L. A. Bokut', Undecidability of certain algorithmic problems for Lie algebras,
Algebra Logika, 1974, Volume 13, Number 2, 145–152

https://www.mathnet.ru/eng/al1420

Алгебра и логика, 13, № 2(1974), 145–152.

УДК 519.4

НЕРАЗРЕШИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ ДЛЯ АЛГЕБР ЛИ

Л. А. БОКУТЬ

1. В этой заметке мы докажем неразрешимость проблемы распознавания марковских свойств конечно-определенных (к.о.) алгебр Ли, частной проблемы изоморфизма для любой к.о. алгебры Ли, проблемы вхождения в прямое произведение двух свободных алгебр Ли и проблемы равенства для p-алгебр Ли. Все эти результаты будут получены как следствия из неразрешимости проблемы равенства для алгебр Ли[1].

2. Установим несколько вспомогательных лемм.

Пусть L – конечно-порожденная (к.п.) алгебра Ли над произвольным полем F, $a_1,\ldots,a_n$ – порождающие элементы алгебры L, $n\geqslant 3$, a – некоторый выделенный элемент L. Обозначим через $L(a)$ следующую алгебру Ли:

$$L(a)=\langle L, x_1,\ldots,x_n, y_1,\ldots,y_n;\ x_i a y_i - a_i = 0,$$

$$x_i a y_{i+1} y_{i+1} - x_i = 0,\ x_i a y_{i+2} y_{i+2} - y_i = 0,\ 1\leqslant i\leqslant n\rangle,$$

где, по определению, $y_{n+1}=y_1$, $y_{n+2}=y_2$ и отсутствие скобок означает правонормированную их расстановку: $a_1\ldots a_n=(\ldots(a_1a_2)\ldots a_n)$. Предыдущее выражение для $L(a)$ означает, что эта алгебра получается из L добавлением образующих x_i, y_i, $1\leqslant i\leqslant n$, и выписанных соотношений.

ЛЕММА 1. Если $a\neq 0$, то алгебра $L(a)$ содержит L в качестве подалгебры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a\neq 0$. Рассмотрим базу $\{b_i,\ i\in I\}$ алгебры $L(a)$, где $b_1=a$, I – вполне упорядоченное множество индексов. Зададим алгебру L таблицей умножения $b_ib_j-[b_ib_j]=0$, где $[b_ib_j]$ – представление элемента b_ib_j через выбранную базу алгебры L. Пусть $\mathfrak{A}$ – свободная алгебра Ли над F, заданная порождающими

$$\{b_i,\ i\in I,\ x_i, y_i,\ 1\leq i\leq n\}.$$

Определим в $\mathfrak{A}$ правильные в смысле Ширшова [2] слова, считая, что $x_i>y_j>b_k$ для всех i,j,k, элементы $b_i,\ i\in I,\ x_i, y_i,$ $1\leq i\leq n$, упорядочиваем по нижним индексам. Выделим в $\mathfrak{A}$ множество

$$S=\{b_i b_j-[b_i b_j],\ i,j\in I,\ i>j;\ x_i b_1 y_i - a_i,$$

$$x_i b_1 y_{i+1} y_{i+1}-x_i,\ x_i b_1 y_{i+2} y_{i+2}-y_i,\ 1\leq i\leq n\},$$

где через a_i мы обозначим представление этого элемента через $b_i,\ i\in I$, в алгебре L. Легко проверить (см. [1]), что множество S является замкнутым относительно композиций (в смысле А. И. Ширшова). Это следует из того, что композиции можно образовать только для элементов $b_i b_j-[b_i b_j]$ множества S, а эти композиции легко вычисляются (см., например, [1], стр. 1180). В силу леммы Ширшова (см. [7]), S – приведенные слова образуют базис алгебры $\mathfrak{A}/Id(S)\simeq L(a)$ (напомним, что S – приведенными называются правильные слова, ассоциативные носители которых не содержат в качестве подслов старших ассоциативных слов элементов множества S). Так как слова $b_i,\ i\in I$, являются S-приведенными, то $L(a)\supset L$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $C=A*B$ – свободное произведение двух алгебр Ли. Ненулевой элемент алгебры A не может аннулировать элемент алгебры C, не лежащий в алгебре A.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0\neq a\in A$, u – элемент свободного произведения, не лежащий в A. Рассмотрим некоторую базу $\{a_i,\ i\in I;\ a_1=a\}$ алгебры A и базу $\{b_j,\ j\in J\}$ алгебры B. Введем упорядоченность множеств $\{a_i,\ i>1\}$ и $\{b_j\}$ по нижним индексам и положим, что $a_1>a_i$, $a_1>b_j$, $b_j>a_i$ при всех $i>1, j$. Образуем, исходя из этой упорядоченности, особые слова [3], т. е. правильные слова, ассоциативные носители которых не содержат подслов $a_i a_j, a_i>a_j$

и $b_i b_j$, $b_i > b_j$. Особые слова образуют базис алгебры $A*B$ (см. [3]). Заметим, что в работе [3] это доказано относительно упорядоченности $b_j > a_1$, но это обстоятельство является несущественным, и результат верен при любой упорядоченности множества $\{a_i, b_j\}$. Следовательно, если $u = \sum \alpha_i u_i$, u_i – особые слова, то для всех $u_i \notin A$ слова $a_1 u_i$ – особые ($\bar{u}_i$ начинается на b_j). Поэтому $au \neq 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. **Никакая алгебра Ли A не может одновременно представляться в виде свободного и прямого произведения ненулевых алгебр Ли.**

Доказательство этой леммы следует из теоремы А. И. Ширшова [4] о подалгебрах свободных алгебр Ли, теоремы Г. П. Кукина [5] о подалгебрах свободных произведений алгебр Ли с помощью леммы 2 и рассуждений аналогичных тем, которые применяются для доказательства леммы 3 для групп (см [6], стр. 221).

Приведем для полноты изложения эти рассуждения. Пусть $A*B = C \oplus D$. Если $A \cap C \neq 0$, то ввиду леммы 2 мы получаем, что $A \supseteq D$, т. е. $B = 0$, что невозможно. Значит, $A \cap C = 0$, и аналогично $B \cap C = 0$. По теореме Кукина [5], алгебра C является свободной алгеброй Ли. По симметрии, D – свободная алгебра Ли. Так как $A \cap D = 0$, то проекция A на C изоморфна A. По теореме Ширшова, отсюда следует, что A – свободная алгебра Ли. Аналогично B – свободная алгебра Ли, т. е. алгебра $A*B$ свободная. Понятно, что свободная алгебра Ли не представима в виде прямой суммы ненулевых подалгебр (так как в противном случае абелева алгебра Ли с двумя линейно-независимыми порождающими была бы подалгеброй свободной алгебры Ли, что противоречит теореме Ширшова). Лемма доказана.

ЛЕММА 4. **Пусть L – алгебра Ли над полем F характеристики $p > 0$, L_p – p-алгебра Ли, заданная теми же образующими и соотношениями, что и L. Тогда L является подалгеброй алгебры L_p.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$L = \langle \{a_i, i \in I\}, f_j = 0, j \in J \rangle$$

и пусть для простоты $\{f_j, j \in J\} = N$ – это все множество элементов свободной алгебры Ли $\mathfrak{A}$ от порождающих $\{a_i, i\in I\}$, равных нулю в алгебре L. Рассмотрим p-алгебру Ли (= ограниченную алгебру Ли) L_p с этими же порождающими и соотношениями. Пусть $f\in L$ и $f=0$ в L_p. Тогда в свободной p-алгебре Ли $\mathfrak{A}_p$ от порождающих $\{a_i, i\in I\}$ имеет место равенство

$$f = \sum \alpha_i (v_1 \dots v_{k_i} f_j w_1 \dots w_{s_i})^{[p]^{n_i}},$$

где $\alpha_i \in F$, v_i, w_i - правильные слова из $\mathfrak{A}$, $n_i \geqslant 0$. Рассмотрим в правой части предыдущего равенства элементы с $n_i > 0$ и $n_i = 0$. Последние элементы перенесем в левую часть и получим

$$f' = \sum \alpha_i (v_1 \dots v_{k_i} f_j w_1 \dots w_{s_i})^{[p]^{n_i}}, \tag{1}$$

где $n_i > 0$. Без ограничения общности, можно считать, что слова $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_{k_i} \bar{f}_j \bar{w}_1 \dots \bar{w}_{s_i}$ - правильные (здесь $\bar{v}$ - ассоциативный носитель правильного слова v, $\bar{f}_j$ - ассоциативный носитель старшего слова элемента f_j). Пусть правая часть равенства (1) не равна тождественно нулю. Рассмотрим старшее ассоциативное слово этого равенства. Оно имеет вид

$$(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_{k_1} \bar{f}_1 \bar{w}_1 \dots \bar{w}_{s_1})^{p^{n_1}}. \tag{2}$$

Если это слово не имеет себе подобных в правой части (1), то равенство (1) невозможно. Значит, слово (2) имеет себе подобное среди старших ассоциативных слов правой части (1). Пусть

$$(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_{k_1} \bar{f}_1 \bar{w}_1 \dots \bar{w}_{s_1})^{p^{n_1}} = (\bar{v}_1' \dots \bar{v}_{k_2}' \bar{f}_2 \bar{w}_2' \dots \bar{w}_{s_2}')^{p^{n_2}}.$$

Так как ассоциативные слова, стоящие под знаком степени, являются правильными, а правильное слово не может быть степенью другого слова, то $n_1 = n_2 = n$ и

$$\bar{v}_1 \dots \bar{v}_{k_1} \bar{f}_1 \bar{w}_1 \dots \bar{w}_{s_1} = \bar{v}_1' \dots \bar{v}_{k_2}' \bar{f}_2 \bar{w}_1' \dots \bar{w}_{s_2}' = \bar{u}.$$

Рассмотрим два случая.

1) Выделенные слова $\bar{f}_1$ и $\bar{f}_2$ не пересекаются в слове $\bar{u}$. Тогда на слове $\bar{u}$ с двумя выделенными непересекающимися правильными подсловами $\bar{f}_1$ и $\bar{f}_2$ в силу леммы 3 работы [2] можно расставить скобки таким образом, чтобы две пары скобок имели вид $\dots[\bar{f}_1]\dots[\bar{f}_2]\dots$ и получившееся неассоциативное слово u имело своим старшим ассоциативным словом слово $\bar{u}$ (здесь $[\bar{f}_1]$ - единственное правильное неас -

социативное слово, получающееся из правильного ассоциативного слова f_1 расстановкой скобок). Заменим в слове u подслово $[\bar{f}_1]$ на f_1 и $[\bar{f}_2]$ – на f_2. Полученный элемент u' вновь имеет своим старшим ассоциативным словом слово $\bar{u}$. Преобразуем равенство (1) к виду:

$$\begin{aligned} f = & (\alpha_1 v_1 \ldots v_{k_1} f_1 w_1 \ldots w_{s_1} - \alpha_1 u')^{[p]^n} + \\ & + (\alpha_2 v_1' \ldots v_{k_2}' f_2 w_1' \ldots w_{s_2}' - \alpha_2 u')^{[p]^n} + \\ & + \beta (u')^{[p]^n} + X + \\ & + \sum_{i=3}^{n} \alpha_i (v_1 \ldots v_{k_i} f_i w_1 \ldots w_{s_i})^{[p]^{n_i}}, \end{aligned} \qquad (3)$$

где $\beta = \alpha_1^{p^n} + \alpha_2^{p^n}$, X – элемент свободной алгебры $\mathfrak{A}$, равный нулю в алгебре L (этот элемент получается применением основного тождества p-алгебр Ли $(f+g)^p = f^p + g^p + fg\ldots g + \ldots$). Первые два элемента правой части равенства (3), стоящие в скобках, преобразуются к виду $(\sum \beta_i u_i)^{[p]^n}$, а эти элементы по модулю N – к виду

$$\sum \beta_i' u_i^{[p]^n},$$

где $u_i^{[p]^n}$ имеет тот же вид, что и элементы правой части равенства (1), но только слово $\bar{u}_i^{p^n}$ меньше, чем слово (2). В итоге равенство (3) преобразуется по модулю N к виду (1), но с меньшим числом членов, подобных слову (2).

2) Выделенные подслова $\bar{f}_1$ и $\bar{f}_2$ слова $\bar{u}$ пересекаются. Имеем:

$$\bar{u} = v\bar{f}_1 a w = v b \bar{f}_2 w,$$

где $\bar{f}_1 a = b\bar{f}_2 = \bar{q}$. Применим для преобразования правой части равенства (1) метод композиции. Для этого расставим на слове $\bar{u}$ с выделенным правильным подсловом $\bar{q}$ скобки так, чтобы одна пара скобок имела вид $(\bar{q})$. На слове $\bar{q}$ расставим скобки двумя возможными способами q_1 и q_2 (в q_1 пара скобок имеет вид $[\bar{f}_1]$, в q_2 – $[\bar{f}_2]$, где $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ – выделенные подслова $\bar{q}$). В полученных словах q_1 и q_2 сделаем замены соответственно $[\bar{f}_1]$ – на f_1, $[\bar{f}_2]$ – на f_2. В результате мы получим элементы q' и q'' со старшими ассоциативными словами $\bar{q}$. Учитывая, что эти преобразования мы делаем над подсловом слова u, мы из этого слова построим два элемента: u' и u'', старшие ассоциативные слова которых равны $\bar{u}$. Преобразуем теперь правую часть равенства (1) к виду:

$$f' = (\alpha_1 \sigma_1 \ldots \sigma_{k_1} f_1 \omega_1 \ldots \omega_{s_1} - \alpha_1 u')^{[p]^n} +$$
$$+ (\alpha_2 \sigma_1' \ldots \sigma_{k_2}' f_2 \omega_1' \ldots \omega_{s_2}' - \alpha_2 u'')^{[p]^n} +$$
$$+ (\alpha_1 u' + \alpha_2 u'')^{[p]^n} + X + \sum_{i=3}^{n} \alpha_i (\sigma_1 \ldots \sigma_{k_i} f_i \omega_1 \ldots \omega_{s_i}), \qquad (4)$$

где X – элемент идеала N, $(\alpha_1 u' + \alpha_2 u'')^{[p]^n}$ – элемент со старшим словом $\bar{u}^{[p]^n}$, имеющий вид (2) (здесь мы воспользовались построением элемента $\alpha_1 u' + \alpha_2 u''$ и тем, что в качестве множества $\{f_j\}$ взяты все элементы идеала N). Таким образом, правая часть равенства (4) имеет вид (1) (по модулю N) и имеет меньшее число членов со старшим ассоциативным словом (2).

После конечного числа описанных преобразований мы приведем правую часть равенства (1) к элементу, лежащему в идеале N. Этим доказано, что $f=0$ в L, т.е. $L_p \supset L$. Лемма доказана.

3. В этом пункте мы приведем основные утверждения.

Назовем некоторое абстрактное свойство α к.о. алгебр Ли над F марковским, если существует к.о. алгебра Ли со свойством α и к.о. алгебра Ли, не вложимая в к.о. алгебру Ли со свойством α. Примерами марковских свойств являются следующие свойства: конечномерность, нильпотентность, разрешимость, свойство быть нулевой алгеброй, удовлетворять некоторому тождеству и др.

ТЕОРЕМА 1. *Произвольное марковское свойство к.о. алгебр Ли алгоритмически нераспознаваемо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α – марковское свойство, L_0 – к.о. алгебра Ли с неразрешимой проблемой равенства, L_1 – к.о. алгебра Ли со свойством α, L_2 – к.о. алгебра Ли, **невложимая в к.о. алгебру** Ли со свойством α. Выберем произвольный элемент $a \in L_0$. Алгебра

$$L_1 * (L_2 * L_0)(a),$$

где $(L_2 * L_0)(a)$ – к.о. алгебра Ли из леммы 1, удовлетворяет свойству α тогда и только тогда, когда $a=0$ в L_0. Это следует из леммы 1, свойств алгебры L_2 и свойств свободного произведения алгебр Ли. Ввиду неразрешимости проблемы равенства в L_0 свойство α нераспознаваемо. Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Частная проблема изоморфизма произвольной к.о. алгебре Ли L неразрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть опять L_0 – к.о. алгебра Ли с неразрешимой проблемой равенства, a – произвольный элемент алгебры L_0. Данная к.о. алгебра Ли L не может быть одновременно разложима в свободное и прямое произведение ненулевых алгебр Ли (в силу леммы 3). Если L неразложима в свободное **произведение, то алгебра** $L * L_0(a)$ **изоморфна** L тогда и только тогда, когда $L_0(a) = 0$, т.е. $a = 0$ в L_0. Если L неразложима в прямую сумму, то $L \oplus L_0(a) \simeq L$ тогда и только тогда, когда $a = 0$ в L_0. В обоих случаях указанные проблемы неразрешимы. Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Не существует алгоритма для ответа на вопрос, разложима ли к.о. алгебра Ли в свободное произведение (прямую сумму) ненулевых подалгебр. Это следует из того, что алгебра $\langle b\rangle * L_0(a)$ $(\langle b\rangle \oplus L_0(a))$ разложима в свободное произведение (прямую сумму) тогда и только тогда, когда $a = 0$ в L_0 (здесь $\langle b\rangle$ – одномерная алгебра Ли).

ТЕОРЕМА 3. Проблема равенства в классе ограниченных алгебр Ли алгоритмически неразрешима.

Это утверждение следует из неразрешимости проблемы равенства в классе алгебр Ли и леммы 4.

Следующий результат аналогичен теореме Михайловой [8] для групп.

ТЕОРЕМА 4. Проблема **вхождения** в прямой сумме двух свободных неабелевых алгебр Ли алгоритмически неразрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L_0 = \langle a_1, \ldots, a_n ; f_1 = 0, \ldots, f_m = 0\rangle$, $n \geq 2$, – к.о. алгебра Ли с неразрешимой проблемой равенства, $\mathfrak{A} = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$, $\mathfrak{B} = \langle b_1, \ldots, b_n\rangle$ – свободные алгебры Ли. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ и в ней подалгебру

$$L = Sub\{f_1, \ldots, f_m, a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n\}.$$

Мы утверждаем, что $f \in \mathfrak{A} \cap L$ тогда и только тогда, когда $f = 0$ в алгебре L_0. Отсюда будет следовать, что **проблема** вхождения в подалгебру L алгебры $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$, алгоритмически неразрешима. Если $f=0$ в L_0, то в алгебре $\mathfrak{A}$ элемент f представим в виде

$$f=\sum \alpha_i f_i a_{i_1} \dots a_{i_{k_i}} .$$

Тогда

$$f=\sum \alpha_i f_i (a_{i_1}+b_{i_1}) \dots (a_{i_{k_i}}+b_{i_{k_i}}),$$

т.е. $f \in \mathfrak{A} \cap L$. Пусть, обратно, $f \in \mathfrak{A} \cap L$. Тогда

$$f=\sum \alpha_i f_i (a_{i_1}+b_{i_1}) \dots (a_{i_{k_i}}+b_{i_{k_i}})+g,$$

где g принадлежит подалгебре, порожденной a_i+b_i, $1 \leq i \leq n$. Из предыдущего равенства следует, что

$$g=f-\sum \alpha_i f_i a_{i_1} \dots a_{i_{k_i}} ,$$

в частности, $g \in \mathfrak{A}$. Отсюда заключаем, что $g=0$ в $\mathfrak{A}$. Таким образом, $f=0$ в алгебре L_0. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ввиду теоремы 3 и рассуждений, аналогичных предыдущим, получаем, что теоремы 1–4 справедливы и для ограниченных алгебр Ли.

Литература

1. Л. А. БОКУТЬ, Неразрешимость проблемы равенства и подалгебры конечно-определенных алгебр Ли, Изв. АН СССР. Сер. матем., 36, № 6 (1972), 1179–1225.

2. А. И. ШИРШОВ, О свободных кольцах Ли, Матем. сб., 45, № 2 (1958), 113–122.

3. А. И. ШИРШОВ, Об одной гипотезе теории алгебр Ли, Сиб. матем. ж., 2 (1962), 297–301.

4. А. И. ШИРШОВ, Подалгебры свободных лиевых алгебр, Матем. сб., 33, № 2 (1953), 441–452.

5. Г. П. КУКИН, Подалгебры свободной лиевой суммы алгебр Ли с объединенной подалгеброй, Алгебра и логика, 11, № 1(1972), 59–86.

6. А. Г. КУРОШ, Теория групп, Наука, 1967.

7. А. И. ШИРШОВ, Некоторые алгоритмические проблемы для алгебр Ли, Сиб. матем. ж., 31 (1962), 291–296.

8. К. А. МИХАЙЛОВА, Проблема вхождения для прямых произведений групп, ДАН СССР, 119 (1958), 1103–1105.

Поступило 20 марта 1974 г.