$$\Lambda_+^k = \sum_{i=1}^{2n+2} (-1)^{i+1} p^{-(n+1)i} R_i^{(n+1)} \Lambda_+^{i+k} \Delta^{-i}.$$

§ 2. Стандартные операторы кольца $L^{n,1}$

Пусть

$$\mathbb{C}_- = \left\{ X \in L^{n,1} : X\Lambda_- = \Lambda_- X \right\}$$

— централизатор оператора Λ_- в $L^{n,1}$. Будем писать $A \equiv B \pmod{\mathbb{C}_-}$, если $A - B \in \mathbb{C}_-$ ($A, B \in L^{n,1}$).

ЛЕММА 1. Пусть A и B два элемента кольца $L^{n,1}$. Если $A \equiv B \pmod{\mathbb{C}_-}$ и $\Phi(A) = \Phi(B)$, то $A = B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложений 3.1 и 3.4 из [2] сужение гомоморфизма Φ на $\mathbb{C}_-$ инъективно.

Опишем теперь разложение элемента $R_2^{(n+1)}$ на двойные смежные классы в кольцах Гекке $L^{n,1}$ и L^{n+1}. Введем с этой целью некоторые стандартные операторы из этих колец. Пусть

$$T_{i,n+1} = \Gamma_{n+1}(q)\left[\begin{array}{cc|cc} \rho E_{n+1-i} & 0 & & \\ 0 & E_i & & 0 \\ \hline & & \rho E_{n+1-i} & 0 \\ & 0 & 0 & \rho^2 E_i \end{array}\right]\Gamma_{n+1}(q), \quad \Delta = \Gamma_{n+1}(q)\,\rho E_{2n+2}.$$

Если $X = \Gamma_n(q)\begin{pmatrix} \rho^\delta\, {}^t\mathfrak{D}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathfrak{D} \end{pmatrix}\Gamma_n(q)$ — элемент кольца Гекке L^n, то через $X^{(i)}(r)$ ($i, r \in \mathbb{Z}$) обозначим соответствующий оператор кольца $L^{n,1}$:

$$X^{(i)}(r) = \Gamma_{n,1}(q)\left(\begin{array}{cc|cc} \rho^\delta\, {}^t\mathfrak{D}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^{\delta-i} & 0 & r \\ \hline 0 & 0 & \mathfrak{D} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho^i \end{array}\right)\Gamma_{n,1}(q).$$

ЛЕММА 2. Имеет место следующее равенство

$$T_{2,n+1} = T_{1,n}^{(2)} + T_{1,n}^{(0)} + T_{2,n}^{(1)} + \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z}/\rho\mathbb{Z}, \\ r \not\equiv 0}} T_{1,n}^{(1)}(r) + \sum_{V \in \mathbb{Z}/\rho\mathbb{Z}} \Gamma_{n,1}(q)\left(\begin{array}{cc|cc} \rho E_n & 0 & 0 & \ell \\ {}^t q & \rho & {}^t\ell & r \\ \hline 0 & 0 & \rho E_n & q \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{array}\right)$$

причем пара столбцов ℓ, q пробегает все множество $M_{n,1}(\mathbb{Z}/\rho\mathbb{Z}) \times M_{n,1}(\mathbb{Z}/\rho\mathbb{Z})$, за исключением пары $(0, 0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы отождествляем кольцо L^{n+1} и его ε-образ в $L^{n,1}$ (см. (1.2)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 & B & * \\ * & a & * & * \\ C & 0 & \mathfrak{D} & * \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \in S_{n,1}^{\rho}(q).$$

Отображение

$$\omega : M \longrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & \mathcal{D} \end{pmatrix}$$

является очевидно гомоморфизмом группы $S^{P}_{n,1}(q)$ в группу $S^{P}_{n}(q)$. Двойной смежный класс $T_{2,n+1}$ состоит из матриц $M \in S^{P}_{n+1}(q)$, имеющих ранг 2 над конечным полем $\mathbb{Z}_P$. Разобьем матрицы этого класса на три подмножества таких, что ρ – ранг матриц $\omega(M)$ равен 0,I,2 соответственно. Тогда матрицы из первого подмножества $(\mathrm{rang}_P\, \omega(M) = 0)$ принадлежат одному из смежных классов, стоящих под знаком второй суммы, матрицы из третьего подмножества $(\mathrm{rang}_P\, \omega(M) = 2)$ – двойному классу $T^{(1)}_{2,n}$, а матрицы из второго подмножества попадают в один из оставшихся классов.

ЛЕММА 3. Справедливо равенство

$$\Phi(T_{2,n+1}) = x_0^2 \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n+1}\Big(p^{-\langle n-1\rangle} r_2^{(n+1)} + p^{-\langle n\rangle}(p^n-1) r_1^{(n+1)} - \\ - \frac{p^{-\langle n+1\rangle+2}(1+p^{n-1})(1-p^{n-1})}{1-p^2}\Big),$$

где r_2 и r_1 – коэффициенты многочлена $r^{(n+1)}(z)$ (см.(I.4)), а $\langle n\rangle = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя леммы 3.I, 3.6, 4.I статьи [2] легко получить следующие равенства:

$$\Phi_{n+1}(T^{(2)}_{1,n}) = x^2_{n+1}\Phi_n(T_{1,n}),\ \Phi_{n+1}(T^{(0)}_{1,n}) = \Phi_n(T_{1,n}),$$

$$\Phi_{n+1}(T^{(1)}_{1,n}(r)) = p^{-n} x_{n+1}\Phi_n(T_{1,n}),\Phi_{n+1}(T^{(1)}_{2,n}) = p^{-n+1} x_{n+1}\Phi_n(T_{2,n}),$$

$$\Phi_n(T_{1,n}) = p^{-\langle n-1\rangle} x_0^2 x_1 \cdot \ldots x_n\left[r_1^{(n)} + 1 - p^{-n}\right].$$

Для доказательства леммы 3 теперь достаточно применить индукцию по n.

ЛЕММА 4. В кольце L^{n+1} справедливо равенство

$$p^{2n+1}\Delta R_2^{(n+1)} = T_{2,n+1} - (p^n-1)T_{1,n+1} + \frac{(p^{n+1}-1)(p^{n+2}+p^{n+1}-p^n+1)}{(p^2-1)}\Delta .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение Φ инъективно на L^{n+1},

$$p^{n+1}\Delta R_1^{(n+1)} = T_{1,n+1} - (p^{n+1}-1)\Delta \quad \text{(см.лемму 3.6 из [2])},$$

$$\Phi(\Delta)=p^{-\langle n+1\rangle}x_0^2 x_1\cdot\ldots\cdot x_{n+1}.$$

Перейдем теперь к исследованию коэффициента R_3. Отметим, что для вычисления Λ^{-2} нам необходимо получить разложение элемента $\Lambda_- R_3^{(n+1)}$ (см.(I.6), $K=-2$).

ЛЕММА 5. Выполняется сравнение

$$p^{(n+1)}\Lambda R_3^{(n+1)}\equiv pT_{2,n}^{(1)}+p^2(p^{n-1}-1)T_{1,n}^{(1)}(\mathrm{mod}\,\mathbb{C}_-).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$\tau_3^{(n+1)}=x_{n+1}^2\tau_2^{(n)}+x_{n+1}^{-1}\tau_2^{(n)}+\tau_1^{(n)}+\tau_3^{(n)},$$

$$\Phi_{n+1}(p^{3n}\Delta R_3^{(n+1)})=\Phi_n(p^{2n-1}\Delta_n R_2^{(n)})+x_{n+1}[\Phi_n(p^{2n-1}\Delta_n R_1^{(n)})+$$
$$+\Phi_n(p^{2n-1}\Delta_n R_3^{(n)})]+x_{n+1}^2\Phi_n(p^{2n-1}\Delta_n R_2^{(n)}).$$

Обозначим Φ_{n+1}-прообразы первого, второго и третьего слагаемых через X_0, X_1, X_2, тогда $X_0\in\mathbb{C}_-$ и $\Lambda X_1\in\mathbb{C}_-$ - в силу лемм 3.I и 3.2 и предложения 3.2 из [2]. Вычислим элемент X_0. Применяя лемму 4, получаем:

$$\Phi_{n+1}(X_0)=\Phi_{n+1}\left(T_{2,n}^{(0)}-(p^{n-1}-1)T_{1,n}^{(0)}+\frac{(p^n-1)(p^{n+1}+p^n-p^{n-1}+1)}{p^2-1}\Lambda_-\right).$$

Сужение отображения Φ_{n+1} на $\mathbb{C}_-$ инъективно, следовательно, элементы, стоящие в последнем равенстве под знаком Φ, совпадают.

Множество двойных смежных классов образует базис кольца $L^{n,1}$, рассматриваемого как векторное пространство над $\mathbb{Q}$, следовательно, любой элемент X кольца $L^{n,1}$ можно представить в виде

$$X=\sum_i a_i\Gamma_{n,1}(q)g_i\Gamma_{n,1}(q).$$

Положим

$$X^*=\sum_i a_i\Gamma_{n,1}(q)p^{\delta(g_i)}g_i^{-1}\Gamma_{n,1}(q).\qquad(2.\mathrm{I})$$

Тогда отображение $*$ является антиавтоморфизмом кольца $L^{n,1}$ и обладает следующими важными свойствами (см.лемму 2.2 из [2]):

$$X^*=X,\ \text{ если } X\in L^{n+1};\ (X^*)^*=X\ \text{ для любого } X\in L^{n,1}.$$

Из инвариантности R_3 относительно инволюции $*$ получаем, что $X_2=X_0^*$, то есть,

$$X_2 = T^{(2)}_{2,n} - (p^{n-1}-1) T^{(2)}_{1,n} + \frac{(p^n-1)(p^{n+1}+p^n-p^{n-1}+1)}{p^2-1} \Lambda_+ .$$

Легко проверить (см.лемму 3.I [2]), что

$$\Lambda_- T^{(2)}_{2,n} = p^{2n} \Delta T^{(1)}_{2,n} ,$$

$$\Lambda_- T^{(2)}_{1,n} = p^{2n+1} T^{(1)}_{1,n} \Delta ,$$

$$\Lambda_- \Lambda_+ = p^{2n+2} \Delta^2 .$$

Лемма 5 доказана.

§ 3. Основное равенство

ЛЕММА 6. Выполняется соотношение

$$\Lambda_-^2 R_i^{(n+1)} \in \mathbb{C}_- , \quad 1 \leqslant i \leqslant 2n+1 .$$

Утверждение леммы сразу следует из предложения 3.2 [2] .

Преобразуем теперь равенство (I.6). Принимая во внимание утверждение леммы 6, получаем, что

$$(p^{n+1}\Delta)^4 \Lambda_-^{-2} = (p^{n+1}\Delta)^3 \Lambda_-^{-1} R_1 - (p^{n+1}\Delta)^2 R_2 + \Lambda_- (p^{n+1}\Delta) R_3 (\mathrm{mod}\, \mathbb{C}_-) . \quad (3.\mathrm{I})$$

Элемент Λ_-^{-1} вычислен в [2] (см.предложение 4.3):

$$(p^{n+1}\Delta)^{-2} \Lambda_-^{-1} = \Lambda_+ + \nabla_1 - p\Delta ,$$

где

$$\nabla_1 = \sum_{a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \Gamma_{n,1}(q) \begin{bmatrix} pE_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & a \\ 0 & 0 & pE_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} .$$

Сформулируем основные соотношения, необходимые для вычисления элемента $\Lambda_-^{-1} R_1^{(n+1)}$.

ЛЕММА 7. Имеют место следующие равенства:

$$\Lambda_- (\nabla_1 - p\Delta) = 0, \quad \nabla_1^2 = p\Delta\nabla_1 ,$$

$$\nabla_1 T^{(1)}_{1,n} = \sum_{r \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} T^{(1)}_{1,n}(r) ,$$

$$p^{n+1}\Delta R_1^{(n+1)} = T_{1,n+1} - (p^{n+1}-1)\Delta,$$

$$T_{1,n+1} = T_{1,n}^{(1)} + \Lambda_+ + \Lambda_- + \nabla_1 - \Delta.$$

Первые три равенства легко получить прямыми вычислениями, последние два доказаны в леммах 3.5, 3.6 [2].

Определим еще один элемент кольца $L^{n,1}$:

$$\nabla_2 = \sum_{\substack{\tau\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ q,\ell\in M_{n,1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})}} \Gamma_{n,1}(q)\begin{bmatrix} pE_n & 0 & 0 & \ell \\ -{}^t q & p & {}^t\ell & \tau \\ 0 & 0 & pE_n & q \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}\Gamma_{n,1}(q).$$

Теперь мы можем завершить вычисление элемента Λ_-^{-2}. Соберем вместе результаты лемм 2,4,5,7 и произведем в сравнении (3.I) необходимые преобразования и сокращения, получим:

$$\begin{aligned}(p^{n+1}\Delta)^4\Lambda_-^{-2} &= \Lambda_+^2 + (\nabla_1 - p\Delta)\Lambda_- + \Lambda_+(\nabla_1 - p\Delta) + \\ &+ (1-p)\Delta\Big(\sum_{\tau\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} T_{1,n}^{(1)}(\tau) - pT_{1,n}^{(1)}\Big) + \big(\Lambda_+ T_{1,n}^{(1)} - p\Delta T_{1,n}^{(2)}\big) + \\ &+ (\Lambda_+\Lambda_- - p\Delta\nabla_2) \pmod{\mathbb{C}_-}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

В работе [2] доказано, что

$$\Lambda_-^2\Lambda_-^{-2} = \Gamma_{n,1}(q)E_{2n}.$$

следовательно,

$$\Phi_{n+1}\big((p^{n+1}\Delta)^4\Lambda_-^{-2}\big) = p^{-2\langle n\rangle}(x_0^2 x_1\cdot\ldots x_n x_{n+1}^2)^2 = \Phi_{n+1}(\Lambda_+^2).$$

Легко заметить, что Φ-образ любого другого слагаемого, стоящего в правой части сравнения (3.2), равен 0, поэтому знак сравнения в (3.2) можно заменить на знак равенства в силу леммы I.

Для того, чтобы найти Λ_+^{-2}, достаточно заметить, что $(\Lambda_-)^* = \Lambda_+$ и $(\Lambda_-^{-2})^* = \Lambda_+^{-2}$ (см.(2.I)). Следовательно,

$$(p^{n+1}\Delta)^4\Lambda_+^{-2}=\Lambda_-^2+(\nabla_1-p\Delta)\Lambda_-+\Lambda_+(\nabla_1-p\Delta)+$$

$$+(1-p)\Delta\Big(\sum_{\tau\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}T_{1,n}^{(1)}(\tau)-pT_{1,n}^{(1)}\Big)+\big(T_{1,n}^{(1)}\Lambda_- - p\Delta T_{1,n}^{(0)}\big)+$$

$$+(\Lambda_+\Lambda_- - p\Delta\nabla_2).$$

Литература

1. А н д р и а н о в А.Н. Мультипликативная арифметика зигелевых модулярных форм. - Успехи мат.наук, 1979, т.34, № 1, с.67-135.
2. Г р и ц е н к о В.А. Действие модулярных операторов на коэффициенты Фурье-Якоби модулярных форм. - Мат.сб., 1982, т.119, № 2, с.248-278.
3. S h i m u r a G. Frithmetic of alternating forms and quaternion hermitian forms. - J.Math.Soc.Japan, 1963, vol.15, N 1, p.33-65.
4. S a t a k e I. Theory of spherical functions on reductive algebraic group over p-adic fields. - Publ.Math. IHES, 1963, N 18, p.1-69.