F. Nazarov, M. Sodin, A. Vol'berg, The geometric Kannan–Lovász–Simonovits lemma, dimension-free estimates for volumes of sublevel sets of polynomials, and distribution of zeros of random analytic functions,
Algebra i Analiz, 2002, Volume 14, Issue 2, 214–234

https://www.mathnet.ru/eng/aa847

Алгебра и анализ
Том 14 (2002), вып. 2

ЛЕГКОЕ ЧТЕНИЕ ДЛЯ ПРОФЕССИОНАЛА

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ЛЕММА КАННАНА–ЛОВАСА–ШИМОНОВИЧА, НЕ ЗАВИСЯЩИЕ ОТ РАЗМЕРНОСТИ ОЦЕНКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ПОЛИНОМОВ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ СЛУЧАЙНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© Ф. Назаров, М. Содин, А. Вольберг

Мы хотим привлечь внимание к одному простому геометрическому неравенству, которое не зависит от размерности и может быть доказано с помощью классического "разложения на иглы". Опираясь на это неравенство, несложным и элегантным способом можно получить точные оценки (тоже не зависящие от размерности) для распределения значений полиномов на выпуклых подмножествах в $\mathbb{R}^n$. Эти оценки, в свою очередь, ведут к неожиданному результату о распределении нулей случайных аналитических функций. В нестрогих терминах можно сказать, что для простых семейств аналитических функций существует "типичное" распределение нулей. При этом "размер" той части семейства, где у функций распределение нулей отклоняется от типичного на некоторую величину, оценивается сверху числом $\mathrm{Const}\exp\{-\text{размер уклонения}\}$.

По существу изложение замкнуто в себе. Выбирая стиль, мы стремились к тому, чтобы чтение доставило удовольствие как студенту-старшекурснику, так и специалисту.

В резюме еще принято сообщать, что же в статье нового. На наш взгляд, ответ зависит от *двух* переменных: "Что написано?" и "Кто читает?" Поскольку значение второй нам недоступно, мы можем лишь привести рамки, в которые наверняка заключен ответ при известном значении первой. Но, вероятно, в нашей ситуации все равно получится стандартный интервал [Ничего, Всё] (концы включаются).

Ключевые слова: разложение на иглы, неравенство Ремеза, оценка Оффорда.
Работа выполнена при поддержке Совместного научного фонда США и Израиля.

§1. Геометрическая лемма Каннана—Ловаса—Шимоновича

Так мы будем называть следующее утверждение.

Предложение. *Пусть $\mathcal{F}$ компактное выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью и пусть множество $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ замкнуто. Для $\lambda > 1$ положим*

$$\mathcal{E}_{\lambda,\mathcal{F}} := \left\{ \mathrm{x} \in \mathcal{E} : \frac{|\mathcal{E} \cap \mathcal{J}|}{|\mathcal{J}|} \geqslant \frac{\lambda - 1}{\lambda} \text{ для каждого интервала } \mathcal{J} \text{ такого, что } \mathrm{x} \in \mathcal{J} \subset \mathcal{F} \right\}.$$

Тогда

$$\frac{\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_{\lambda,\mathcal{F}})}{\mathrm{Vol}(\mathcal{F})} \leqslant \left[\frac{\mathrm{Vol}(\mathcal{E})}{\mathrm{Vol}(\mathcal{F})}\right]^{\lambda}.$$

Замечание. В определении „ядра“ $\mathcal{E}_{\lambda,\mathcal{F}}$ можно ограничиться лишь интервалами $\mathcal{J}$, один из концов которых совпадает с x. Действительно, если x — внутренняя точка интервала $\mathcal{J}$, а условие $\frac{|\mathcal{E} \cap \cdot|}{|\cdot|} \geqslant \frac{\lambda-1}{\lambda}$ справедливо для обоих интервалов, на которые точка x разбивает интервал $\mathcal{J}$, то оно справедливо и для $\mathcal{J}$.

Доказательство геометрической КЛШ-леммы. Рассмотрим сначала частный случай. Пусть $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$ — прямая, а $\mathbb{P}$ — ортогональный проектор на $\mathcal{L}$. Обозначим $I = \mathbb{P}\mathcal{F} \subset \mathcal{L}$. Предположим, что $\mathcal{E} = \{\mathrm{x} \in \mathcal{F} : \mathbb{P}\mathrm{x} \in E\}$, где E — некоторое замкнутое подмножество множества I.

Утверждение. $\mathcal{E}_{\lambda,\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cap \mathbb{P}^{-1} E_{\lambda,I}$.

Иначе говоря, множество $\mathcal{E}_{\lambda,\mathcal{F}}$ однозначно определено своей проекцией на прямую $\mathcal{L}$ (оно — максимальное подмножество в $\mathcal{F}$ с такой проекцией); сама эта проекция равна

$$E_{\lambda,I} := \left\{ x \in E : \frac{|E \cap J|}{|J|} \geqslant \frac{\lambda - 1}{\lambda} \text{ для всякого интервала } J \text{ такого, что } x \in J \subset I \right\}.$$

Выражаясь еще менее формально, можно сказать что для „простых“ множеств описанного вида утверждение леммы по существу одномерно.

Доказательство утверждения. Мы имеем дело с простым упражнением по геометрии, поэтому мы проверим лишь то, что нам действительно потребуется, а именно, что множество в левой части равенства содержится в множестве в правой части. Предположим, что $\mathrm{x} \in \mathcal{E}$ и $x = \mathbb{P}\mathrm{x} \notin E_{\lambda,I}$. Тогда существует такой интервал $J \subset I$, что x — один из концов интервала J и

$\frac{|J\cap E|}{|J|} < \frac{\lambda-1}{\lambda}$. Пусть y — другой конец интервала J. Существует точка $\mathbf{y} \in \mathcal{F}$ такая, что $y = \mathbb{P}\mathbf{y}$. Так как множество $\mathcal{F}$ выпукло, то весь интервал $\mathcal{J} = \mathbf{xy}$ содержится в $\mathcal{F}$. Легко проверить, что $\frac{|\mathcal{J}\cap\mathcal{E}|}{|\mathcal{J}|} = \frac{|J\cap E|}{|J|} < \frac{\lambda-1}{\lambda}$, откуда $\mathbf{x} \notin \mathcal{E}_{\lambda,\mathcal{F}}$. •

После этой подготовки мы можем переформулировать КЛШ-лемму в рассматриваемом частном случае как одномерное утверждение. Пусть $f(x)$, $x \in I$, — $(n-1)$-мерный объем сечения выпуклого множества $\mathcal{F}$ гиперплоскостью, ортогональной прямой $\mathcal{L}$ и содержащей точку x. Тогда

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_{\lambda,\mathcal{F}}) = \int\limits_{E_{\lambda,I}} f(x)\,dx, \quad \mathrm{Vol}(\mathcal{F}) = \int\limits_I f(x)\,dx$$

и

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{E}) = \int\limits_E f(x)\,dx.$$

Следовательно, то, что надо доказать, переписывается в виде

$$\frac{\int_{E_{\lambda,I}} f}{\int_I f} \leqslant \left[\frac{\int_E f}{\int_I f}\right]^\lambda.$$

Первое, что приходит здесь в голову, — это задаться вопросом, не обстоит ли вообще дело наилучшим образом, т.е. не верно ли последнее неравенство для *любой* неотрицательной непрерывной функции f и любого множества $E \subset I$. Небольшое размышление, однако, приводит к ответу: „Нет“. Следующий по очереди естественный вопрос — какими же тогда специальными свойствами обладают функции, выражающие объемы сечений выпуклых тел? Ответ дает классическая теорема Брунна–Минковского. Одна из ее эквивалентных формулировок гласит, что функция $f(x)^{\frac{1}{n-1}}$ вогнута, т.е.

$$f\big(tx + (1-t)y\big)^{\frac{1}{n-1}} \geqslant tf(x)^{\frac{1}{n-1}} + (1-t)f(y)^{\frac{1}{n-1}} \quad \text{для всех } x, y \in I,\ t \in [0,1].$$

Для каждого n это свойство сильнее *логарифмической выпуклости* функции f, т.е. неравенства $f\big(tx + (1-t)y\big) \geqslant f(x)^t f(y)^{1-t}$ (а при больших n почти эквивалентно ему). Поэтому случай, который мы рассматриваем, покрывается следующей леммой.

Лемма. *Пусть $I \subset \mathbb{R}$ интервал, а $f : I \to [0,+\infty)$ — логарифмически выпуклая функция, не обращающаяся в нуль во внутренних точках интервала I. Пусть $E \subset I$ — измеримое множество. Для фиксированного $\lambda > 1$ положим*

$$E_{\lambda,I} := \Big\{x \in E : \frac{|E\cap J|}{|J|} \geqslant \frac{\lambda-1}{\lambda} \ \text{для всякого интервала } J \ \text{такого, что } x \in J \subset I\Big\}.$$

Тогда

$$\frac{\int_{E_{\lambda,I}} f}{\int_I f} \leqslant \left[\frac{\int_E f}{\int_I f}\right]^\lambda .$$

Если у читателя сейчас возникло впечатление, что проверить утверждение такого рода (когда оно уже сформулировано) — дело стандартной техники, которой читатель владеет, то, весьма вероятно, он прав. Мы бы хотели, чтобы такой читатель попробовал самостоятельно доказать лемму, не обращаясь к рассуждению, приведенному в Приложении. Мы надеемся, что так будет найден более изящный путь к результату. Хотя наше доказательство и вполне естественно, ему явно недостает элегантности.

Следующая задача — свести общее утверждение геометрической леммы Каннана–Ловаса–Шимоновича к рассмотренному частному случаю. Это будет сделано с помощью классического *разбиения на иглы.*

Для начала напомним (или объясним), что такое разбиение на иглы. Для каждого компактного выпуклого тела $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ и каждого $\delta > 0$ можно проделать следующие построения. Возьмем любую двумерную плоскость $\mathcal{K}$, пересекающую тело $\mathcal{F}$, и выберем δ-сеть в множестве $\mathcal{F} \cap \mathcal{K}$. Через каждую точку этой δ-сети проведем $(n-2)$-мерную плоскость, ортогональную $\mathcal{K}$. Ясно, что для всякой двумерной плоскости $\mathcal{K}'$, близкой к $\mathcal{K}$ в какой-нибудь естественной метрике[1], эти $(n-2)$-мерные плоскости трансверсальны с $\mathcal{K}'$, а их пересечения с $\mathcal{K}'$ образуют 2δ-сеть в множестве $\mathcal{K}' \cap \mathcal{F}$. Так как множество всех двумерных плоскостей, пересекающих $\mathcal{F}$, компактно (в любой естественной метрике), мы можем найти конечный набор $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_N$ $(n-2)$-мерных плоскостей со следующим свойством: для любой двумерной плоскости $\mathcal{K}$, пересекающей $\mathcal{F}$, множество точек пересечения плоскости $\mathcal{K}$ с теми из $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_N$, которые трансверсальны с $\mathcal{K}$, образует 2δ-сеть множества $\mathcal{K} \cap \mathcal{F}$.

Выполним следующий алгоритм.

Шаг 1. Выберем гиперплоскость $\mathcal{H} \supset \mathcal{M}_1$. Она разбивает тело $\mathcal{F}$ на два компактных подмножества $\mathcal{F}^+$ и $\mathcal{F}^-$.

Шаг 2. Выберем гиперплоскость $\mathcal{H}^+ \supset \mathcal{M}_2$ и с ее помощью разобьем множество $\mathcal{F}^+$ на два компактных выпуклых множества (одно из них может быть пустым). Затем выберем гиперплоскость $\mathcal{H}^- \supset \mathcal{M}_2$ и с ее помощью разобьем множество $\mathcal{F}^-$ на два компактных выпуклых множества.

$\vdots$

[1]Один из возможных способов ввести зестественное расстояние« между двумя плоскостями $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ одной размерности таков. Рассмотрим все изометрические движения пространства $\mathbb{R}^n$, переводящие $\mathcal{K}_1$ в $\mathcal{K}_2$. Каждое из таких движений имеет вид $x \mapsto Ux + a$, где $a \in \mathbb{R}^n$, а U — унитарный оператор. Положим $\operatorname{dist}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) := \inf(\|U - I\| + |a|)$. Проверка аксиом метрики предоставляется читателю.

Шаг k. После $(k-1)$-го шага множество $\mathcal{F}$ разбито на 2^{k-1} подмножеств. Разобьем каждое из них на два гиперплоскостью, содержащей $\mathcal{M}_k$ (так что k-й шаг состоит из 2^{k-1} подшагов).

После N шагов получим разбиение множества $\mathcal{F}$ на 2^N компактных выпуклых подмножеств $\mathcal{F}_j$; из них некоторые могут оказаться пустыми.

Определение. Пусть $\gamma > 0$. Выпуклое множество $\mathcal{F}$ называется γ-иглой, если в $\mathbb{R}^n$ существует такая прямая, что расстояние от любой точки множества $\mathcal{F}$ до этой прямой не превосходит числа γ.

Утверждение. Каждое множество $\mathcal{F}_j$ есть 8δ-игла.

Доказательство. Сначала покажем, что для каждой двумерной плоскости $\mathcal{K}$ в множестве $\mathcal{F}_j \cap \mathcal{K}$ не существует круга $\mathcal{D}$ радиуса 2δ. Действительно, в противном случае нашлась бы $(n-2)$-мерная плоскость $\mathcal{M}_k$, трансверсальная $\mathcal{K}$ и пересекающая $\mathcal{M}_k$ в некоторой точке внутри $\mathcal{D}$. Но тогда множество $\mathcal{F}_j$ не может целиком лежать в одном из полупространств, ограниченных какой-нибудь гиперплоскостью, содержащей $\mathcal{M}_k$. С другой стороны, на k-м шаге такое полупространство возникло, и мы пришли к противоречию.

Теперь пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — концы самого длинного интервала, содержащегося в $\mathcal{F}_j$. Отметим, что для каждой точки $\mathfrak{c} \in \mathcal{F}_j$ углы $\widehat{\mathfrak{a}}$ и $\widehat{\mathfrak{b}}$ треугольника $\mathfrak{abc}$ меньше $\frac{\pi}{2}$.

Если $\operatorname{dist}(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \leqslant 8\delta$, то множество $\mathcal{F}_j$ лежит в 8δ-окрестности любой прямой, проходящей через $\mathfrak{a}$. Если нет, рассмотрим произвольную точку $\mathfrak{c} \in \mathcal{F}_j$. Если расстояние от $\mathfrak{c}$ до прямой $\mathfrak{ab}$ больше, чем 8δ, то треугольник $\mathfrak{abc}$ содержит квадрат со стороной, большей 4δ, а следовательно, и круг радиуса 2δ, что невозможно. Поэтому множество $\mathcal{F}_j$ целиком лежит в 8δ-окрестности прямой $\mathfrak{ab}$. •

Эту конструкцию можно использовать (и (или) обобщать) множеством разных способов. К так называемой „полной общности" (которая, как известно, очень легко ускользает) в этой статье мы не стремимся. Поэтому покажем лишь, как описанную конструкцию можно приспособить к нашим целям. По поводу других применений смотри работы Громова и Мильмана [ND1], Ловаса и Шимоновича [ND2] и Каннана, Ловаса и Шимоновича [ND3], в которых эта элементарная идея превращена в мощный инструмент „геометрии высоких размерностей", в особенности теории изопериметрических неравенств.

Описанный выше алгоритм допускает произвол лишь в выборе гиперплоскостей, содержащих заданную $(n-2)$-мерную плоскость. На каждом подшаге возникает одна степень свободы, позволяющая „решить одно уравнение".

Возьмем малое число $\delta > 0$ и положим $\widetilde{\mathcal{E}} := \{x \in \mathcal{F} : \operatorname{dist}(x,\mathcal{E}) \leqslant 16\delta\}$, $\alpha = \frac{\operatorname{Vol}(\widetilde{\mathcal{E}})}{\operatorname{Vol}(\mathcal{F})}$. Взглянем на первый шаг процесса разбиения на иглы. Выбрать гиперплоскость $\mathcal{H} \supset \mathcal{M}_1$ — это то же самое, что выбрать единичный вектор

$\mathbf{v}\perp\mathcal{M}_1$ (он будет играть роль единичного вектора, ортогонального гиперплоскости $\mathcal{H}$). Так как $\dim\mathcal{M}_1 = n-2$, то такие векторы $\mathbf{v}$ образуют искую окружность радиуса 1. Примем естественное соглашение: $\mathcal{F}^+ = \mathcal{F}^+(v)$ — это та часть множества $\mathcal{F}$, которая содержится в подпространстве, расположенном в направлении вектора $\mathbf{v}$ от $\mathcal{H}$, т.е.

$$\mathcal{F}^+(\mathbf{v}) = \{\mathbf{x}\in\mathcal{F} : \langle \mathbf{x}-\mathbf{y},\mathbf{v}\rangle \geqslant 0 \text{ для всех } \mathbf{y}\in\mathcal{H}\},$$

а $\mathcal{F}^-$ — это оставшаяся часть множества $\mathcal{F}$.

Предположим, что $\mathrm{Vol}(\widetilde{\mathcal{E}}^+(\mathbf{v})) > \alpha\,\mathrm{Vol}(\mathcal{F}^+(\mathbf{v}))$. Тогда, разумеется,

$$\mathrm{Vol}(\widetilde{\mathcal{E}}^+(-\mathbf{v})) = \mathrm{Vol}(\widetilde{\mathcal{E}}^-(\mathbf{v})) < \alpha\,\mathrm{Vol}(\mathcal{F}^-(\mathbf{v})) = \alpha\,\mathrm{Vol}(\mathcal{F}^+(-\mathbf{v})).$$

Мы видим, что непрерывная функция $\mathbf{v}\mapsto \mathrm{Vol}(\widetilde{\mathcal{E}}^+(\mathbf{v})) - \alpha\,\mathrm{Vol}(\mathcal{F}^+(\mathbf{v}))$ принимает на единичной окружности как положительные, так и отрицательные значения. Значит, она где-то обращается в нуль, т.е. существует гиперплоскость $\mathcal{H}\supset\mathcal{M}_1$ такая, что $\mathrm{Vol}(\widetilde{\mathcal{E}}^+) = \alpha\,\mathrm{Vol}(\mathcal{F}^+)$ (это и есть то самое „одно уравнение", которое мы решаем, используя одну степень свободы на 1-м шаге). Конечно, для этой же гиперплоскости справедливо равенство $\mathrm{Vol}(\widetilde{\mathcal{E}}^-) = \alpha\,\mathrm{Vol}(\mathcal{F}^-)$. Легко видеть, что к тому же заключению ведут два других исходных предположения: $\mathrm{Vol}(\widetilde{\mathcal{E}}^+(\mathbf{v})) < \alpha\,\mathrm{Vol}(\mathcal{F}^+(\mathbf{v}))$ и $\mathrm{Vol}(\widetilde{\mathcal{E}}^+(\mathbf{v})) = \alpha\,\mathrm{Vol}(\mathcal{F}^+(\mathbf{v}))$.

Поступая подобным образом на каждом (под)шаге, мы придем к разбиению тела $\mathcal{F}$ на 8δ-иглы $\mathcal{F}_j$ такие, что для объемов множеств $\widetilde{\mathcal{E}}_j = \widetilde{\mathcal{E}}\cap\mathcal{F}_j$ выполняются равенства $\mathrm{Vol}(\widetilde{\mathcal{E}}_j) = \alpha\,\mathrm{Vol}(\mathcal{F}_j)$.

Пусть $\mathcal{L}_j\subset\mathbb{R}^n$ — прямая, в 8δ-окрестности которой содержится множество $\mathcal{F}_j$. Обозначим через $\mathbb{P}_j$ ортогональный проектор на эту прямую. Положим $I_j = \mathbb{P}_j\mathcal{F}_j$. Наконец, пусть $\mathcal{E}_j = \mathcal{E}\cap F_j$. Обозначим через $\mathcal{G}_j$ максимальное подмножество множества $\mathcal{F}_j$, имеющее ту же проекцию на $\mathcal{L}_j$, что и $\mathcal{E}_j$. В формальной записи, $\mathcal{G}_j = \mathcal{F}_j\cap\mathbb{P}_j^{-1}(\mathbb{P}_j\mathcal{E}_j)$. Очевидно, что $\mathcal{E}_j\subset\mathcal{G}_j\subset\widetilde{\mathcal{E}}_j$. Далее,

$$\mathcal{F}_j\cap\mathcal{E}_{\lambda,\mathcal{F}} \subset (\mathcal{E}_j)_{\lambda,\mathcal{F}_j} \subset (\mathcal{G}_j)_{\lambda,\mathcal{F}_j}.$$

Применяя уже доказанный частный случай КЛШ-леммы к множествам $\mathcal{G}_j$ и $\mathcal{F}_j$ и вспоминая, что $\mathrm{Vol}(\mathcal{G}_j)\leqslant\mathrm{Vol}(\widetilde{\mathcal{E}}_j) = \alpha\,\mathrm{Vol}(\mathcal{F}_j)$, получаем

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{F}_j\cap\mathcal{E}_{\lambda,\mathcal{F}}) \leqslant \alpha^\lambda\,\mathrm{Vol}(\mathcal{F}_j).$$

Суммируя по j, приходим к неравенству $\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_{\lambda,\mathcal{F}})\leqslant\alpha^\lambda\,\mathrm{Vol}(\mathcal{F})$ или, эквивалентным образом,

$$\frac{\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_{\lambda,\mathcal{F}})}{\mathrm{Vol}(\mathcal{F})} \leqslant \left\{\frac{\mathrm{Vol}(\widetilde{\mathcal{E}})}{\mathrm{Vol}(\mathcal{F})}\right\}^\lambda.$$

Чтобы закончить рассуждение, остается лишь заметить, что $\mathrm{Vol}(\widetilde{\mathcal{E}})\to\mathrm{Vol}(\mathcal{E})$ при $\delta\to 0$. •

Читателю, желающему лучше почувствовать доказательство и увидеть, как аккуратно работает разбиение на иглы, мы предлагаем рассмотреть выпуклое множество $\mathcal{F} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| \leqslant 1\} \subset \mathbb{R}^2$ и его подмножества $\mathcal{E}_1 = \{\mathbf{x} \in \mathcal{F} : x_2 \geqslant 0\}$ и $\mathcal{E}_2 = \{\mathbf{x} \in \mathcal{F} : |\mathbf{x}| \geqslant r\}$ $(0 < r < 1)$, нарисовать необходимые рисунки и выписать соответствующие неравенства в обоих случаях.

Замечание. Специалист заметит, что вместо объема можно было бы рассматривать произвольную логарифмически вогнутую меру μ в $\mathbb{R}^n$, т.е. меру вида $d\mu(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$, где плотность p — логарифмически вогнутая функция (как и выше, последнее означает, что $p(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) \geqslant p(\mathbf{x})^t p(\mathbf{y})^{1-t}$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$). При $p \equiv 1$ получается объем. Еще один интересный пример, пришедший из теории вероятностей, — это плотность *стандартного гауссова распределения* в $\mathbb{R}^n$: $p(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2}}$.

Имеется вариант теоремы Брунна–Минковского, гласящий, что класс логарифмически вогнутых мер замкнут относительно проектирования пространства $\mathbb{R}^n$ на аффинные подпространства (см., например, [ND1]). Это позволяет нам дословно перенести неравенство из геометрической леммы Каннана–Ловаса–Шимоновича на произвольные логарифмически вогнутые меры:

$$\frac{\mu(\mathcal{E}_{\lambda,\mathcal{F}})}{\mu(\mathcal{F})} \leqslant \left[\frac{\mu(\mathcal{E})}{\mu(\mathcal{F})}\right]^{\lambda}$$

для любого выпуклого множества $\mathcal{F}$, любого замкнутого множества $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ и любого $\lambda > 1$.

С другой стороны, нашей целью было еще раз подчеркнуть геометрическую природу локализационной техники Ловаса–Шимоновича и в какой-то степени уравновесить имеющуюся в современной литературе тенденцию представлять разбиение на иглы не как геометрический алгоритм, а как утверждение о двух (или четырех) интегралах. Поэтому мы отдали предпочтение „чисто геометрической“ терминологии и в основной части статьи ограничились „объемами“ и „выпуклыми множествами“. Полезно, наконец, отметить, что класс логарифмически вогнутых мер в сущности лишь немногим шире класса выпуклых множеств: все логарифмически вогнутые меры в $\mathbb{R}^n$ можно получить как пределы при $m \to \infty$ проекций в $\mathbb{R}^n$ объемов выпуклых множеств в пространствах $\mathbb{R}^m \supset \mathbb{R}^n$. Это соображение позволяет переносить многие утверждения с выпуклых множеств на логарифмически вогнутые меры более или менее автоматически. Например, гауссову меру можно рассматривать как предел проекций объемов на шарах больших размерностей.

§2. Не зависящие от размерности оценки распределения значений полиномов

Напомним сначала одно классическое одномерное неравенство.

Неравенство Ремеза. *Пусть P — полином степени d на $\mathbb{R}^1$. Тогда для каждого интервала $J \subset \mathbb{R}^1$ и каждого измеримого множества $E \subset J$ справедлива оценка*

$$\max_J |P| \leqslant \left[\frac{A|J|}{|E|}\right]^d \sup_E |P|, \tag{R}$$

где $A > 0$ — универсальная постоянная (наилучшее ее значение равно четырем).

Доказательство (с худшей постоянной $A = 2e$) получается непосредственно из интерполяционной формулы Лагранжа с $d+1$ узлом; узлы должны лежать в E и отстоять друг от друга по крайней мере на $\frac{|E|}{d}$. Точную константу можно получить рассуждением марковского типа „с подвижными нулями“, которое показывает, что наихудший случай — это когда E — интервал, имеющий общий конец с J, а P — полином Чебышева (нормированный подходящим образом).

Если мы хотим сохранить L^∞-норму в левой части неравенства, то получить подобную оценку, не зависящую от размерности, — дело безнадежное. Это видно уже на примере единичного шара пространства $\mathbb{R}^n$ в качестве $\mathcal{F}$ и полинома $P(\mathbf{x}) = 1 - |\mathbf{x}|^2$. Причина в том, что при больших n почти весь объем тела $\mathcal{F}$ сосредоточен вблизи единичной сферы, где полином $P(\mathbf{x})$ очень мал. Поэтому приходится ограничиться более слабыми оценками функции распределения.

Замечая, что сужение полинома степени d в $\mathbb{R}^n$ на любую прямую есть снова полином степени (не выше) d, и соединяя одномерное неравенство Ремеза с КЛШ-леммой, получаем следующее утверждение.

Лемма о сравнении. *Пусть P — полином степени d в $\mathbb{R}^n$, а F — замкнутое выпуклое множество единичного объема. Для всяких $c > 0$, $\lambda \geqslant 1$ справедлива оценка*

$$\mathrm{Vol}\{\mathbf{x} \in \mathcal{F} : |P(\mathbf{x})| \geqslant (A\lambda)^d c\} \leqslant \left[\mathrm{Vol}\{\mathbf{x} \in \mathcal{F} : |P(\mathbf{x})| \geqslant c\}\right]^\lambda.$$

Доказательство. Оценка тривиальна, если полином P — константа. В противном случае положим $\mathcal{E} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{F} : |P(\mathbf{x})| \geqslant c\}$. Для каждой точки $\mathbf{x} \notin \mathcal{E}_{\lambda,\mathcal{F}}$ найдется такой интервал $\mathcal{J} \subset \mathcal{F}$, содержащий $\mathbf{x}$, что длина множества $\mathcal{J} \setminus \mathcal{E}$ не меньше, чем $\lambda^{-1}|\mathcal{J}|$. В силу неравенства Ремеза

$$|P(\mathbf{x})| \leqslant \max_{\mathcal{J}} |P| \leqslant \left[\frac{A|\mathcal{J}|}{|\mathcal{J} \setminus \mathcal{E}|}\right]^d \sup_{\mathcal{J}\setminus\mathcal{E}} |P| \leqslant (A\lambda)^d c,$$

откуда $\{\mathbf{x} \in \mathcal{F} : |P(\mathbf{x})| > (A\lambda)^d c\} \subset \mathcal{E}_{\lambda,\mathcal{F}}$. Остается заметить, что строгое неравенство $|P(\mathbf{x})| > \ldots$ можно заменить нестрогим, так как у непостоянного полинома все множества уровня имеют нулевой объем. •

Пусть теперь $\mathcal{F}$ — выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{Vol}(\mathcal{F}) = 1$, а P — любой (непостоянный) полином степени d в $\mathbb{R}^n$. Обозначм через $M(P)$ единственное положительное число, такое что

$$\mathrm{Vol}\{\mathbf{x} \in \mathcal{F} : |P(\mathbf{x})| \geqslant M(P)\} = 1/e.$$

Неравенства для распределений. *Для каждого* $\lambda > 1$ *имеем*

$$\mathrm{Vol}\{\mathbf{x} \in \mathcal{F} : |P(\mathbf{x})| > (A\lambda)^d M(P)\} \leqslant e^{-\lambda}$$

и

$$\mathrm{Vol}\{\mathbf{x} \in \mathcal{F} : |P(\mathbf{x})| < (A\lambda)^{-d} M(P)\} \leqslant \frac{1}{\lambda}.$$

Доказательство. Первое неравенство — это лемма о сравнении с $c = M(P)$. Чтобы вывести второе, обозначим через V объем, стоящий в левой части, и применим лемму о сравнении с $c = (A\lambda)^{-d} M(P)$. Получим

$$1/e \leqslant (1 - V)^\lambda,$$

откуда

$$V \leqslant 1 - e^{-1/\lambda} \leqslant \frac{1}{\lambda}.$$

Замечания. Первое из неравенств для распределений (по существу принадлежащее Бургейну [DI1]) можно рассматривать как одно из проявлений *феномена концентрации*. Второе неравенство весьма напоминает классическую оценку Ремеза (R): разница лишь в том, что вместо максимума по *всему* множеству $\mathcal{F}$ в левой части фигурирует „медиана“ $M(P)$. Подчеркнем, что как лемма о сравнении, так и оба неравенства для распределений выведены непосредственно из одномерного неравенства Ремеза и тем самым остаются справедливыми (вместе со следствиями, приведенными ниже) для любого класса функций, для которых имеется подобный одномерный результат. Например, вместо полиномов степени d можно рассмотреть экспоненциальные полиномы порядка d, т.е. функции вида

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{d} c_k e^{i\langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}\rangle},$$

где $c_k \in \mathbb{C}$, $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$. Для них неравенство Ремеза (известное в этом случае под именем леммы Турана) справедливо, например, с $A = 316$.

Стоит, видимо, сказать еще, что, заменив (не вполне точное) неравенство (R) точной одномерной оценкой Ремеза, получающейся с помощью полиномов Чебышева, можно доказать *неулучшаемую* лемму о сравнении, не зависящую от размерности:

$$\mathrm{Vol}\{\mathbf{x} \in \mathcal{F} : |P(\mathbf{x})| \geqslant T_d(2\lambda - 1)\, c\} \leqslant \left[\mathrm{Vol}\{\mathbf{x} \in \mathcal{F} : |P(\mathbf{x})| \geqslant c\}\right]^{\lambda}.$$

Соответствующие неулучшаемые неравенства для распределений выглядят так:

$$\mathrm{Vol}\{\mathbf{x} \in \mathcal{F} : |P(\mathbf{x})| > T_d(2\lambda - 1)\, M(P)\} \leqslant e^{-\lambda}$$

и

$$\mathrm{Vol}\bigl\{\mathbf{x} \in \mathcal{F} : |P(\mathbf{x})| < \tfrac{1}{T_d(2\lambda-1)}\, M(P)\bigr\} \leqslant 1 - e^{-\frac{1}{\lambda}},$$

где

$$T_d(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^d + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^d\right]$$

— полином Чебышева степени d.

Отступление: оценки среднего значения функций распределения. В дальнейшем нам придется вычислять различные интегралы и средние вещественных функций, используя оценки их функций распределения. Напомним общие формулы.

Пусть $\mathcal{X}$ — пространство с мерой μ. Рассмотрим функцию $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ и измеримое множество $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$. Мы хотим выписать формулу, которая позволит оценивать интеграл $\int_{\mathcal{Y}} g\, d\mu$ или среднее значение $\langle g\rangle_{\mathcal{Y}} := \frac{1}{\mu(\mathcal{Y})}\int_{\mathcal{Y}} g\, d\mu$ исключительно в терминах мер множеств вида $\{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : g(\mathbf{x}) > t\}$.

Зафиксируем „нижний базовый уровень“ $L \in \mathbb{R}$ и рассмотрим функцию $g^+ := \max(g, L)$. Тогда

$$g^+(\mathbf{x}) = L + \int\limits_{L}^{g^+(\mathbf{x})} dt.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mathcal{Y}} g\, d\mu \leqslant \int\limits_{\mathcal{Y}} g^+\, d\mu \leqslant L\mu(\mathcal{Y}) + \int\limits_{L}^{+\infty} \mu\{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : g(\mathbf{x}) > t\}\, dt$$

и, наконец,

$$\langle g\rangle_{\mathcal{Y}} \leqslant L + \frac{1}{\mu(\mathcal{Y})}\int\limits_{L}^{+\infty} \mu\{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : g(\mathbf{x}) > t\}\, dt.$$

Для практических целей нам понадобятся следующие модификации этих оценок. Пусть φ — гладкая функция, возрастающая к $+\infty$ на $(0, +\infty)$. Пусть число Λ принадлежит области определения функции φ. Положим $L = \varphi(\Lambda)$. Сделав замену переменных $t = \varphi(\lambda)$, перепишем оценки в виде

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathcal{Y}} g\,d\mu &\leqslant \varphi(\Lambda)\mu(\mathcal{Y}) + \int\limits_{\Lambda}^{+\infty} \mu\{\mathbf{x}\in\mathcal{X} : g(\mathbf{x}) > \varphi(\lambda)\}\varphi'(\lambda)\,dt,\\ \langle g\rangle_{\mathcal{Y}} &\leqslant \varphi(\Lambda) + \frac{1}{\mu(\mathcal{Y})}\int\limits_{\Lambda}^{+\infty} \mu\{\mathbf{x}\in\mathcal{X} : g(\mathbf{x}) > \varphi(\lambda)\}\varphi'(\lambda)\,d\lambda.\end{aligned} \tag{$*$}$$

Оценки L^q-норм. Нам понадобится следующее простое наблюдение: если $\sigma \geqslant 1$, то

$$\begin{aligned}1+\sigma\int\limits_0^\infty \lambda^{\sigma-1}e^{-\lambda}\,d\lambda &= 1 + 2^{\sigma-1}\sigma^\sigma \int\limits_0^\infty \left[\frac{\lambda}{2\sigma}\right]^{\sigma-1} e^{-\lambda}\,d\lambda\\ &\leqslant 1 + 2^{\sigma-1}\sigma^\sigma\int\limits_0^\infty e^{-\lambda/2}d\lambda = 1 + (2\sigma)^\sigma\\ &\leqslant (3\sigma)^\sigma.\end{aligned}$$

Пусть $q \geqslant \frac{1}{d}$. Применяя оценки $(*)$ с $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathcal{F}$, $\mu = \mathrm{Vol}$, $g = \left[\frac{|P|}{A^d M(P)}\right]^q$, $\varphi(\lambda) = \lambda^{qd}$, $\Lambda = 1$ и используя неравенство $\mu\{g > \varphi(\lambda)\} \leqslant e^{-\lambda}$ (которое эквивалентно первому неравенству для распределений), получаем

$$\int\limits_{\mathcal{F}} \left[\frac{|P|}{A^d M(P)}\right]^q \leqslant 1 + qd\int\limits_1^\infty \lambda^{qd-1}e^{-\lambda}d\lambda \leqslant (3qd)^{qd}.$$

Следовательно,

$$\|P\|_{L^q(\mathcal{F})} \leqslant (3Aqd)^d M(P) \quad \text{для каждого } q \geqslant \frac{1}{d}.$$

Так как функция $q \to \|P\|_{L^q(\mathcal{F})}$ монотонна, отсюда немедленно выводим, что

$$\|P\|_{L^q(\mathcal{F})} \leqslant (3A)^d M(P) \quad \text{для каждого } q \leqslant \frac{1}{d}.$$

Оценки L^{-q}-норм. Пусть $0 < q < \frac{1}{d}$. Применяя оценки $(*)$ с $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathcal{F}$, $\mu = \mathrm{Vol}$, $g = \left[\frac{|P|}{A^{-d}M(P)}\right]^{-q}$, $\varphi(\lambda) = \lambda^{qd}$, $\Lambda = 1$ и используя неравенство $\mu\{g > \varphi(\lambda)\} \leqslant \frac{1}{\lambda}$ (эквивалентное второму неравенству для распределений), получаем

$$\int\limits_{\mathcal{F}} \left[\frac{A^d|P|}{M(P)}\right]^{-q} \leqslant 1 + qd\int\limits_1^\infty \lambda^{qd-1}\frac{1}{\lambda}d\lambda = \frac{1}{1-qd}.$$

Следовательно,

$$\|P\|_{L^{-q}(\mathcal{F})} \geqslant A^{-d}(1-qd)^{1/q}M(P) \quad \text{для } 0 < q < \frac{1}{d}.$$

Среднее геометрическое. Доказанные неравенства немедленно ведут к оценкам

$$(eA)^{-d}M(P) \leqslant \|P\|_{L^0(\mathcal{F})} \leqslant (3A)^d M(P).$$

Обратные неравенства Гёльдера. Предварительно отметим следующий простой факт.

Наблюдение. *Пусть A_+ — наилучшая постоянная со свойством*

$$\mathrm{Vol}\{|P| \geqslant (A_+\lambda)^d M(P)\} \leqslant e^{-\lambda} \quad \textit{для всех } \lambda \geqslant 1,$$

а A_- — наилучшая постоянная со свойством

$$\mathrm{Vol}\{|P| < (A_-\lambda)^{-d} M(P)\} \leqslant \frac{1}{\lambda} \quad \textit{для всех } \lambda \geqslant 1.$$

Тогда $A_+A_- \leqslant A$.

Доказательство. Пусть $0 < a < A_-$. По определению величины A_- существует постоянная $\lambda_- \geqslant 1$ такая, что

$$\mathrm{Vol}\{|P| < (a\lambda_-)^{-d} M(P)\} \geqslant \frac{1}{\lambda_-},$$

поэтому

$$\mathrm{Vol}\{|P| \geqslant (a\lambda_-)^{-d} M(P)\} \leqslant 1 - \frac{1}{\lambda_-} \leqslant e^{-\frac{1}{\lambda_-}}.$$

А тогда при $\lambda \geqslant 1$ имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}\{|P| \geqslant (\tfrac{A}{a}\lambda)^d M(P)\} &= \mathrm{Vol}\{|P| \geqslant (A[\lambda\lambda_-])^d (a\lambda_-)^{-d} M(P)\} \\ &\leqslant \mathrm{Vol}\{|P| \geqslant (a\lambda_-)^{-d} M(P)\}^{\lambda\lambda_-} \\ &\leqslant \left[e^{-\frac{1}{\lambda_-}}\right]^{\lambda\lambda_-} = e^{-\lambda}\end{aligned}$$

в силу леммы о сравнении, в которой мы взяли $c = (a\lambda_-)^{-d}$. Итак, $A_+ \leqslant \frac{A}{a}$; осталось воспользоваться тем, что число $a < A_-$ произвольно. •

Применяя полученные выше оценки для норм в L^q и L^{-r} с постоянными $A_\pm$ вместо A, находим

$$\|P\|_{L^q(\mathcal{F})} \cdot \|1/P\|_{L^r(\mathcal{F})} \leqslant \frac{(3A\max\{1, qd\})^d}{(1 - rd)^{1/r}} \quad \text{при } q \geqslant 0,\ 0 \leqslant r < 1/d.$$

BMO-норма функции $\log|P|$. Мы используем следующее определение BMO-нормы функции $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$:

$$\|u\|_{\mathrm{BMO}} = \sup_{\substack{\mathcal{F}\subset\mathbb{R}^n\\ \mathcal{F}\,\text{выпукло}}} \inf_{C\in\mathbb{R}} \frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathcal{F})}\int_{\mathcal{F}} |u-C|.$$

Так как класс полиномов инвариантен при растяжениях, оценку достаточно получить для выпуклых множеств $\mathcal{F}$ объема 1. Выберем $C=\log M(P)+d\frac{\log A_+-\log A_-}{2}$, применим оценки $(*)$ с $\mathcal{X}=\mathcal{Y}=\mathcal{F}$, $\mu=\mathrm{Vol}$, $g=\log|P|-C$, $\varphi(\lambda)=d[\log\lambda+\log(\sqrt{A})]$, $\Lambda=1$, а затем оценку $\mu\{g>\varphi(\lambda)\}\leqslant e^{-\lambda}+\frac{1}{\lambda}$ (это — комбинация обеих оценок из наблюдения). Получим

$$\int_{\mathcal{F}} |\log|P|-C| \leqslant d\Big[\frac{\log A}{2}+\int_1^\infty \frac{1}{\lambda}\Big(e^{-\lambda}+\frac{1}{\lambda}\Big)d\lambda\Big] \leqslant \frac{4+\log A}{2}\,d.$$

§3. Оценки распределений нулей „случайных" аналитических функций

Оценка средних функции $\log|P|$ на подмножествах компактного выпуклого множества. В этом пункте мы установим следующий факт.

Утверждение. *Пусть $\mathcal{F}\subset\mathbb{R}^n$ — компактное выпуклое множество и пусть $P:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ — полином степени d. Тогда для любого измеримого множества $\mathcal{E}\subset\mathcal{F}$ имеем*

$$\big|\langle\log|P|\rangle_{\mathcal{E}}-\langle\log|P|\rangle_{\mathcal{F}}\big| \leqslant d\log\frac{e^2 A\,\mathrm{Vol}(\mathcal{F})}{\mathrm{Vol}(\mathcal{E})},$$

где средние берутся по n-мерной лебеговой мере (объему) в $\mathbb{R}^n$, а A — постоянная из (одномерного) неравенства Ремеза.

Доказательство. Без потери общности можно считать, что $\mathrm{Vol}(\mathcal{F})=1$ и $M(P)=1$. Пусть, как и ранее, A_+ и A_- — наилучшие постоянные в неравенствах

$$\mathrm{Vol}\{|P|\geqslant(A_+\lambda)^d\}\leqslant e^{-\lambda}\leqslant\frac{1}{\lambda}\quad(\lambda\geqslant1)$$

и

$$\mathrm{Vol}\{|P|<(A_-\lambda)^{-d}\}\leqslant\frac{1}{\lambda}\quad(\lambda\geqslant1).$$

Беря $\mathcal{X}=\mathcal{F}$, $\mathcal{Y}=\mathcal{E}$, $g=\log|P|$, $\mu=\mathrm{Vol}$, $\varphi(\lambda)=d(\log A_++\log\lambda)$ и пользуясь неравенством $\mu\{g>\varphi(\lambda)\}\leqslant\frac{1}{\lambda}$, получаем, что для каждого $\Lambda\geqslant1$ верна оценка

$$\langle\log|P|\rangle_{\mathcal{E}}\leqslant d\Big[\log A_++\log\Lambda+\frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathcal{E})\Lambda}\Big].$$

Подставляя сюда $\Lambda=\frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathcal{E})}$, приходим к неравенству

$$\langle\log|P|\rangle_{\mathcal{E}}\leqslant d\log\frac{eA_+}{\mathrm{Vol}(\mathcal{E})}.$$

Подобным же образом, беря $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathcal{F}$, $g = -\log|P|$, $\mu = \mathrm{Vol}$, $\varphi(\lambda) = d(\log A_- + \log\lambda)$, заключаем, что для каждого $\Lambda \geqslant 1$ верна оценка

$$\langle \log|P|\rangle_{\mathcal{F}} \geqslant -d\Big[\log A_- + \log\Lambda + \frac{1}{\Lambda}\Big].$$

Подставляя сюда $\Lambda = 1$, приходим к неравенству

$$\langle \log|P|\rangle_{\mathcal{F}} \geqslant -d\log(eA_-).$$

Объединяя два полученных неравенства, находим

$$\langle \log|P|\rangle_{\mathcal{E}} - \langle \log|P|\rangle_{\mathcal{F}} \leqslant d\log\frac{e^2A_+A_-}{\mathrm{Vol}(\mathcal{E})} \leqslant d\log\frac{e^2A}{\mathrm{Vol}(\mathcal{E})}.$$

Неравенство $\langle \log|P|\rangle_{\mathcal{E}} - \langle \log|P|\rangle_{\mathcal{F}} \geqslant -d\log\frac{e^2A}{\mathrm{Vol}(\mathcal{E})}$ доказывается аналогично. •

Оценка Оффорда. Зафиксируем открытую область $G \subset \mathbb{C}$ и рассмотрим семейство аналитических функций $f(\mathbf{x};\cdot) : G \to \mathbb{C}$, где $\mathbf{x}$ — параметр, пробегающий некоторое множество $\mathcal{X}$, снабженное конечной мерой μ. Введем *считающую меру*

$$\nu_{\mathbf{x}} := \sum_{w:\, f(\mathbf{x};w)=0} \delta_w$$

для нулей функций $f(\mathbf{x};\cdot)$. Здесь δ_w — мера Дирака в точке $w \in G$, а каждый нуль считается столько раз, какова его кратность. Для каждой точки $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ мера $\nu_{\mathbf{x}}$ задана на G и локально конечна.

Рассмотрим усредненную меру

$$\nu(U) := \frac{1}{\mu(\mathcal{X})}\int\limits_{\mathcal{X}} \nu_{\mathbf{x}}(U)\, d\mu(\mathbf{x}), \quad U \subset G.$$

Мера ν дает „типичное" (среднее) распределение нулей „случайной" функции $f(\mathbf{x};\cdot)$ на G. Пусть $\psi \in C_0^\infty(G)$ и пусть $\lambda > 0$. Определим исключительное множество $\mathcal{E}_+ = \mathcal{E}_+(\psi,\lambda)$ формулой

$$\mathcal{E}_+(\psi,\lambda) := \Big\{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : \int\limits_G \psi\, d\nu_{\mathbf{x}} - \int\limits_G \psi\, d\nu \geqslant \lambda\Big\}.$$

Заметим, что для каждого $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ мера $\nu_{\mathbf{x}}$ есть обобщенный лапласиан функции $\log|f(\mathbf{x};\cdot)|$, деленный на 2π; поэтому

$$\int\limits_G \psi\, d\nu_{\mathbf{x}} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_G \Delta\psi(z)\log|f(\mathbf{x};z)|\, dm_2(z),$$

где m_2 — площадь на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Усредняя по $\mathcal{X}$, находим

$$\int\limits_G \psi\, d\nu = \frac{1}{2\pi}\int\limits_G \Delta\psi(z)\langle\log|f(\cdot;z)|\rangle_{\mathcal{X}}\, dm_2(z).$$

Усредняя разность этих двух равенств по параметру $\mathbf{x}$, пробегающему множество $\mathcal{E}_+ = \mathcal{E}_+(\psi, \lambda)$, получаем неравенство

$$\lambda \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_G \Delta\psi(z)\cdot\left[\langle\log|f(\cdot;z)|\rangle_{\mathcal{E}_+} - \langle\log|f(\cdot;z)|\rangle_{\mathcal{X}}\right] dm_2(z)$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\|\Delta\psi\|_{L^1(G)}\cdot\sup_{z\in G}\left|\langle\log|f(\cdot;z)|\rangle_{\mathcal{E}_+} - \langle\log|f(\cdot;z)|\rangle_{\mathcal{X}}\right|.$$

Аналогичное рассуждение показывает, что та же оценка верна и для множества

$$\mathcal{E}_- = \mathcal{E}_-(\psi,\lambda) := \left\{\mathbf{x}\in\mathcal{X} : \int_G \psi\, d\nu_{\mathbf{x}} - \int_G \psi\, d\nu \leqslant -\lambda\right\}.$$

В комбинации с утверждением в начале пункта эти оценки дают следующее.

Теорема (оценка Оффорда). *Если $\mathcal{X} = \mathcal{F}$ — выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, μ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, а $f(\mathbf{x}; z)$ зависит от $\mathbf{x}$ как полином степени d для каждого z, то*

$$\frac{\mathrm{Vol}(\mathcal{E}(\psi,\lambda))}{\mathrm{Vol}(\mathcal{F})} \leqslant 2Ae^2\exp\left\{-\frac{2\pi\lambda}{d\|\Delta\psi\|_{L^1(G)}}\right\},$$

где

$$\mathcal{E}(\psi,\lambda) := \mathcal{E}_+(\psi,\lambda)\cup\mathcal{E}_-(\psi,\lambda) = \left\{\mathbf{x}\in\mathcal{X} : \left|\int_G \psi\, d\nu_{\mathbf{x}} - \int_G \psi\, d\nu\right| \geqslant \lambda\right\}.$$

Следствие. *Обозначим через $\mathbb{D}_r$ круг радиуса r с центром в начале координат. Пусть $G = \mathbb{D}_1$. Назовем точку $\mathbf{x}\in\mathcal{F}$ исключительной, если функция $f(\mathbf{x};\cdot)$ не обращается в нуль в $\mathbb{D}_1$. Пусть $\mathcal{E}^*\subset\mathcal{F}$ — множество всех исключительных точек. Если $\mathrm{Vol}(\mathcal{E}^*) > 0$, мы можем оценить скорость роста (усредненной) считающей функции $r\mapsto\nu(\mathbb{D}_r)$:*

$$\nu(\mathbb{D}_r) \leqslant \frac{4d}{1-r}\log\frac{Ae^2\,\mathrm{Vol}(\mathcal{F})}{\mathrm{Vol}(\mathcal{E}^*)}, \qquad 0 < r < 1.$$

Доказательство следствия. Зафиксируем r и выберем пробную функцию вида $\psi(z) = \Psi(|z|)$, где $\Psi\in C_0^\infty[0,1)$, $\Psi\geqslant 0$ и $\Psi(t) = 1$ для $0\leqslant t\leqslant r$. Пусть $\lambda := \int_G \psi\, d\nu \geqslant \nu(\mathbb{D}_r)$. Отметим, что при таком выборе числа λ, разумеется, $\mathcal{E}^*\subset\mathcal{E}_-(\psi;\lambda)$, и поэтому

$$\frac{\mathrm{Vol}(\mathcal{E}^*)}{\mathrm{Vol}(\mathcal{F})} \leqslant Ae^2\exp\left\{-\frac{2\pi\lambda}{d\|\Delta\psi\|_{L^1(G)}}\right\}.$$

Мы можем переписать это неравенство в виде

$$\nu(\mathbb{D}_r) \leqslant \lambda \leqslant \frac{d}{2\pi}\|\Delta\psi\|_{L^1(G)}\log\frac{Ae^2\,\mathrm{Vol}(\mathcal{F})}{\mathrm{Vol}(\mathcal{E}^*)}.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi}\|\Delta\psi\|_{L^1(G)} = \int_r^1 |t\Psi''(t) + \Psi'(t)|\,dt.$$

Выбрав функцию Ψ достаточно близкой к квадратичному сплайну, у которого вторая производная равна $-\frac{4}{(1-r)^2}$ между r и $\frac{1+r}{2}$ и равна $+\frac{4}{(1-r)^2}$ между $\frac{1+r}{2}$ и 1, видим, что правую часть всегда можно сделать меньшей, чем $\frac{4}{1-r}$. •

Приложение: доказательство леммы

Прежде чем приступить к доказательству, сделаем несколько простых замечаний о числовых неравенствах, которые будут использоваться в наших рассуждениях.

Наблюдение 1. *Для всех* $X > 0$, $Y \geqslant 0$ *верна оценка*

$$(X+Y)^\lambda \geqslant X\big(X + \tfrac{\lambda}{\lambda-1}Y\big)^{\lambda-1}.$$

Действительно, при $Y = 0$ имеем равенство и, очевидным образом, при $Y \geqslant 0$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial Y}\log(\text{Л.Ч.}) = \frac{\lambda}{X+Y} \geqslant \frac{\lambda}{X + \frac{\lambda}{\lambda-1}Y} = \frac{\partial}{\partial Y}\log(\text{П.Ч.}),$$

где П.Ч. и Л.Ч. обозначают соответственно правую и левую части неравенства. •

Наблюдение 2. *Если неравенство* $(X+Y)^\lambda \geqslant X(X+Z)^{\lambda-1}$ *справедливо при некоторых* $X > 0$, $Y, Z \geqslant 0$, *то для каждого* $T \geqslant 0$ *имеем*

$$(X+Y+T)^\lambda \geqslant X\big(X+Z+\tfrac{\lambda}{\lambda-1}T\big)^{\lambda-1}.$$

Действительно, если $Z \geqslant Y$, можно повторить доказательство наблюдения 1 с $\frac{\partial}{\partial T}$ вместо $\frac{\partial}{\partial Y}$. Если же $Z < Y < \frac{\lambda}{\lambda-1}Y$, то нужная оценка немедленно вытекает из наблюдения 1. •

Наблюдение 3. *Если* $(X+Y)^\lambda \geqslant X(X+Z)^{\lambda-1}$ *для некоторых* $X, Y, Z > 0$, *то*

$$(x+Y)^\lambda \geqslant x(x+Z)^{\lambda-1} \quad \text{для всех } x \in [0, X].$$

Это — наименее тривиальное из наших наблюдений. Перепишем неравенство в виде

$$\frac{x}{x+Y} \leqslant \left[\frac{x+Y}{x+Z}\right]^{\lambda-1}$$

или, эквивалентным образом,

$$\left[\frac{x}{x+Y}\right]^{-\frac{1}{\lambda-1}} \geqslant \frac{x+Z}{x+Y}.$$

Положим $\beta := \frac{1}{\lambda-1}$, $\theta := \frac{x}{x+Y}$, $\Theta := \frac{X}{X+Y}$. Тогда $\frac{x+Z}{x+Y} = \frac{Z}{Y} - (\frac{Z}{Y} - 1)\theta = L(\theta)$ есть линейная функция. Мы хотим показать, что если неравенство $\theta^{-\beta} \geqslant L(\theta)$ справедливо при $\theta = \Theta$, то оно справедливо на всем интервале $[0, \Theta]$. Неравенство это, разумеется, справедливо, если θ достаточно близко к нулю. Значит, если бы оно нарушалось где-то на интервале $\theta \in [0, \Theta]$, то графики функций $\theta^{-\beta}$ и $L(\theta)$ пересекались бы по крайней мере дважды на интервале $(0, \Theta]$. Но они пересекаются еще и при $\theta = 1$, а прямая (график функции $L(\theta)$) не может пересекать строго выпуклую кривую (график функции $\theta^{-\beta}$) в трех точках. •

Наблюдение 4. *Если* $(X+Y)^\lambda \geqslant X(X+Y+Z)^{\lambda-1}$ *для некоторых* $X, Y, Z > 0$, *то*

$$(x+y)^\lambda \geqslant x(x+y+z)^{\lambda-1} \quad \text{для всех } x \leqslant X,\ y \geqslant Y,\ z \leqslant Z.$$

Действительно, число Z, разумеется, можно заменить числом z. После этого мы можем заменить X на x в силу наблюдения 3. Остается заметить, что при фиксированных x и z имеем

$$\frac{\partial}{\partial y}\log(\text{Л.Ч.}) = \frac{\lambda}{x+y} \geqslant \frac{\lambda-1}{x+y+z} = \frac{\partial}{\partial y}\log(\text{П.Ч.}). \qquad \bullet$$

Теперь мы можем приступить к доказательству леммы. Задача инвариантна при линейных заменах переменной, так что можно считать, что $I = [0,1]$. Еще можно считать без потери общности, что функция f непрерывна, *строго* логарифмически вогнута и такова, что $f(0) = f(1) = 0$ (если не так, достаточно рассмотреть семейство функций $f_\varepsilon(x) = [x(1-x)]^\varepsilon f(x)$, применить утверждение к каждой из них, а затем перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$).

Ясно, что множество $E_{\lambda,I}$ замкнуто. Если оно пусто, доказывать нечего. В противном случае $(0,1) \setminus E_{\lambda,I} = \cup_j I_j$, где I_j — дизъюнктные открытые интервалы, каждый из которых короче полного интервала $(0,1)$. Рассмотрим один из них: $I_j = (a,b)$. Назовем его *регулярным*, если либо $a > 0$ и функция f убывает на (a,b), либо $b < 1$ и функция f возрастает на (a,b). В противном случае назовем интервал I_j *исключительным*. Понятно, что может существовать не более одного исключительного интервала. Если таковой существует, присвоим ему индекс 0. Положим $E_j = E \cap I_j$. Мы утверждаем, что для всякого регулярного интервала справедливо неравенство

$$\int_{E_j} f \geqslant \frac{\lambda-1}{\lambda}\int_{I_j} f.$$

Действительно, если, например, $I_j = (a,b)$ и $a > 0$, то $a \in E_{\lambda,I}$, откуда $|E_j \cap (a,t)| \geqslant \frac{\lambda-1}{\lambda}|(a,t)|$ при $a < t < b$. Так как функция f убывает на интервале (a,b), отсюда сразу следует нужная оценка.

Если исключительного интервала нет, лемму очень легко доказать. Действительно, утверждение леммы равносильно неравенству

$$\left[\int\limits_E f\right]^\lambda \geqslant \left[\int\limits_{E_{\lambda,I}} f\right] \cdot \left[\int\limits_{(0,1)} f\right]^{\lambda-1};$$

т.е. неравенству

$$\left[\int\limits_{E_{\lambda,I}} f + \int\limits_{\cup E_j} f\right]^\lambda \geqslant \left[\int\limits_{E_{\lambda,I}} f\right] \cdot \left[\int\limits_{E_{\lambda,I}} f + \int\limits_{\cup I_j} f\right]^{\lambda-1}.$$

Но $\int_{\cup I_j} f \leqslant \frac{\lambda}{\lambda-1} \int_{\cup E_j} f$, так что нужная оценка вытекает из наблюдения 1.

Теперь предположим, что интервал $I_0 = (a,b)$ исключительный. Без потери общности можно считать, что $f(b) \leqslant f(a)$ (иначе просто сделаем замену переменных $t \to 1-t$, относительно которой задача инвариантна). Отметим, что тогда автоматически $a > 0$, ибо в противном случае $f(b) \leqslant f(a) = f(0) = 0$, а так как функция f строго положительна на $(0,1)$, то отсюда последовало бы, что $b = 1$, $I_0 = (0,1)$, а множество $E_{\lambda,I}$ пусто.

Если $f(b) < f(a)$, то пусть c — (единственная) точка интервала (a,b), в которой $f(a) = f(c)$. Мы хотим слегка изменить порцию E_0 множества E. Так как $a \in E_{\lambda,I}$, снова справедливо неравенство $|E \cap (a,c)| \geqslant \frac{\lambda-1}{\lambda}|(a,c)|$. Рассмотрим любой кусок множества $E \cap (a,c)$ меры $|E \cap (a,c)| - \frac{\lambda-1}{\lambda}|(a,c)|$ и заменим его множеством той же меры на отрезке (c,b), используя при этом точки множества $(c,b) \setminus E$, лежащие как можно ближе к левому концу c. Если мера всего множества $(c,b) \setminus E$ слишком мала, просто заполним весь интервал (c,b) и забудем о том, что мера уменьшилась. Пусть E' — то, что получилось из E в результате этой операции. Утверждается, что

$$|E' \cap (c,t)| \geqslant \frac{\lambda-1}{\lambda}|(c,t)|$$

при $c < t < b$. Действительно, порция $E' \cap (c,b)$ модифицированного множества E' начинается с интервала. Пока точка t остается в этом интервале, доказывать нечего. Как только точка t покинет этот интервал, так сразу же длина пересечения $E' \cap (a,t)$ совпадет с длиной пересечения $E \cap (a,t)$, и потому оценится снизу величиной $\frac{\lambda-1}{\lambda}|(a,t)|$. При этом еще и $|E' \cap (a,c)| = \frac{\lambda-1}{\lambda}|(a,c)|$, так что для оставщейся части получается нужное неравенство. Разумеется, функция f убывает на интервале (c,b), и с этим интервалом можно поступить, как с регулярным. Значит, мы можем сосредоточиться на интервале (a,c).

Если в самом начале имело место равенство $f(a) = f(b)$, то эта конструкция приводит просто к обозначению числа b буквой c и замене порции $E \cap (a,b)$ множества E произвольным ее подмножеством меры $\frac{\lambda-1}{\lambda}|(a,b)|$.

На отрезке (a,c) мы еще несколько изменим множество E'. Именно, соответствующую порцию множества E' заменим множеством вида $\{f < \beta\}$, выбранным с тем расчетом, чтобы мера его была равна $\frac{\lambda-1}{\lambda}|(a,c)|$. Разумеется, в ходе этих операций интеграл от f по изменяемому множеству лишь уменьшается: $\int_{E'} f \leqslant \int_E f$. Поэтому будет достаточно доказать неравенство из леммы с заменой интеграла $\int_E f$ на $\int_{E'} f$.

Посмотрим теперь на то, что получилось. Имеется один исключительный интервал $I'_0 = (a,c)$ такой, что $f(a) = f(c)$, $|E'_0| = \frac{\lambda-1}{\lambda}|(a,c)|$, а в E'_0 „собраны" точки интервала I'_0, в которых f принимает малые значения. Еще имеются регулярные интервалы I'_j (исходные регулярные интервалы и еще, может быть, (c,b)), для каждого из которых верна оценка $\int_{E'_j} f \geqslant \frac{\lambda-1}{\lambda} \int_{I'_j} f$. Нужно доказать неравенство

$$\left[\int\limits_{E_{\lambda,I}} f + \int\limits_{E'_0} f + \int\limits_{\cup_{j>0} E'_j} f\right]^{\lambda} \geqslant \left[\int\limits_{E_{\lambda,I}} f\right] \cdot \left[\int\limits_{E_{\lambda,I}} f + \int\limits_{I'_0} f + \int\limits_{\cup_{j>0} I'_j} f\right]^{\lambda-1}.$$

В силу наблюдения 2 достаточно проверить, что

$$\left[\int\limits_{E_{\lambda,I}} f + \int\limits_{E'_0} f\right]^{\lambda} \geqslant \left[\int\limits_{E_{\lambda,I}} f\right] \cdot \left[\int\limits_{E_{\lambda,I}} f + \int\limits_{I'_0} f\right]^{\lambda-1}.$$

Наблюдение 3 позволяет нам расширить множество $E_{\lambda,I}$ в последнем неравенстве до всего множества $(0,1) \setminus I'_0$. Теперь обозначим $|I'_0| = \lambda m$, и пусть f^* — убывающая перестановка функции f на отрезке $(0,1)$. Разумеется, она не только убывает, но и логарифмически вогнута. Надо доказать неравенство

$$\left[\int\limits_{\lambda m}^{1} f^* + \int\limits_{m}^{\lambda m} f^*\right]^{\lambda} \geqslant \left[\int\limits_{\lambda m}^{1} f^*\right]\left[\int\limits_{\lambda m}^{1} f^* + \int\limits_{m}^{\lambda m} f^* + \int\limits_{0}^{m} f^*\right]^{\lambda-1}.$$

В силу наблюдения 4, если мы изменим функцию f^* так, чтобы интегралы $\int_0^m f^*$ и $\int_{\lambda m}^1 f^*$ увеличились и одновременно интеграл $\int_m^{\lambda m} f^*$ уменьшился, неравенство усилится. Такое изменение произойдет, если мы заменим функцию $\log f^*$ линейной функцией, интерполирующей ее в точках m и λm. Еще раз воспользовавшись наблюдением 3, видим, что интегрирование можно распространить на правую полуось, так что окончательно приходим к необходимости проверить неравенство

$$\left[\int\limits_{m}^{\infty} f^*\right]^{\lambda} \geqslant \left[\int\limits_{\lambda m}^{\infty} f^*\right] \cdot \left[\int\limits_{0}^{\infty} f^*\right]^{\lambda-1},$$

в котором f^* — убывающая экспоненциальная функция. Но здесь имеет место равенство! •

Благодарности. Авторы благодарны Ефиму Глускину, Виталию Мильману и Леониду Полтеровичу за полезные обсуждения.

Список литературы

Теорема Брунна–Минковского.

[BM1] Burago Yu. D., Zalgaller V. A., *Geometric inequalities*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 285, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1988.

Разложение на иглы.

[ND1] Gromov M., Milman V., *Generalization of the spherical isoperimetric inequality to uniformly convex Banach spaces*, Compositio Math. **62** (1987), 263-282.

[ND2] Lovász L., Simonovits M., *Random walks in a convex body and an improved volume algorithm*, Random Structures Algorithms **4** (1993), 359-412.

[ND3] Kannan R., Lovász L., Simonovits M., *Isoperimetric problem for convex bodies and a localization lemma*, Discrete Comput. Geom. **13** (1995), 541-559.

Неравенство Ремеза.

[RI1] Remez E. J., *Sur une propriété extrémale des polynomes de Tchebychef*, Сообщ. Харьк. мат. о-ва **13** (1936), 93-95.

[RI2] Dudley R. M., Randol B., *Implications of pointwise bounds on polynomials*, Duke Math. J. **29** (1962), 455-458.

[RI3] Брудный Ю. А., Ганзбург М. И., *Об одной экстремальной задаче для многочленов n переменных*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **37** (1973), 344-355.

Лемма Турана.

[TL1] Назаров Ф. Л., *Локальные оценки экспоненциальных полиномов и их приложения к неравенствам типа принципа неопределенности*, Алгебра и анализ **5** (1993), 3-66.

Оценки функций распределения, не зависящие от размерности.

[DI1] Gromov M., Milman V., *Brunn theorem and a concentration of volume phenomena for symmetric convex bodies*, Israel Seminar on Geometrical Aspects of Functional Analysis (1983/84), Tel Aviv Univ., Tel Aviv, 1984.

[DI2] Bourgain J., *On the distribution of polynomials on high-dimensional convex sets*, Geometrical Aspects of Functional Analysis (1989-90), Lecture Notes in Math., vol. 1469, Springer, Berlin, 1991, pp. 127-137.

[DI3] Carbery A., Wright J., *Distributional and L^q norm inequalities for polynomials over convex bodies in $\mathbb{R}^n$*, Math. Res. Lett. **8** (2001), 233-248.

Обратное неравенство Гёльдера.

[IH1] Ullrich D., *Khinchin's inequality and the zeroes of Bloch functions*, Duke Math. J. **57** (1988), 519-535.

[IH2] Milman V., Pajor A., *Cas limites dans les inégalités du type de Khintchine et applications géométriques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math **308** (1989), no. 4, 91-96.

[IH3] Горин Е. А., Фаворов С. Ю., *Обобщения неравенства Хинчина*, Теория вероятностей и ее применения **35** (1990), 762-767.

[IH4] Favorov S., *A generalized Kahane-Khinchin inequality*, Studia Math. **130** (1998), 101-107.

[IH5] Latala R., *On the equivalence between geometric and arithmetic means for logconcave measures*, Convex Geometric Analysis (Berkeley, CA, 1996), Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 34, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, pp. 123-127.

[IH6] Guédon O., *Kahane-Khinchine type inequalities for negative exponents*, Mathematika **46** (1999), 165-173.

[IH7] Bobkov S. G., *Remarks on the growth of L^p norms of polynomials*, Geometric Aspects of Functional Analysis, Lecture Notes in Math., vol. 1745, Springer, Berlin, 2000, pp. 27–35.

Оценка Оффорда.

[OE1] Offord A. C., *The distribution of zeros of power series whose coefficients are independent random variables*, Indian J. Math. **9** (1967), 175–196.

[OE2] Sodin M., *Zeros of gaussian analytic functions*, Math. Res. Lett. **7** (2000), 371–381.

Поступило 20 мая 2001 г.

Department of Mathematics
Michigan State University
East Lansing, MI 48824
USA

E-mail: fedja@math.msu.edu

School of Mathematical Sciences
Tel Aviv University
Ramat Aviv, 69978
Israel

E-mail: sodin@post.tau.ac.il

Department of Mathematics
Michigan State University
East Lansing, MI 48824
USA

E-mail: volberg@math.msu.edu