УДК 514.755.4

А. В. Чакмазян

СВЯЗНОСТЬ В НОРМАЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ НОРМАЛИЗОВАННОГО ПОДМНОГООБРАЗИЯ V_m в P_n

ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

1. Основной идеей теории расслоенных пространств в ее дифференциально-геометрическом аспекте является идея связности. Теории связностей положила начало в 1917 г. работа Леви-Чивита [57] о параллельном перенесении вектора в римановом пространстве. Эта идея немедленно нашла важные приложения в общей теории относительности и была обобщена в разных направлениях. В 1918 г. Вейль [60] для построения единой теории поля ввел понятие пространства аффинной связности. Дальнейшее обобщение дал в 1920 г. Кёниг [56], рассматривая линейную связность в векторном расслоении над областью $U \subset R^n$.

Новый этап в развитии теории связностей открывается работами Э. Картана в 20-ых годах. Э. Картан заменяет касательные векторные пространства аффинными, проективными или конформными пространствами. Затем, в 1926 г. он вводит общее понятие «неголономного пространства с фундаментальной группой $G_{\|}$» [51]. В 1924 году Схоутен [58], [59] устанавливает связь между концепциями Кёнига и Картана.

Следующий этап в развитии теории связностей начался в 40-х годах работами В. В. Вагнера, сводное изложение которых он дал в [9]. Дальнейшее развитие теории связностей с привлечением методов Э. Картана и теории геометрических объектов дано в работах Г. Ф. Лаптева [17], [29]. В своих исследованиях Г. Ф. Лаптев придерживается вначале локальной точки зрения. Однако, благодаря применяемому методу, полученные результаты фактически приобретают глобальный характер. Краткий обзор основных результатов приведен в [29]. Очерк дальнейшего развития теории связности и обзор новых результатов приведен в работе Ю. Г. Лумисте [21].

2. Приложением теории связности к геометрии подмногообразий, вложенных в риманово пространство, пространство постоянной кривизны и евклидово пространство, занимались многие исследователи [35], [53]. Первые применения понятия связности к геометрии подмногообразий в проективном пространстве дал Э. Картан [52] в 1937 году. Подмногообразие V_m в проективном пространстве P_n называется оснащенным в смысле Э. Картана, если к каждой точке $x \in V_m$ присоединена $(n-m-1)$-мерная плоскость, не пересекающая касательную плоскость $T_x(V_m)$ подмногообразия V_m. Связность инфинитезимально определяется проектированием из этой $(n-m-1)$-мерной плоскости. Тогда на оснащенном подмногообразии V_m индуцируется проективная связность. Г. Ф. Лаптев [14]—[16] в 1941 году, следуя идеям Э. Картана, дал строгое определение пространства аффинной связности и выделил естественным образом комплекс внутренних геометрий на многомерной поверхности пространства аффинной связности.

В 1950 году появилась монография А. П. Нордена [24], в которой разработан метод нормализации, позволяющий на подмногообразиях проективного пространства индуцировать аффинные связности без кручения. Н. М. Остиану в 1955 году исследовала связность на касательных расслоениях подмногообразия аффинно-симплектического пространства [26], [27]. П. А. Широков и А. П. Широков исследовали локальное строение подмногообразия с помощью аффинной связности в касательных расслоениях [50]. А. В. Столяров [33] вводил аффинные связности на гиперполосном распределении и двойственные линейные связности на оснащенных многообразиях пространства проективной связности [34].

В этих и во многих других исследованиях подмногообразий в классических однородных пространствах в основном ограничиваются изучением связности в касательном расслоении подмногообразия. В последнее время обнаружилось, что теория подмногообразия многомерного евклидова или неевклидова пространства принимает более стройный вид, если использовать связность не только в касательном, но и в нормальном расслоении.

3. Еще Э. Картан в 1926—27 году в своих лекциях в Сорбонне [12], которые были посвящены подмногообразиям рима-

новых пространств, вводил внутреннее нормальное дифференцирование и гауссово кручение подмногообразия. В настоящее время эти понятия можно истолковать с помощью связности в нормальном расслоении и ее форм кривизны. Д. И. Перепелкин (1935 г.) в [30], а Фабрициус — Бьерре (1936 г.) в [55] исследовали подмногообразие V_m в n-мерном евклидовом пространстве с плоской нормальной связностью. В последние годы в зарубежной литературе появляется много работ, в которых изучаются некоторые вопросы теории связностей в нормальных расслоениях подмногообразий в пространствах постоянной кривизны V_n^c; в частности, в евклидовом пространстве [53], [22]. Чен и Яно в [54] рассмотрели подмногообразия V_m риманова пространства V_n с параллельным p-мерным подрасслоением нормального расслоения. В этих работах, в основном, рассматриваются подмногообразия с плоской нормальной связностью, на которых вектор средней кривизны переносится параллельно.

Подмногообразия V_m с общим параллельным нормальным векторным полем в V_n^c рассматривались Ю. Г. Лумисте и автором, в работе [23]. В [6] М. А. Акивис и автор исследовали геометрию подмногообразия V_m с плоской нормальной связностью в евклидовом пространстве E_n. Аналогичные вопросы рассматривались в [7], [46] для оснащенного подмногообразия аффинного пространства. Более детальное исследование локального строения подмногообразий $V_m \subset V_n^c$, допускающих параллельное поле p-мерных нормальных направлений, дано автором настоящей статьи в [43] — [45]. В развитую в этих работах теорию включаются и более ранние иследования автора о двойственно нормализуемых подмногообразиях, проведенные в работах [38]—[42], а также исследование p-мерной поднормализации подмногообразия, проведенное Ю. Г. Лумисте в [19]. В этих работах выявляются глубокие связи теории подмногообразий, допускающих параллельное поле p-мерных нормальных направлений, с работами В. В. Рыжкова, М. А. Акивиса и В. Т. Базылева о многообразиях, несущих сопряженные системы [31], [3] и сети [8], и о тангенциально вырожденных подмногообразиях [32], [1], [2].

4. Исследования, проведенные в этих последних работах, имеют проективный характер. Поэтому представляет интерес распространение результатов, полученных в вышеупомянутых работах, на случай нормализованного подмногообразия V_m, вложенного в проективное пространство, используя связность в нормальном расслоении, определенную А. П. Норденом [25] для такого подмногообразия. Эту связность А. П. Норден называет внешней связностью. В [47] и [48] исследовано локальное строение подмногообразия V_m проективного пространства P_n, нормализованного по Нордену, допускающего параллельное поле p-мерных нормальных направлений. Изучено также строение подмногообразия V_m, которое имеет нормальное подрасслое-

ние с плоской или полуплоской нормальной связностью. В частном случае рассматривается параллельное перенесение нормального направления подмногообразия V_m, нормализованного по Нордену.

В настоящей работе дается обзор результатов исследования нормальной проективной связности подмногообразия, нормализованного по Нордену, в n-мерном проективном пространстве P_n. Здесь объединяются многие, ставшие уже классическими, объекты исследования (нормализация Нордена, фокусные образы конгруэнций плоскостей, расслояемое подмногообразие m-пар, тангенциально вырожденное подмногообразие, двойственная нормализация, сопряженные системы, сети и другие) с такими более новыми понятиями, как связность в нормальном расслоении, параллельность подрасслоения и др.

§ 2. ПОДМНОГООБРАЗИЕ V_m в P_n, НОРМАЛИЗОВАННОЕ ПО НОРДЕНУ

1. Рассмотрим n-мерное проективное пространство P_n, отнесенное к подвижному реперу $\{A_{\overline{I}}\}$ $(\overline{I}, \overline{K}, \overline{L}=0, 1, \ldots, n)$. Уравнения инфинитезимального перемещения такого репера имеют вид:

$$dA_{\overline{I}}=\theta_{\overline{I}}^{\overline{K}}A_{\overline{K}}.$$

Если положить $\omega_{\overline{I}}^{\overline{K}}=\theta_{\overline{I}}^{\overline{K}}-\delta_{\overline{I}}^{\overline{K}}\theta_0^0$, то эти уравнения можно записать в виде

$$dA_{\overline{I}}=\theta_0^0 A_{\overline{I}}+\omega_{\overline{I}}^{\overline{K}}A_{\overline{K}}, \text{ причем } \omega_0^0=0. \tag{2.1}$$

Формы $\omega_{\overline{I}}^{\overline{K}}$ удовлетворяют следующим структурным уравнениям

$$d\omega_{\overline{I}}^{\overline{K}}=\omega_{\overline{I}}^{\overline{L}}\wedge\omega_{\overline{L}}^{\overline{K}}-\delta_{\overline{I}}^{\overline{K}}\omega_0^{\overline{L}}\wedge\omega_{\overline{L}}^0, \quad d\theta_0^0=\omega_0^{\overline{L}}\wedge\omega_{\overline{L}}^0. \tag{2.2}$$

2. Пусть V_m — гладкое подмногообразие, погруженное в проективное пространство P_n. Если V_m отнесено к реперу первого порядка, то на нем удовлетворяются уравнения

$$\omega^\alpha=0, \quad \omega_i^\alpha=b_{ij}^\alpha\omega^j, \quad b_{ij}^\alpha=b_{ji}^\alpha, \tag{2.3}$$

где $i, j, k=1, 2, \ldots, m$, $\alpha, \beta, \gamma=m+1, \ldots, n$.

Подмногообразие V_m, погруженное в пространство P_n, называется нормализованным в смысле А. П. Нордена [24], если к каждой точке $x\in V_m$ инвариантно присоединены гладко зависящие от нее:

а) Нормаль первого рода N_x—$(n—m)$-мерная плоскость, проходящая через точку x и не имеющая с касательной плоскостью $T_x(V_m)$ других общих точек, кроме x;

б) Нормаль второго рода ν_x—$(m—1)$-мерная плоскость, лежащая в касательной плоскости $T_x(V_m)$ и не проходящая через точку x.

Поле нормалей первого рода N_x подмногообразия V_m образует его нормальное расслоение $N(V_m)$. Это поле зависит от m параметров и представляет собой конгруэнцию $(n-m)$-мерных плоскостей в P_n. Нормаль первого рода N_x можно рассматривать как проективное $(n-m)$-мерное пространство, в котором фиксирована точка $x \in V_m$. В каждом $(n-m)$-мерном слое нормального расслоения $N(V_m)$ подмногообразия V_m действует центропроективная группа. С другой стороны, в текущей точке $x \in V_m$ можно рассматривать связку прямых, проходящих через точку x и принадлежащих N_x. Эта связка представляет собой проективное пространство размерности $(n-m-1)$, которое мы будем называть пространством направлений в N_x и обозначать N_x^*. Каждое N_x^*, $x \in V_m$ является слоем некоторого расслоения над V_m, которое мы будем называть расслоением нормальных направлений $N^*(V_m)$. В его $(n-m-1)$-мерных слоях N_x^* действует проективная группа.

Множество касательных плоскостей T_x подмногообразия V_m, оснащенных нормалями второго рода ν_x, образует касательное расслоение $T(V_m)$. Его слои можно интерпретировать как m-мерные центроаффинные пространства T_x с «бесконечно удаленными» ν_x. При этом m-параметрическое множество нормалей ν_x представляет собой псевдоконгруэнцию в P_n. В каждом m-мерном слое касательного расслоения $T(V_m)$, нормализованного по Нордену подмногообразия V_m, действует центроаффинная группа. Если провести частичную канонизацию репера, при которой вершины A_i помещаются на нормаль второго рода ν_x, а вершины A_α на нормаль первого рода N_x, то уравнения полей этих нормалей принимают вид [28], [11]:

$$\omega_\alpha^i = C_{\alpha j}^i \omega^j, \quad \omega_i^0 = a_{ij} \omega^j. \tag{2.4}$$

Такой репер называется репером, адаптированным к нормализованному многообразию V_m. Таким образом, уравнения (2.3) и (2.4) будут дифференциальными уравнениями нормализованного по Нордену подмногообразия V_m в адаптированном репере.

Каждая из систем функций $\{a_{ij}, b_{ij}^\alpha\}$, $\{C_{\alpha j}^i\}$ образует квазитензор в смысле Г. Ф. Лаптева [17]. Объект

$$\tilde{C}_{\alpha j}^i = C_{\alpha j}^i - \delta_j^i C_\alpha. \tag{2.5}$$

является тензором [17]; здесь $C_\alpha = \frac{1}{m} C_{\alpha i}^i$. Если учесть (2.3) и (2.4), то структурные уравнения (2.2) для нормализованного по Нордену подмногообразия V_m принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\text{I. } d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, && d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \Omega_j^i, \\ &\text{II. } d\omega_\alpha^0 = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^0 + \Omega_\alpha^0, && d\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta + \Omega_\alpha^\beta \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

здесь

$$\left.\begin{aligned}\Omega^i_j &= \omega^\alpha_j \wedge \omega^i_\alpha + \omega^0_j \wedge \omega^i - \delta^i_j\,(\omega^k \wedge \omega^0_k) = \frac{1}{2} R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l,\\ \Omega^0_\alpha &= \omega^i_\alpha \wedge \omega^0_i = \frac{1}{2} T_{\alpha kl}\omega^k \wedge \omega^l,\\ \Omega^\beta_\alpha &= \omega^i_\alpha \wedge \omega^\beta_i - \delta^\beta_\alpha\,\omega^k \wedge \omega^0_k = \frac{1}{2} R^\beta_{\alpha kl}\omega^k \wedge \omega^l,\end{aligned}\right\} \qquad (2.7)$$

и

$$\left.\begin{aligned}R^i_{jkl} &= 2\,(b^\alpha_{j[k}\tilde{C}^i_{|\alpha|l]} + C_\alpha b^\alpha_{j[k}\delta^i_{l]} + a_{j[k}\delta^i_{l]} - \delta^i_j\,a_{[kl]}),\\ T_{\alpha kl} &= 2\,(\bar{C}^i_{\alpha[k}a_{|i|l]} + C_\alpha \delta^i_{[k}a_{|i|l]}),\\ R^\beta_{\alpha kl} &= 2\,(\bar{C}^i_{\alpha[k}b^\beta_{l]i} - \delta^\beta_\alpha\,a_{[kl]}).\end{aligned}\right\} \qquad (2.8)$$

Система уравнений (2.6) совпадает с системой уравнений А. П. Нордена [24], если перейти к голономному полю реперов, т. е. положить

$$\omega^i = du^i,\quad \omega^i_j = \Gamma^i_{jk}du^k,\quad \omega^\beta_\alpha = \Gamma^\beta_{\alpha n}du^k.$$

Формулы (2.7) показывают, что квадратичные формы Ω^i_j, Ω^0_α, Ω^β_α, входящие в уравнения (2.6), являются полубазовыми. Поэтому, в силу теоремы Картана—Лаптева [29], формы ω^i, ω^i_j определяют аффинную связность без кручения в касательном расслоении $T(V_m)$ подмногообразия V_m, для которой формы Ω^i_j являются формами кривизны. Впервые эту связность ввел и подробно исследовал А. П. Норден [24]. Формы ω^0_α, ω^β_α определяют центропроективную связность в нормальном расслоении $N(V_m)$ этого подмногообразия, для которой формами кручения-кривизны являются формы $\{\Omega^0_\alpha, \Omega^\beta_\alpha\}$. Для этих квадратичных внешних форм Ω^0_α, Ω^β_α выполняются уравнения

$$\begin{aligned}d\Omega^0_\alpha &= -\Omega^\beta_\alpha \wedge \omega^0_\beta + \omega^\beta_\alpha \wedge \Omega^0_\beta,\\ d\Omega^\beta_\alpha &= -\Omega^\gamma_\alpha \wedge \omega^\beta_\gamma + \omega^\gamma_\alpha \wedge \Omega^\beta_\gamma,\end{aligned} \qquad (2.9)$$

которые являются аналитическими условиями инвариантности системы форм кручения-кривизны.

Формы ω^β_α, в силу (2.6.II), определяют также связность в расслоении нормальных направлений $N^*(V_m)$. Формы Ω^β_α, в силу (2.6.II), можно интерпретировать как формы кривизны этой связности. Вторая серия уравнений (2.9) показывает, что эти формы образуют инвариантную систему.

3. Требование неподвижности геометрической точки $M \in N_x$:

$$M = A_0 + \xi^\alpha A_\alpha$$

относительно преобразований адаптированного репера приводит к условиям:

$$d\xi^\alpha + \xi^\beta\omega^\alpha_\beta - \xi^\alpha\xi^\beta\omega^0_\beta - \theta\xi^\alpha = 0 \ (\mathrm{mod}\,\omega^i).$$

Следовательно, если дано нормальное поле точек, т. е. в каждом N_x задана точка M, дифференцируемо зависящая от $x \in V_m$, то оно описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$d\xi^\alpha + \xi^\beta \omega_\beta^\alpha - \xi^\alpha \xi^\beta \omega_\alpha^0 - \theta \xi^\alpha = \xi_i^\alpha \omega^i.$$

Определение 1. Нормальное поле точек назовем параллельным относительно нормальной центропроективной связности, если его точка $M \in N_x$ при любом смещении точки x в V_m инфинитезимально не выходит из плоскости $[M, \nu_x]$.

В силу (2.1), для точки $M \in N_x$ имеем:

$$dM = (\theta_0^0 + \xi^\alpha \omega_\alpha^0) M + (\omega^i + \xi^\alpha \omega_\alpha^i) A_i + (d\xi^\alpha + \xi^\beta \omega_\beta^\alpha - \xi^\alpha \xi^\beta \omega_\beta^0) A_\alpha, \quad (2.10)$$

поэтому условие параллельности поля точек M запишется в виде

$$\tilde{d}\xi^\alpha + \xi^\beta \omega_\beta^\alpha - \xi^\alpha \xi^\beta \omega_\beta^0 = 0.$$

Определение 2. Говорят, что нормальная центропроективная связность в $N(V_m)$ является плоской, если формы кручения-кривизны $\{\Omega_\alpha^0, \Omega_\alpha^\beta\}$ этой связности тождественно обращаются в нуль, т. е. $T_{\alpha kl} = 0$, $R_{\alpha kl}^\beta = 0$ [47].

Определение 3. Пара, составленная из конгруэнции $(n-m)$-мерных плоскостей и псевдоконгруэнции $(m-1)$-мерных плоскостей, называется односторонне расслояемой от конгруэнции к псевдоконгруэнции, если между их элементами установлено взаимно однозначное соответствие и для конгруэнции существует $(n-m)$-параметрическое семейство m-мерных поверхностей, касательные плоскости которых в точках пересечения с плоскостью конгруэнции проходят через соответствующую плоскость псевдоконгруэнции [37]. Связь между расслояемостью пары и свойством некоторой связности быть плоской указана в [20]. В рассматриваемом здесь случае это приводит к следующей теореме:

Теорема 1. Для того чтобы нормальная центропроективная связность нормализованного по Нордену подмногообразия V_m в P_n была плоской, необходимо и достаточно, чтобы конгруэнция нормалей первого рода и псевдоконгруэнция нормалей второго рода составляли пару, односторонне расслояемую в сторону от N_x к ν_x.

Доказательство. Пусть произвольная точка $M = A_0 + \xi^\alpha A_\alpha$, принадлежащая N_x, описывает расслаивающую поверхность. Тогда, в силу определения 3, из (2.10) получим уравнения

$$d\xi^\alpha + \xi^\beta \omega_\beta^\alpha - \xi^\alpha \xi^\beta \omega_\beta^0 = 0, \quad (2.11)$$

где теперь ξ^α — независимые переменные и, следовательно, $d\xi^\alpha$ — новые базисные формы. Эта система уравнений определяет расслаивающие поверхности пары (N_x, ν_x). Так как система уравнений (2.11) должна быть вполне интегрируемой, то

$$\xi^\beta (d\omega_\beta^\alpha - \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha) - \xi^\alpha \xi^\beta (d\omega_\beta^0 - \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^0) = 0.$$

Поскольку эти уравнения должны удовлетворяться при произвольных ξ^α тождественно, то получим

$$d\omega_\beta^\alpha - \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha = 0, \quad d\omega_\beta^0 - \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^0 = 0. \qquad (2.12)$$

Это и будет необходимым и достаточным условием расслояемости пары (N_x, ν_x). Условия (2.12), в силу (2.6.II), показывают, что оно равносильно тому, что формы кручения-кривизны $\{\Omega_\alpha^0, \Omega_\alpha^\beta\}$ равны нулю, т. е. что центропроективная нормальная связность будет плоской.

Если к произвольной точке $M \in N_x$ присоединить m-мерную плоскость, проходящую через эту точку M и соответствующую нормали второго рода ν_x, то получается так называемое горизонтальное распределение Γ_m рассматриваемой нормальной центропроективной связности. Односторонняя расслояемость пары, состоящей из конгруэнции нормалей первого рода N_x и псевдоконгруэнции нормалей второго рода ν_x в сторону от N_x к ν_x, равносильна инволютивности горизонтального распределения Γ_m расслоения $N(V_m)$. Поэтому теорема 1 может быть сформулирована еще в следующем виде, в котором она является непосредственным следствием результатов общей теории связностей [21].

Теорема 2. Для того чтобы нормальная центропроективная связность в нормальном расслоении $N(V_m)$ была плоской, необходимо и достаточно, чтобы ее горизонтальное распределение Γ_m было инволютивным.

4. Определение 4. Будем говорить, что нормальная центропроективная связность полуплоская, если формы Ω_α^β тождественно обращаются в нуль. В этом случае связность в расслоении нормальных направлений $N^*(V_m)$ является плоской.

Подмногообразие V_m называется нормализованным гармонично [24], если за счет нормировки координат его текущей точки можно добиться обращения в нуль формы θ_0^0. Условия гармоничности нормализации, в силу (2.2) и (2.4), имеют вид $a_{[ij]} = 0$.

Пусть в каждой нормали 1-го рода N_x задано одномерное направление ξ, определяемое точками A_0 и $M = \xi^\alpha A_\alpha$. Для инвариантности этого направления необходимо и достаточно, чтобы

$$dM = \theta M + \nu A_0 \quad (\mathrm{mod}\, \omega^i),$$

где θ и ν — некоторые линейные формы, удовлетворяющие условиям

$$d\theta = 0 \, (\mathrm{mod}\, \omega^i), \quad d\nu + (\theta - \theta_0^0) \wedge \nu = 0 \quad (\mathrm{mod}\, \omega^i).$$

Это приводит к условию

$$d\xi^\alpha+\xi^\alpha\theta_0^0+\xi^\beta\omega_\beta^\alpha-\theta\xi^\alpha=0 \pmod{\omega^i}$$

$$\xi^\alpha\omega_\alpha^i=0 \pmod{\omega^i}.$$

Пусть задано поле нормальных одномерных направлений с помощью функций ξ^α, удовлетворяющих системе уравнений

$$d\xi^\alpha+\xi^\beta\omega_\beta^\alpha+\xi^\alpha(\theta_0^0-\theta)=\xi_j^\alpha\omega^j$$

$$\xi^\alpha\omega_\alpha^i=\xi_j^i\omega^j.$$

Составим систему величин

$$C_j^i=\xi^\alpha\tilde{C}_{\alpha j}^i, \qquad (2.13)$$

где $\tilde{C}_{\alpha j}^i$ определены в (2.5). Для них получим

$$dC_j^i-C_k^i\omega_j^k+C_j^k\omega_k^i-(\theta-\theta_0^0)C_j^i=0 \pmod{\omega^i}. \qquad (2.14)$$

Следовательно, (2.13) определяют относительный аффинор, который мы будем называть основным относительным аффинором данного поля нормальных одномерных направлений ξ. Если менять направление ξ, то получается пучок относительных аффиноров C_j^i.

Определение 5. Пучок основных относительных аффиноров назовем простым, если существует хотя бы одно поле нормальных одномерных направлений, основной относительный аффинор которого имеет простую структуру [10], т. е. ее матрица приводима к диагональному виду.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. Если гармонично нормализованное подмногообразие V_m имеет полуплоскую нормальную связность и обладает основным относительным аффинором C_j^i простой структуры, который имеет s различных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ кратности, соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_s$ $(p_1+p_2+\ldots+p_s=m)$, то подмногообразие V_m несет в области U, где эти кратности постоянны, s-сопряженную систему (в смысле [3]) распределений $L_1, L_2, \ldots, L_s$ размерностей $p_1, p_2, \ldots, p_s$.

Доказательство. Пусть нормальная центропроективная связность полуплоская. Тогда из (2.8) получим

$$\tilde{C}_{\alpha[k}^i b_{l]i}^\beta=0.$$

Если свернуть это соотношение с ξ^α и учесть (2.13), то получим

$$C_{[k}^i b_{l]i}^\beta=0. \qquad (2.15)$$

Так как пучок основных относительных аффиноров является простым, то в нем существует относительный аффинор, матрицу $C=\|C_j^i\|$ которого можно, в силу предположения, преобразовать к виду

$$\begin{Vmatrix} \overbrace{\lambda_1 \cdots \lambda_1}^{p_1} & & & 0 \\ & \overbrace{\lambda_2 \cdots \lambda_2}^{p_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \overbrace{\lambda_s \cdots \lambda_s}^{p_s} \end{Vmatrix}$$

При этом в каждом касательном слое $T_x(V_m)$ подмногообразия V_m лежат s собственных подпространств относительного аффинора C_j^i, которые имеют размерности p_u ($u, v, w=1, 2, \ldots, s$). В некоторой области U подмногообразия V_m они образуют s распределений L_u. Теперь точки репера A_{i_u}, где $i_u, j_u = p_1 + \ldots + p_{u-1} + 1, \ldots, p_1 + p_2 + \ldots + p_u$, принадлежат p_u-мерному подпространству L_u. Тогда мы получим

$$C_{j_u}^{i_u} = \lambda_u \delta_{j_u}^{i_u}, \quad C_{j_u}^{i_v} = 0 \text{ при } u \neq v. \tag{2.16}$$

В силу последнего, из соотношения (2.15) получаем $(\lambda_u - \lambda_v) b^{\alpha}_{k_u l_v} = 0$, но так как $\lambda_u \neq \lambda_v$ при $u \neq v$, то

$$b^{\alpha}_{k_u l_v} = 0, \quad u \neq v.$$

Следовательно, матрицы $B^{\alpha} = \| b^{\alpha}_{ij} \|$ приводятся к блочно-диагональному виду

$$B^{\alpha} = \begin{Vmatrix} B_1^{\alpha} & & 0 \\ & B_2^{\alpha} & \\ & & \ddots \\ 0 & & B_s^{\alpha} \end{Vmatrix},$$

где $B_u^{\alpha} = \| b^{\alpha}_{i_u j_u} \|$ — квадратичная матрица порядка p_u. А это означает, что подмногообразие V_m несет s-сопряженную систему.

В [1] определяется фокусный конус для псевдоконгруэнции нормалей второго рода ν_x. Гиперплоскость Ξ называется фокусной, если она содержит ν_x и вместе с ней бесконечно близкую плоскость $'\nu_x$, т. е. $\Xi \supset \nu_x + '\nu_x$. Справедлива следующая теорема [47].

Теорема 3. Если пучок основных относительных аффиноров гармонично нормализованного подмногообразия V_m является простым и нормальная центропроективная связность плоская, то фокусный конус псевдоконгруэнции нормалей второго рода ν_x распадается на m связок гиперплоскостей.

§ 3. НОРМАЛИЗОВАННОЕ ПОДМНОГООБРАЗИЕ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ПОЛЕМ p-МЕРНЫХ НОРМАЛЬНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

1. Пусть в произвольной точке x нормализованного подмногообразия V_m выбрано p-мерное направление $N_x{}^p$ (т. е. p-мерная плоскость, проходящая через x), принадлежащее нормали первого рода N_x так, что образуется гладкое поле нормальных p-мерных направлений N^p на V_m, $p \leqslant n-m$. Это поле определяет нормальное подрасслоение $N^p(V_m)$, p-мерными слоями которого являются p-мерные проективные плоскости $N_x{}^p$, $x \in V_m$.

Структурные формы объекта, определяющего поле N^p, получаются следующим образом. Плоскость $N_x{}^p$ поля, соответствующую произвольно фиксированной точке $x \in V_m$, можно определить этой точкой x и p переменными точками M_π, заданными следующим разложением

$$M_\pi = \xi_\pi^\alpha A_\alpha, \tag{3.1}$$

где $\pi, \rho, \sigma = m+1, \ldots, m+p$. При этом нужно потребовать, чтобы при допустимых преобразованиях репера в $N_x(V_m)$ плоскость N_x^p оставалась неподвижной. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$dM_\pi = \tilde{\theta}_\pi^\rho M_\rho + \tilde{\theta}_\pi^0 A_0 \pmod{\omega^i}, \tag{3.2}$$

где $\tilde{\theta}_\pi^\rho$, $\tilde{\theta}_\pi^0$ — линейные формы, структура которых устанавливается при непосредственном внешнем диффенцировании уравнений (3.2). При подстановке (3.1) в (3.2) получаются следующие условия:

$$d\xi_\pi^\alpha + \xi_\pi^\alpha \theta_0^0 + \xi_\pi^\beta \omega_\beta^\alpha - \tilde{\theta}_\pi^\rho \xi_\rho^\alpha = 0 \pmod{\omega^i},$$
$$\xi_\pi^\alpha \omega_\alpha^0 - \tilde{\theta}_\pi^0 = 0 \pmod{\omega^i}.$$

Следовательно, поле p-мерных плоскостей $N^p(V_m)$ в $N(V_m)$ описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$d\xi_\pi^\alpha + \xi_\pi^\alpha \theta_0^0 + \xi_\pi^\beta \omega_\beta^\alpha - \tilde{\theta}_\pi^\rho \xi_\rho^\alpha = \xi_{\pi j}^\alpha \omega^j. \tag{3.3}$$

Заметим, что уравнения (3.3) получаются непосредственно из уравнения, выведенного в более общем виде Р. Ф. Домбровским в [11].

2. Определение 6. Поле N^p называется параллельным, если при любом инфинитезимальном перемещении произвольной точки x в V_m, смещение p-мерного направления $N_x{}^p$ происходит в $(m+p)$-мерной плоскости, натянутой на касательную плоскость $T_x(V_m)$ и на это направление $N_x{}^p$.

Аналитическое условие, при котором поле N^p будет параллельным, получается следующим образом. Любое направление, принадлежащее p-мерному элементу поля N^p, можно определить точкой A_0 и точкой

$$M = A_0 + \xi^\pi M_\pi. \tag{3.4}$$

Если продифференцировать (3.4) и учесть (2.1), получим

$$dM = (\theta_0^0 + \xi^\pi \xi_\pi^\alpha \omega_\alpha^0) A_0 + d\xi^\pi M_\pi + \xi^\pi \xi_\pi^\alpha \omega_\alpha^i A_i +$$
$$+ \xi^\pi (d\xi_\pi^\alpha + \xi_\pi^\alpha \theta_0^0 + \xi_\pi^\beta \omega_\beta^\alpha) A_\alpha. \tag{3.5}$$

По условию поле N^p является параллельным тогда и только тогда, когда

$$(d\xi_\pi^\alpha + \xi_\pi^\alpha \theta_0^0 + \xi_\pi^\beta \omega_\beta^\alpha) A_\alpha = \hat{\theta}_\pi^\rho M_\rho + \hat{\theta}_\pi^0 A_0,$$

отсюда получим

$$d\xi_\pi^\alpha + \xi_\pi^\alpha \theta_0^0 + \xi_\pi^\beta \omega_\beta^\alpha = \hat{\theta}_\pi^\rho \xi_\rho^\alpha. \tag{3.6}$$

Если касательная плоскость подмногообразия V_m зависит от p параметров $(0<p<m)$, то подмногообразие тангенциально вырождается и принадлежит специальному проективному типу. Число p называется рангом подмногообразия V_m. Такое подмногообразие (оно обозначается через $V_m{}^p$) представляет собой p-параметрическое семейство плоских образующих E_q, где $p+q=m$, при перемещении вдоль которых касательная плоскость подмногообразия остается постоянной [5].

Имеет место теорема [47].

Т е о р е м а 4. Для того чтобы нормализованное подмногообразие V_m проективного пространства P_n допускало параллельное нормальное поле N^p, необходимо и достаточно, чтобы все плоскости $N_x{}^p$, $x \in V_m$, образовывали тангенциально вырожденное подмногообразие $V_{m+p}{}^m$ пространства P_n размерности $m+p$ ранга m.

З а м е ч а н и е 1. Эта теорема представляет интерес, с точки зрения теории тангенциально вырожденных поверхностей [32], [1], [2], [4], так как она указывает возможность построения такой поверхности $V_{m+p}{}^m$, исходя из нормализованного подмногообразия V_m специального типа.

3. В расслоении $N^p(V_m)$, определяемом параллельным полем N^p нормальных направлений, индуцируется центропроективная связность. Каждый слой этого расслоения представляет собой p-мерную проективную плоскость, на которой точки $M_0 = A_0$ и M_π составляют проективный репер. При этом

$$dM_0 = \varphi_0^0 M_0 \,(\mathrm{mod}\, \omega^i), \quad dM_\pi = \varphi_\pi^0 M_0 + \varphi_\pi^\rho M_\rho \,(\mathrm{mod}\, \omega^i). \tag{3.7}$$

Но так как $M_\pi = \xi_\pi^\alpha A_\alpha$, то, в силу (3.6), получим

$$dM_\pi = \xi_\pi^\alpha \omega_\alpha^0 A_0 + \xi_\pi^\alpha \omega_\alpha^i A_i + \hat{\theta}_\pi^\rho M_\rho.$$

Сравнивая эти равенства с (3.7), имеем

$$\varphi_0^0 = \theta_0^0, \quad \varphi_0^\pi = 0, \quad \varphi_\pi^0 = \xi_\pi^\alpha \omega_\alpha^0, \quad \varphi_\pi^\rho = \hat{\theta}_\pi^\rho. \tag{3.8}$$

В силу (3.8), для форм кручения-кривизны получаем

$$\left.\begin{array}{c}\Phi_\pi^0=\xi_\pi^\beta\Omega_\beta^0,\quad \Phi_\pi^\pi-\Phi_0^0=d\,(\hat\theta_\pi^\pi-\theta_0^0),\\ \Phi_\pi^\rho=d\hat\theta_\pi^\rho-\hat\theta_\pi^\sigma\wedge\hat\theta_\sigma^\rho\ (\pi\neq\rho).\end{array}\right\}\tag{3.9}$$

Горизонтальное распределение Γ_m, которое индуцирует проективную связность в $N^p(V_m)$, получается присоединением в точке $M=(A_0+\xi^\pi M_\pi)\in N_x^p$, m-мерной плоскости, проходящей через эту точку M и соответствующую нормаль второго рода ν_x.

Говорят [47], что нормальная центропроективная связность $M\ N^p(V_m)$ является плоской, если формы кручения-кривизны этой связности тождественно обращаются в нуль, т. е.

$$\xi_\pi^\beta\Omega_\beta^0=0,\quad d\,(\hat\theta_\pi^\pi-\theta_0^0)=0,\quad d\hat\theta_\pi^\rho-\hat\theta_\pi^\sigma\wedge\hat\theta_\sigma^\rho=0,\quad \rho\neq\pi.$$

Эти условия можно записать в следующем виде:

$$\xi_\pi^\beta\Omega_\beta^0=0,\quad d\hat\theta_\pi^\rho-\hat\theta_\pi^\sigma\wedge\hat\theta_\sigma^\rho-\delta_\pi^\rho d\theta_0^0=0.\tag{3.10}$$

Справедлива следующая теорема [47].

Теорема 5. Для того чтобы нормальная центропроективная связность в расслоении $N^p(V_m)$ была плоской, необходимо и достаточно, чтобы ее горизонтальное распределение Γ_m, определяемое параллельным полем N^p, было инволютивным.

Эта теорема обобщает теорему 2 и сводится к ней при $p=n-m$.

Подмногообразие V_m, нормализованное по Нордену, в проективном пространстве P_n называется двойственно нормализованным [38], если существует такое m-мерное многообразие касательных к V_m гиперплоскостей, что в любой точке $x\in V_m$ характеристика K_x содержится в нормали первого рода N_x подмногообразия V_m.

Справедлива следующая теорема [47].

Теорема 6. Для того чтобы нормализованное по Нордену подмногообразие V_m в проективном пространстве P_n было двойственно нормализованным, необходимо и достаточно, чтобы оно допускало параллельное поле $(n-m-1)$-мерных нормальных направлений.

§ 4. ПОДМНОГООБРАЗИЕ, НОРМАЛИЗОВАННОЕ ПО НОРДЕНУ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ПОЛЕМ ОДНОМЕРНЫХ НОРМАЛЬНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ В P_n

1. В предыдущем параграфе рассматривалось нормализованное подмногообразие, которое допускает параллельное поле p-мерных нормальных направлений. Рассмотрим случай, когда $p=1$, т. е. когда подмногообразие V_m допускает параллельное поле одномерных нормальных направлений.

Пусть в произвольной точке $x\in V_m$ выбрано одномерное направление N_x^1 (т. е. прямая, проходящая через x), принадлежащее нормали первого рода N_x так, что образуется гладкое поле одномерных нормальных направлений N^1 на подмногообразии

V_m. Это поле определяет нормальное подрасслоение $N^1(V_m)$, одномерными слоями которого являются проективные прямые N_x^1, $x \in V_m$. Прямую N_x^1 этого поля, соответствующую произвольной фиксированной точке $x \in V_m$, можно определить точкой $A_0 = x$, и переменной точкой M_1, заданной следующим разложением $M_1 = \xi_1^\alpha A_\alpha$.

Дифференциальные уравнения поля одномерных нормальных направлений N^1 в $N(V_m)$ можно получить из (3.3) если в нем положить $\eta, \rho = 1$. Оно имеет следующий вид

$$d\xi_1^\alpha + \xi_1^\beta \omega_\beta^\alpha + (\theta_0^0 - \hat{\theta}_1^1)\xi_1^\alpha = \xi_{1j}^\alpha \omega^j. \tag{4.1}$$

Условия параллельности поля можно сформулировать так: Поле N^1 является параллельным, если при любом инфинитезимальном смещении точки x в V_m смещение направления N_x^1 происходит в $(m+1)$-мерной плоскости, натянутой на x, ν_x и N_x^1. Тогда из (3.6) следует аналитическое условие параллельного поля одномерных нормальных направлений:

$$d\xi_1^\alpha + \xi_1^\beta \omega_\beta^\alpha = \hat{\theta}\xi_1^\alpha, \quad \text{где } \hat{\theta} = \hat{\theta}_1^1 - \theta_0^0. \tag{4.2}$$

Из теоремы 4, в случае когда $p=1$, следует:

Теорема 7. Для того чтобы нормализованное подмногообразие V_m проективного пространства P_n допускало параллельное поле N^1, необходимо и достаточно, чтобы все прямые N_x^1, $x \in V_m$, образовывали тангенциально вырожденное подмногообразие $V_{m+1}{}^m$ пространства P_n размерности $m+1$ ранга m.

В расслоении $N^1(V_m)$, определенном параллельным полем нормальных направлений N^1, индуцируется центропроективная связность. Каждый слой этого расслоения представляет собой проективную прямую, на которой $M_0 = A_0$, M_1 составляют проективный репер. При этом

$$dM_0 = \varphi_0^0 M_0 \,(\mathrm{mod}\, \omega^i), \quad dM_1 = \varphi_1^0 M_0 + \varphi_1^1 M_1 \,(\mathrm{mod}\, \omega^i).$$

Из (3.9) для форм кручения-кривизны этой связности получим

$$\Phi_1^0 = \xi_1^\alpha \Omega_\alpha^0, \quad \Phi_1^1 - \Phi_0^0 = d\hat{\theta}. \tag{4.3}$$

Говорят [48], что центропроективная связность в $N^1(V_m)$ является плоской, если формы кручения-кривизны этой связности тождественно обращаются в нуль, т. е.

$$\xi_1^\alpha \Omega_\alpha^0 = 0, \quad d\hat{\theta} = 0.$$

Следствие 1. В случае плоской связности в $N^1(V_m)$ форма $\hat{\theta}$ локально является полным дифференциалом, и ξ_1^α можно пронормировать так, чтобы $\hat{\theta} = 0$. Тогда (4.2) примут вид

$$d\xi_1^\alpha + \xi_1^\beta \omega_\beta^\alpha = 0 \tag{4.4}$$

и основной относительный аффинор C_j^i становится, в силу (2.14), аффинором.

2. Произвольная точка образующей N_x^1 тангенциально вырожденного подмногообразия $V_{m+1}{}^m$ определяется формулой

$M=A_0+\xi^1M_1$. Точка $M\in N_x{}^1$ будет фокусом образующей $N_x{}^1$, если $dM\in N_x{}^1$ для некоторого смещения $\omega^i=\mu^i\theta$ [1], [18]. Для фокусов образующей $N_x{}^1$ получим уравнения

$$\omega^i+\xi^1\xi_1^\alpha\omega_\alpha^i=0$$

или

$$(\xi_1^\alpha C_{\alpha j}^i-\lambda\delta_j^i)\,\mu^j=0, \tag{4.5}$$

где $\lambda=-1/\xi^1$. Так как не все μ^j равны нулю, то из (4.5) получим

$$\det\|\xi_1^\alpha C_{\alpha j}^i-\lambda\delta_j^i\|=0. \tag{4.6}$$

Решая это уравнение относительно λ, найдем фокусы образующей N_x^1. С другой стороны, это уравнение представляет собой характеристическое уравнение матрицы $\|\xi_1^\alpha C_{\alpha j}^i\|$. Следовательно, образующая N_x^1 несет столько различных фокусов, сколько различных собственных значений имеет матрица $\|\xi_1^\alpha C_{\alpha j}^i\|$. Пусть λ_u — собственное значение матрицы $\|\xi_1^\alpha C_{\alpha j}^i\|$. Подставляя его значение в (4.5), получим систему уравнений для определения соответствующего фокального направления. Если $r_u=$ $=\mathrm{Rang}\|\xi_1^\alpha C_{\alpha j}^i-\lambda_u\delta_j^i\|$, то размерность фокального направления будет $m-r_u$. Фокальные направления образуют в области $U\subset V_m$, где r_u — постоянное, распределение L_u размерности $m-r_u$ на U. Предположим, что аффинор $C_j^i=\xi_1^\alpha\bar{C}_{\alpha j}^i$ имеет простую структуру [10], т. е. может быть приведен в некотором репере к диагональному виду. Из (2.5) и (2.13) непосредственно видно, что тогда матрица $\|\xi_1^\alpha C_{\alpha j}^i\|$ тоже приводится к диагональному виду. Имеет место следующая лемма [48].

Лемма 2. Если гармонично нормализованное подмногообразие V_m допускает параллельное поле одномерных направлений N^1 с плоской нормальной связностью в расслоении $N^1(V_m)$, и основной аффинор $C_j{}^i$ для этого поля является простым и имеет s различных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ кратностей соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_s$ $(p_1+p_2+\ldots+p_s=m)$, то многообразие V_m несет в области U, где эти кратности постоянны, s-сопряженную систему распределений $L_1, L_2, \ldots, L_s$ размерностей $p_1, p_2, \ldots, p_s$.

Подмногообразие с сопряженными системами подробно исследованы в [31], [3], [5]. Аналогичный результат в случае, когда подмногообразие V_m вложено в пространство постоянной кривизны $V_n{}^c$, получен в [23], где доказано также, что распределение $L_1, \ldots, L_s$ инволютивно. Последний результат также допускает обобщение на рассматриваемый здесь случай. В приведенном ниже доказательстве используются, в отличие от [23], геометрические соображения, связанные с понятием фокуса.

Теорема 8. При выполнении условий леммы 2 распределения L_u $(u=1, 2, \ldots, s)$ на подмногообразии V_m, составляющие сопряженную систему, являются инволютивными.

Доказательство. В случае, когда $p_u=1$, распределение L_u одномерно и, следовательно, инволютивно. Рассмотрим случай, когда $p_u>1$. Если свернуть (2.4) с ξ_1^α и учесть лемму 2, то получится

$$\xi_1^\alpha \omega_\alpha^{i_u}=\lambda_u \omega^{i_u}.$$

Теперь внешнее дифференцирование дает

$$(d\lambda_u-\xi_1^\alpha\omega_\alpha^0)\wedge\omega^{i_u}+\sum_{v\neq u}(\lambda_v-\lambda_u)\,\omega_{j_v}^{i_u}\wedge\omega^{j_v}=0$$

и отсюда по лемме Картана

$$\left.\begin{aligned}&\text{I. } d\lambda_u-\xi_1^\alpha\omega_\alpha^0=C^{i_u}\omega^{i_u}+\sum_{v\neq u}A_{j_v}^{i_u}\omega^{j_v},\\ &\text{II. } (\lambda_v-\lambda_u)\,\omega_{j_v}^{i_u}=A_{j_v}^{i_u}\omega^{i_u}+\sum_{v\neq u}A_{j_v}^{i_u}\omega^{j_v},\end{aligned}\right\}\qquad(4.7)$$

где $B_{j_v k_w}^{i_u}=B_{k_w j_v}^{i_u}$. Но так как $p_u>1$, то (4.7.I) можно выписать также при значении $h_u\neq i_u$ с этой же левой частью $d\lambda_u-\xi_1^\alpha\omega_\alpha^0$. Следовательно,

$$C^{i_u}\omega^{i_u}-C^{k_u}\omega^{k_u}+\sum_{v\neq u}(A_{j_v}^{i_u}-A_{j_v}^{k_u})\,\omega^{j_v}=0,\quad k_u\neq i_u.$$

Отсюда следует, что

$$C^{i_u}=C^{k_u}=0,\qquad A_{j_v}^{i_u}=A_{j_v}^{k_u}=A_{j_v}^{u}$$

и (4.7.I) можно записать в следующем виде

$$d\lambda_u-\xi_1^\alpha\omega_\alpha^0=\sum_{v\neq u}A_{j_v}^{u}\omega^{j_v},\quad p_u>1. \qquad (4.8)$$

Докажем, что фокус M_u, соответствующий распределению L_u, будет оставаться неподвижным при перемещении точки $x\in V_m$ вдоль любой интегральной линии распределения L_u. Для таких кривых выполняется система уравнений

$$\omega^{i_v}=0\quad(v=1, \ldots, u-1, u+1, \ldots, s).$$

Фокус, соответствующий собственному значению λ_u, определяется точкой

$$M_u=A_0-\frac{1}{\lambda_u}\xi_1^\alpha A_\alpha.$$

Дифференциал этой точки имеет вид

$$dM_u=\left(\omega^i-\frac{1}{\lambda_u}\xi_1^\alpha\omega_\alpha^i\right)A_i+\frac{(d\lambda_u-\xi_1^\alpha\omega_\alpha^0)\,\xi_1^\alpha A_\alpha}{\lambda_u^2}-\frac{1}{\lambda_u}\xi_1^\alpha\omega_\alpha^0 M_u.$$

В силу (4.5) и (4.8), отсюда следует

$$dM_u = -\frac{1}{\lambda_u}\xi_1^{\alpha}\omega_{\alpha}^0 M_u \pmod{\omega^{i_v}}.$$

Это означает, что точка M_u неподвижна при смещении точки в направлении распределения L_u. При этом прямые (A_0, M) опишут коническую поверхность V_{p_u+1} размерности p_u+1, которая пересечет подмногообразие V_m по p_u-мерной интегральной поверхности распределения L_u.

Замечание 2. На гармонично нормализованном подмногообразии V_m, удовлетворяющем предположениям леммы 2, возникает интегрируемая структура типа r—π [49].

В работах С. П. Финикова [36] и А. П. Нордена [24] исследовалась сеть линий кривизны на нормализованной гиперповерхности проективного пространства P_n. Некоторые положения можно обобщить на случай нормализованного подмногообразия V_m, допускающего параллельное поле N^1.

Определение 7. Линиями кривизны нормализованного $V_m \subset P_n$ с параллельным полем N^1 называются такие линии, вдоль любой из которых прямые $N_x{}^1$ образуют развертывающуюся поверхность [48]. Если основной аффинор $C_j{}^i$ имеет m различных собственных значений, т. е. $p_u=1$ для любого u, то образующая $N_x{}^1$ имеет m различных фокусов. Через каждую прямую $N_x{}^1$ проходит m различных развертывающихся поверхностей. Эти развертывающиеся поверхности пересекают подмногообразие V_m по линиям кривизны. Таким образом, параллельное поле N^1 на нормализованном подмногообразии V_m, удовлетворяющем предположениям леммы 2, при всех $p_u=1$, индуцирует на нем сеть линий кривизны.

Нормаль первого рода гиперповерхности V_{n-1} называется [24] сопряженной к V_{n-1}, если определяемая ею сеть линий кривизны на V_{n-1} является сопряженной сетью. Обобщим это понятие для нормализованного V_m.

Определение 8. Параллельное поле N^1 нормализованного подмногообразия V_m называется сопряженным к V_m, если оно определяет сеть линий кривизны на V_m, которая является сопряженной сетью [48].

Подмногообразия с сопряженной сетью подвергались уже многостороннему исследованию [8].

Учитывая лемму 2 и теорему 7, можно сформулировать следующую теорему:

Теорема 9. Если гармонично нормализованное V_m допускает параллельное поле N^1 с плоской центропроективной связностью в расслоении $N^1(V_m)$, и основной аффинор $C_j{}^i$ имеет m различных собственных значений, то параллельное поле N^1 сопряжено к подмногообразию V_m.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. *Акивис М. А.*, Фокальные образы поверхности ранга r. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1957, № 1, 9—19 (РЖМат, 1959, 11523)
2. —, Об одном классе тангенциально вырожденных поверхностей. Докл. АН СССР, 1962, *146*, № 3, 515—518 (РЖМат, 1963, 7А344)
3. —, О строении сопряженных систем на многомерных поверхностях. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1970, № 10, 3—11 (РЖМат, 1971, 4А684)
4. —, Многомерная дифференциальная геометрия. Учебное пособие. Калинин, 1977
5. —, *Рыжков В. В.*, Многомерные поверхности специальных проективных типов. Тр. 4-го Всес. мат. съезда, 1961. Т. 2. Л., «Наука», 1964, 159—164 (РЖМат, 1964, 9А421)
6. —, *Чакмазян А. В.*, О подмногообразиях евклидова пространства с плоской нормальной связностью. Докл. АН АрмССР, 1976, *62*, № 2, 75—81 (РЖМат, 1977, 1А645)
7. —, —, Об оснащенных подмногообразиях аффинного пространства, допускающих параллельное нормальное векторное поле. Докл. АН АрмССР, 1975, *60*, № 3, 137—143 (РЖМат, 1975, 12А637)
8. *Базылев В. Т.*, О многомерных сетях и их преобразованиях. В сб. «Геометрия. 1963. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1965, 138—164 (РЖМат, 1966, 11А340)
9. *Вагнер В. В.*, Теория составного многообразия. Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1950, *8*, 11—72
10. *Гантмахер Ф. Р.*, Теория матриц. М., Гостехиздат, 1953, 491 с. (РЖМат, 1953, 583К)
11. *Домбровский Р. Ф.*, К геометрии касательно оснащенных поверхностей в P_n. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1974, *6*, 171—188 (РЖМат, 1975, 3А714)
12. *Картан Э.*, Риманова геометрия в ортогональном репере. М., Моск. ун-т, 1960, 307 с. (РЖМат, 1963, 5А467К)
13. —, Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Перев. с франц. Казань, Казанск. ун-т, 1962, 210 с. (РЖМат, 1965, 2А618К)
14. *Лаптев Г. Ф.*, О выделении одного класса внутренних геометрий, индуцированных на поверхности пространства аффинной связности. Докл. АН СССР, 1943, *41*, № 8, 329—331
15. —, О погружении пространства аффинной связности в аффинное пространство. Докл. АН СССР, 1945, *47*, № 8, 551—554
16. —, Аффинное изгибание многообразий с сохранением внутренних геометрий. Докл. АН СССР, 1947, *58*, № 4, 529—532
17. —, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. Тр. Моск. мат. о-ва, 1953, № 2, 275—382 (РЖМат, 1953, 433)
18. —, *Остиану Н. М.*, Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ. АН СССР, 1971, *3*, 49—94 (РЖМат, 1972, 6А680)
19. *Лумисте Ю. Г.*, К теории многообразий плоскостей евклидова пространства. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, вып. 192, 12—46 (РЖМат, 1968, 5А571)
20. —, Расслояемые семейства 1-пар четырехмерного проективного пространства. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, вып. 206, 10—21 (РЖМат, 1969, 3А528)
21. —, Теория связностей в расслоенных пространствах. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. 1969. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР).» М., 1971, 123—168 (РЖМат, 1971, 10А1К)
22. —, Дифференциальная геометрия подмногообразий. В сб. «Алгебра.

Топология. Геометрия. Т. 13. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1975, 273—340 (РЖМат, 1976, 6А623)
23. —, *Чакмазян А. В.*, Подмногообразия с параллельным нормальным векторным полем. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1974, № 5, 148—157 (РЖМат, 1975, 1А812)
24. *Норден А. П.*, Пространства аффинной связности. М.-Л., Гостехиздат, 1950, 463 с.
25. —, Пространства аффинной связности. М., 1976
26. *Остиану Н. М.*, О геометрии поверхностей многомерного симплектического пространства. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н. М., Моск. гор. пед. ин-т, 1955 (РЖМат, 1956, 6828Д)
27. —, О геометрии поверхности аффинно-симплектического пространства. Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина, 1963, № 208, 156—176 (РЖМат, 1964, 11А349)
28. —, Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. II. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ. АН СССР, 1971, *3*, 95—114 (РЖМат, 1972, 6А681)
29. —, *Рыжков В. В., Швейкин П. И.*, Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ. АН СССР, 1973, *4*, 7—70 (РЖМат, 1974, 3А451)
30. *Перепелкин Д. И.*, О параллельных многообразиях в евклидовом (или римановом) пространстве. Докл. АН СССР, 1935, *1*, 593—595
31. *Рыжков В. В.*, Сопряженные системы на многомерных поверхностях. Тр. Моск. мат. о-ва, 1958, *7*, 179—226 (РЖМат, 1959, 8465)
32. —, О тангенциально вырожденных поверхностях. Докл. АН СССР, 1960, *135*, № 1, 20—22 (РЖМат, 1962, 1А395)
33. *Столяров А. В.*, Проективно-дифференциальная геометрия регулярно гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов. В сб. «Проблемы геометрии. Т. 7. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1975, 117—151 (РЖМат, 1976, 9А613)
34. —, Двойственные линейные связности на оснащенных многообразиях пространства проективной связности. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 8. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1977, 25—46 (РЖМат, 1978, 1А657)
35. *Схоутен Я. А., Стройк Д. Я.*, Введение в новые методы дифференциальной геометрии. М., Изд-во ин. лит., 1948, *11*
36. *Фиников С. П.*, Теория конгруэнций. М.-Л., 1950, 528 с.
37. —, Теория пар конгруэнций. М., Гостехиздат, 1956, 443 с. (РЖМат, 1958, 4175К)
38. *Чакмазян А. В.*, Двойственная нормализация. Докл. АН АрмССР, 1959, *28*, № 4, 151—157 (РЖМат, 1961, 2А329)
39. —, Эволютные поверхности двумерной двойственно нормализованной D_2 в E_4. Докл. АН СССР, 1962, *144*, № 6, 1233—1236 (РЖМат, 1963, 3А360)
40. —, О поверхностях D_m пространства K_n. Докл. АН АрмССР, 1963, *36*, № 2, 71—75 (РЖМат, 1963, 11А335)
41. —, О двумерных поверхностях D_2, вложенных в евклидово пространство E_4. Докл. АН АрмССР, 1965, *40*, № 1, 3—6 (РЖМат, 1965, 8А384)
42. —, К теории двойственно нормализуемых m-мерных поверхностей V_m в E_n. Докл. АН СССР, 1971, *196*, № 3, 538—540 (РЖМат, 1971, 6А677)
43. —, Подмногообразия с параллельным p-мерным подрасслоением нормального расслоения. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1976, № 8, 107—110 (РЖМат, 1977, 5А512)
44. —, Подмногообразия пространства постоянной кривизны с параллельным подрасслоением нормального расслоения. Укр. геометр. сб. Респ. межвед. темат. науч. сб., 1977, вып. 20, 132—140 (РЖМат, 1977, 11А602)

45. —, Об одном классе подмногообразий в V_c^n с параллельным p-мерным подрасслоением нормального расслоения. Мат. заметки, 1977, *22*, № 4, 477—483 (РЖМат, 1978, 2А640)
46. —, Об оснащенных подмногообразиях аффинного пространства с плоской нормальной аффинной связностью. В сб. «Дифференц. геометрия». Калинин, 1977, 120—129 (РЖМат, 1977, 12А755)
47. —, Нормализованное по Нордену подмногообразие V_m в P_n с параллельным нормальным подрасслоением. Мат. заметки, 1977, *22*, № 5, 649—662
48. —, Нормализованное по Нордену подмногообразие с параллельным полем нормальных направлений в P_n. Докл. АН СССР, 1977, *236*, № 4, 816—819 (РЖМат, 1978, 2А642)
49. *Широков А. П.*, Структуры на дифференцируемых многообразиях. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия». 1967. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1969, 127—188 (РЖМат, 1970, 2А629)
50. *Широков П. А., Широков А. П.*, Аффинная дифференциальная геометрия. М., Физматгиз, 1959, 319 с. (РЖМат, 1961, 9А567К)
51. *Cartan E.*, Les groups d'holonomie des espaces generalises. Acta math., 1926, *48*, 1—42 (см. русск. перевод: Картан Э., Группы голономии обобщенных пространств. Казань, 1939)
52. —, Les espaces a connexion projective. Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1937, *4*, 147—159
53. *Chan Bang-Yen*, Geometry of submanifolds. New York, Marcel Dekker, 1973. X, 308 pp. (РЖМат, 1974, 5А753К)
54. —, *Yano Kentaro*, Submanifolds umbilical with respect to a non-parallel normal subbundle. Kodai Math. Semin. Repts, 1973, *25*, № 3, 289—296 (РЖМат, 1974, 3А548)
55. *Fabricius-Bierre*, Sur varietes a torsion nulle. Acta math., 1936, *66*, 49—77
56. *König R.*, Beiträge zu einer allgemeiner Mannigfaltigkeitslehre. Jahresl. d. Deutsch. Math. Ver., 1920, *28*, 213—228
57. *Levi-Civita T.*, Nozioni di parallelismo in una varieta qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvature Riemanniana. Rend. circ. matem. Palermo, 1917, *42*, 173—205
58. *Schouten J. A.*, Les connexions conformes et projective de E. Cartan et la connexion lineaire generale de la connexion lineaire generale de M. König. C. r. Acad. sci., 1924, *178*, 2044—2046
59. —, Erlanger Programm und übertragunslehre. Neue Gesichtspunkte zur Grundlegung der Geometrie. Rend. circ. matem., Palermo, 1926, *50*, 142—169
60. *Weyl H.*, Raum, Zeit, Materie. Berlin, 1918