ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1978 МАТЕМАТИКА № 2 (189)

УДК 513.838

Ю. И. Михайлов

О СТРУКТУРЕ ПОЧТИ ГРАССМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Почти грассмановы многообразия были введены в рассмотрение румынским математиком Ханганом [1] как достаточно широкое обобщение грассманова многообразия $G_{m,n}$ подпространств V_n линейного пространства V_{m+n}. В работах Хангана [1], [2] и Исихара [3] основное внимание уделяется частным видам почти грассмановых многообразий, в первую очередь—локально грассмановым. В настоящей работе методом внешних форм Картана [4] изучается общая структура почти грассманова многообразия, вводится тензор структуры типа (2, 1), выделяется класс полуголономных почти грассмановых многообразий и проводится их связь с теорией два-тканей.

1. Пусть задано гладкое многообразие N, размерность которого есть произведение двух натуральных чисел mn ($m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$). Пусть на N подвижной репер $\{y, e_{a\lambda}\}$ ($a, b, c, \ldots = 1, \ldots, m$; $\lambda, \mu, \nu, \ldots = m+1, \ldots, m+n$) перемещается в каждой точке полной линейной группой $GL(R, mn)$ преобразований

$$'e_{b\mu} = A^{a\lambda}_{b\mu} e_{a\lambda}, \quad \det(A^{a\lambda}_{b\mu}) \neq 0 \tag{1}$$

и $\{y, \omega^{a\lambda}\}$ — сопряженный подвижной корепер. На всем многообразии N множество реперов образует расслоенное многообразие N' с базой N и слоями, диффеоморфными полной линейной группе $GL(R, mn)$. Формы $\omega^{a\lambda}$ можно считать однозначно и гладко заданными на многообразии N'. Они ставят в соответствие каждому вектору, касательному к N' в точке $y' = \{y, e_{a\lambda}\}$, координаты его проекции в соответствующее касательное пространство к N относительно базиса $\{e_{a\lambda}\}$, соответствующего точке y'. Эти формы называются базисными, а их линейные комбинации — главными формами. Внешние дифференциалы этих форм имеют выражение

$$d\omega^{a\lambda} = -\omega^{a\lambda}_{b\mu} \wedge \omega^{b\mu}, \tag{2}$$

где $\omega^{a\lambda}_{b\mu}$ — линейные формы, заданные на N', которые при ограничении их на слое над фиксированной точкой $y \in N$ служат компонентами инфинитезимального перемещения репера

$$de_{b\mu} = -\omega^{a\lambda}_{b\mu} e_{a\lambda}. \tag{3}$$

Сузим многообразие N', взяв в нем подрасслоение следующим образом. Пусть на N задан гладким образом некоторый репер $\{y, e_{a\lambda}\}$,

а все другие, составляющие в совокупности с ним многообразие N'_G, получены из этого репера действием на него в каждой точке y группой G всех линейных преобразований вида

$$'\boldsymbol{e}_{b\mu} = A^a_b A^\lambda_\mu \boldsymbol{e}_{a\lambda}. \tag{4}$$

Для каждого такого преобразования матрицы A^a_b и A_μ определены неоднозначно, т. к. допускают умножение на взаимно обратные скалярные множители. Однозначность может быть достигнута, если ограничиться, напр., унимодулярными матрицами (A^a_b) или (A^λ_μ): $\det(A^a_b) = 1$ или $\det(A^\lambda_\mu) = 1$. Тогда очевидно, что

$$G = SL(R, mn) \times GL(R, n) \simeq GL(R, m) \times SL(R, n).$$

Определение. G — структура на многообразии N размерности mn с группой $G \simeq SL(R, m) \times GL(R, n)$ называется почти грассмановой, а многообразие N — почти грассмановым многообразием.

Настоящее определение эквивалентно определению Хангана, в котором группа G определяется как подгруппа группы $GL(R, mn)$ матриц $A^{a\lambda}_{b\mu}$ наложением условий $A^{a\lambda}_{b\mu} A^{c\nu}_{d\sigma} = A^{a\nu}_{b\sigma} A^{c\lambda}_{d\mu}$. Задавая группу G как подгруппу группы $GL(R, m) \times GL(R, n)$, мы в дальнейшем остановимся на условии, налагаемом на матрицы (A^a_b) и (A^λ_μ) наиболее симметрично:

$$\det(A^a_b) = |\det(A^\lambda_\mu)|. \tag{5}$$

2. Легко подсчитать, опираясь на формулы (1) и (3), что формы $\omega^{a\lambda}_{b\mu}$ при фиксации точки $y \in N$ имеют выражение

$$\omega^{a\lambda}_{b\mu} = -\widetilde{A}^{a\lambda}_{c\nu}\, dA^{c\nu}_{b\mu},$$

где $(A^{a\lambda}_{c\nu})$ — матрица, обратная к матрице $(A^{a\lambda}_{c\nu})$. Поскольку теперь $A^{a\lambda}_{b\mu} = A^a_b A^\lambda_\mu$, то

$$\omega^{a\lambda}_{b\mu} = \delta^\lambda_\mu \omega^a_b + \delta^a_b \omega^\lambda_\mu, \tag{6}$$

где формы $\omega^a_c = -\widetilde{A}^a_c\, dA^c_b$, $\omega^\lambda_\mu = -\widetilde{A}^\lambda_\nu\, dA^\nu_\mu$ могут служить компонентами инфинитезимального перемещения базисов $\{\boldsymbol{e}_b\}$ и $\{\boldsymbol{e}_\mu\}$ в линейных пространствах V_m и V_m, на которых действуют линейные группы $GL(R, m)$ и $GL(R, n)$ соответственно:

$$d\boldsymbol{e}_b = -\omega^a_b \boldsymbol{e}_a, \quad d\boldsymbol{e}_\mu = -\omega^\lambda_\mu \boldsymbol{e}_\lambda.$$

Соотношение (5) накладывает связь на формы ω^a_b и ω^λ_μ. Действительно, дифференциал определителя $A = \det(A^a_b)$ имеет выражение $dA = -A\sum_a \omega^a_a$. Соответственно для $\bar{A} = \det(A^\lambda_\mu)$ имеем $d\bar{A} = -\bar{A}\sum_a \omega^\lambda_\lambda$. Но в силу (5) имеем $dA : A = d\bar{A} : \bar{A}$, и потому

$$\sum_a \omega^a_a = \sum_\lambda \omega^\lambda_\lambda. \tag{7}$$

Поскольку при ограничении на слое $\pi^{-1} y$ (π — проекция N'_G на базу N) формы имели строение (6), то на N'_G они приобретают вид

$$\omega^{a\lambda}_{b\mu} = \delta^\lambda_\mu \omega^a_b + \delta^a_b \omega^\lambda_\mu + \overset{*}{u}{}^{a\lambda}_{b\eta,\, c\nu}\, \omega^{c\nu},$$

где ω_b^a, ω_μ^λ — формы, заданные на N_G', которые при ограничении на $\pi^{-1}y$ совпадают с ранее введенными ω_b^a и ω_μ^λ, а $\overset{*}{u}{}^{a\lambda}_{b\mu,\,b\nu}$ — некоторые функции на N_G'. Подставив это выражение в уравнения (2), получим основные структурные уравнения почти грассманова многообразия

$$d\omega^{a\lambda} = \omega_b^a \wedge \omega^{b\lambda} + \omega_\mu^\lambda \wedge \omega^{a\mu} + u^{a\lambda}_{b\mu,\,c\nu}\,\omega^{b\mu} \wedge \omega^{c\nu}, \tag{8}$$

в которых $u^{a\lambda}_{b\mu,\,c\nu}$ получены альтернированием коэффициентов $\overset{*}{u}{}^{a\lambda}_{b\mu,\,c\nu}$ по парам индексов, и потому

$$u^{a\lambda}_{b\mu,\,e\nu} = -\,u^{a\lambda}_{c\nu,\,b\mu}. \tag{9}$$

Формы ω_b^a и ω_μ^λ определены неоднозначно, т. к. уравнения (8) допускают их изменение на произвольные комбинации базисных форм. При этом преобразуются и коэффициенты $u^{a\lambda}_{b\mu,\,c\nu}$. Ограничим изменение форм ω_b^a, ω_μ^λ условиями

$$\sum_a u^{a\lambda}_{a\mu,\,c\nu} = 0, \tag{10}$$

$$\sum_\lambda u^{a\lambda}_{b\lambda,\,c\nu} = 0. \tag{11}$$

Покажем, что эти условия достижимы. Внесем в структурные уравнения (8) замену

$$'\omega_\mu^\lambda = \omega_\mu^\lambda - 2h^\lambda_{\mu,\,c\nu}\,\omega^{c\nu}.$$

Тогда коэффициенты в этих уравнениях преобразуются следующим образом:

$$'u^{a\lambda}_{b\mu,\,c\nu} = u^{a\lambda}_{b\mu,\,c\nu} - \delta_b^a\, h^\lambda_{\mu,\,c\nu} + \delta_e^a\, h^\lambda_{\nu,\,c\mu}. \tag{12}$$

Отметим, что условия (9) при этом сохранились. Потребуем для $'u^{a\lambda}_{b\mu,\,c\nu}$ выполнения условий (10) и вытекающих из них в силу (9) равенств $\sum_a {}'u^{a\lambda}_{b\mu,\,a\nu} = 0$. В результате из (12) получаем систему уравнений

$$\sum_a u^{a\lambda}_{a\mu,\,c\nu} - m h^\lambda_{\mu,\,c\nu} + h^\lambda_{\nu,\,c\mu} = 0,$$

$$\sum_a u^{a\lambda}_{b\mu,\,a\nu} - h^\lambda_{\mu,\,b\nu} + m h^\lambda_{\nu,\,b\mu} = 0,$$

которая при $b = c$ станет системой двух линейных уравнений относительно $h^\lambda_{\mu,\,c\nu}$ и $h^\lambda_{\nu,\,c\mu}$ с определителем

$$\begin{vmatrix} -m & 1 \\ -1 & m \end{vmatrix} = 1 - m^2,$$

отличным от нуля ($m \geqslant 2$). Следовательно, система имеет решение, причем единственное, и, значит, условия (10) достижимы. Далее аналогичным образом показывается, что наряду с (10) достижимы и условия (11).

При переходе от слоя $\pi^{-1}y$ к N_G' и в результате дальнейших преобразований форм ω_b^a, ω_μ^λ равенство (7) может оказаться нарушенным, т. е. $\sum_a \omega_a^a - \sum_\lambda \omega_\lambda^\lambda = \omega$ есть отличная от нуля главная форма. Тогда преобразованием

$$'\omega_b^a = \omega_b^a + \delta_b^a \frac{\omega}{m+n}, \quad '\omega_\mu^\lambda = \omega_\mu^\lambda - \delta_\mu^\lambda \frac{\omega}{m+n},$$

которое не нарушает структурных уравнений (8) и не затрагивает коэффициентов $u^{a\lambda}_{b\mu,\, c\nu}$, вновь достигается равенство (7).

Формы ω_b^a и ω_ν^λ дополняют $\omega^{a\lambda}$ до корепера форм на многообразии N_G' (при этом ввиду (7) одна из форм ω_a^a или ω_λ^λ линейно выражается через остальные и в корепер не включается). Такой корепер, несмотря на ограничения (10) и (11), обладает некоторой свободой изменения. Множество таких кореперов для всех точек $y' \in N_G'$ или, что то же самое, множество сопряженных им реперов, составит расслоенное многообразие N_G'' с базой N. Формы $\omega^{a\lambda}$, ω_b^a, ω_μ^λ можно считать заданными на этом многообразии.

3. Найдем продолжения структурных уравнений (8). При их внешнем дифференцировании получаем систему уравнений

$$\Delta\omega_b^a \wedge \omega^{b\lambda} + \Delta\omega_\mu^\lambda \wedge \omega^{a\mu} + \Delta u^{a\lambda}_{b\mu,\, c\nu} \wedge \omega^{b\mu} \wedge \omega^{c\nu} = 0, \tag{13}$$

где

$$\Delta\omega_b^a = d\omega_b^a - \omega_c^a \wedge \omega_b^c,$$

$$\Delta\omega_\mu^\lambda = d\omega_\mu^\lambda - \omega_\nu^\lambda \wedge \omega_\mu^\nu,$$

$$\Delta u^{a\lambda}_{b\mu,\, c\nu} = \nabla u^{a\lambda}_{b\mu,\, c\nu} + 2u^{a\lambda}_{f\tau,\, c\nu}\, u^{f\tau}_{d\sigma,\, b\mu}\, \omega^{d\sigma},$$

а ∇ — оператор, совпадающий по форме с оператором ковариантного дифференцирования с формами связности ω_b^a, ω_μ^λ:

$$\nabla u^{a\lambda}_{b\mu,\, c\nu} = du^{a\lambda}_{b\mu,\, c\nu} + u^{a\lambda}_{d\mu,\, c\nu}\, \omega_b^d + u^{a\lambda}_{b\mu,\, d\nu}\, \omega_c^a +$$
$$+ u^{a\lambda}_{b\sigma,\, c\nu}\, \omega_\mu^\sigma + u^{a\lambda}_{b\mu,\, c\sigma}\, \omega_\nu^\sigma - u^{d\lambda}_{b\mu,\, c\nu}\, \omega_d^a - u^{a\sigma}_{b\mu,\, c\nu}\, \omega_\sigma^\lambda.$$

Представим $\Delta\omega_b^a$, $\Delta\omega_\mu^\lambda$, $\Delta u^{a\lambda}_{b\mu,\, c\nu}$ в виде следующих разложений:

$$\Delta\omega_b^a = \Omega_b^a + \omega^a_{b,\, c\nu} \wedge \omega^{c\nu} + b^a_{b,\, c\nu,\, d\sigma}\, \omega^{c\nu} \wedge \omega^{d\sigma}, \tag{14}$$

$$\Delta\omega_\mu^\lambda = \Omega_\mu^\lambda + \omega^\lambda_{\mu,\, c\nu} \wedge \omega^{c\nu} + b^\lambda_{\mu,\, c\nu,\, d\sigma}\, \omega^{c\nu} \wedge \omega^{d\sigma}, \tag{15}$$

$$\Delta u^{a\lambda}_{b\mu,\, c\nu} = \Phi^{a\lambda}_{b\mu,\, c\nu} + u^{a\lambda}_{b\mu,\, c\nu;\, d\sigma}\, \omega^{d\sigma}, \tag{16}$$

где Ω_b^a, Ω_μ^λ — внешние квадратичные, а $\omega^a_{b,\, c\nu}$, $\omega^\lambda_{\mu,\, c\nu}$, $\Phi^{a\lambda}_{b\mu,\, c\nu}$ — линейные формы, являющиеся соответственно билинейными и линейными комбинациями форм некоторого кобазиса на N_G'', отличных от базисных форм $\omega^{a\lambda}$ (возможно, что комбинации тривиальные), коэффициенты $b^a_{b,\, c\nu,\, d\sigma}$ и $b^\lambda_{\mu,\, c\nu,\, d\sigma}$ кососимметричны по $c\nu$ и $d\sigma$. Отметим, что в силу (10) и (11) выполняются равенства

$$\sum_a \Phi^{a\lambda}_{a\mu,\, c\nu} = \sum_a \Phi^{a\lambda}_{b\mu,\, a\nu} = \sum_\lambda \Phi^{a\lambda}_{b\lambda,\, c\nu} = \sum_\lambda \Phi^{a\lambda}_{b\mu,\, c\lambda} = 0. \tag{17}$$

Кроме того, из условий (7) следует равенство

$$\sum_a \Delta\omega_a^a = \sum_\lambda \Delta\omega_\lambda^\lambda,$$

а из него — соответствующие равенства для форм и коэффициентов в разложениях (14) и (15):

$$\sum_a \Omega_a^a = \sum_\lambda \Omega_\lambda^\lambda, \tag{18}$$

$$\sum_a \omega_{a,\,l\nu}^a = \sum_\lambda \omega_{\lambda,\,l\nu}^\lambda, \tag{19}$$

$$\sum_a b_{a,\,c\nu,\,d\sigma}^a = \sum_\lambda b_{\lambda,\,c\nu,\,d\sigma}^\lambda, \tag{20}$$

Подставим разложения (14), (15), (16) в уравнения (13), приведем в нем подобные члены и перейдем к равенствам для полученных коэффициентов при $\omega^{b\mu}$, $\omega^{b\mu}\wedge\omega^{c\nu}$ и $\omega^{b\mu}\wedge\omega^{c\nu}\wedge\omega^{d\sigma}$:

$$\delta_\mu^\lambda\,\Omega_b^a + \delta_b^a\,\Omega_\mu^\lambda = 0, \tag{21}$$

$$\delta_b^a\,\omega_{\mu,\,c\nu}^\lambda - \delta_c^a\,\omega_{\nu,\,b\mu}^\lambda + \delta_\mu^\lambda\,\omega_{b,\,c\nu}^a - \delta_\nu^\lambda\,\omega_{c,\,b\mu}^a - 2\Phi_{b\mu,\,c\nu}^{a\lambda} = 0, \tag{22}$$

$$\begin{aligned}&\delta_\mu^\lambda\,b_{b,\,c\nu,\,d\sigma}^a + \delta_\nu^\lambda\,b_{c,\,d\sigma,\,b\mu}^a + \delta_\sigma^\lambda\,b_{d,\,b\mu,\,c\nu}^a +\\ &+\delta_b^a\,b_{\mu,\,c\nu,\,d\sigma}^\lambda + \delta_c^a\,b_{\nu,\,d\sigma,\,b\mu}^\lambda + \delta_d^a\,b_{\sigma,\,b\mu,\,c\nu}^\lambda +\\ &+u_{b\mu,\,c\nu;\,d\sigma}^{a\lambda} + u_{c\nu,\,d\sigma;\,b\mu}^{a\lambda} + u_{d\sigma,\,b\mu;\,c\nu}^{a\lambda} = 0.\end{aligned} \tag{23}$$

Из (21) вытекает следующее строение форм Ω_b^a, Ω_μ^λ:

$$\Omega_b^a = \delta_b^a\,\Omega, \quad \Omega_\mu^\lambda = -\,\delta_\mu^\lambda\,\Omega.$$

Учитывая это в равенстве (18), получаем $m\Omega = -n\Omega$, или $(m+n)\Omega = 0$ Отсюда $\Omega = 0$, и тогда

$$\Omega_b^a = \Omega_\mu^\lambda = 0. \tag{24}$$

Далее, уравнения (22) просуммируем по $a = b$ и отдельно по $a = c$, учитывая (17). Получаем систему линейных уравнений относительно $\omega_{\mu,\,c\nu}^\lambda$ и $\omega_{\nu,\,c\mu}^\lambda$, из которой вытекает следующее строение указанных форм:

$$\omega_{\mu,\,c\nu}^\lambda = \delta_\mu^\lambda\,\varphi_{c\nu} + \delta_\nu^\lambda\,\omega_{c\mu}. \tag{25}$$

Подставляя это выражение в (22) и применяя суммирование по $\lambda = \mu$ и $\lambda = \nu$, получаем в результате решения полученной системы выражения

$$\omega_{b,\,c\nu}^a = -\,\delta_b^a\,\varphi_{c\nu} + \delta_c^a\,\omega_{b\nu}. \tag{26}$$

Подстановка (25) и (26) снова в (22) приводит к взаимному уничтожению слагаемых, содержащих $\varphi_{c\nu}$ и $\omega_{c\nu}$, и получению равенств

$$\Phi_{b\mu,\,c\nu}^{a\lambda} = 0. \tag{27}$$

Тогда из (16) находим, что $\Delta u_{b\mu,\,c\nu}^{a\lambda}$ — главные формы, следовательно, и $\nabla u_{b\mu,\,c\nu}^{a\lambda}$ — главные формы. Это означает, что $u_{b\mu,\,c\nu}^{a\lambda}$ образуют тензор, который мы назовем тензором почти грассмановой структуры. Используем выражения (25), (26) в равенстве (19). Имеем $-m\varphi_{c\nu} + \omega_{c\nu} = n\varphi_{c\nu} + \omega_{c\nu}$, отсюда следует, что $\varphi_{c\nu} = 0$. Теперь, разрешив уравнения (14) и (15) относительно $d\omega_b^a$ и $d\omega_\mu^\lambda$, получим следующие структурные уравнения:

$$d\omega_b^a = \omega_c^a \wedge \omega_a^c + \omega_{b\mu} \wedge \omega^{a\mu} + b^a_{b,\,c\nu,\,d\sigma}\,\omega^{c\nu} \wedge \omega^{d\sigma}, \tag{28}$$

$$d\omega_\mu^\lambda = \omega_\nu^\lambda \wedge \omega_\mu^\nu + \omega_{b\mu} \wedge \omega^{b\lambda} + b^\lambda_{\mu,\,c\nu,\,d\sigma}\,\omega^{c\nu} \wedge \omega^{d\sigma}. \tag{29}$$

В них $\omega_{b\mu}$ обладают определенной свободой изменения, допуская замену

$$'\omega_{b\mu} = \omega_{b\mu} - 2h_{b\mu,\,c\nu}\,\omega^{c\nu},$$

при которой коэффициенты изменяются следующим образом:

$$'b^a_{b,\,c\nu,\,d\sigma} = b^a_{b,\,c\nu,\,d\sigma} + \delta^a_d\, h_{b\sigma,\,c\nu} - \delta^a_c\, h_{b\nu,\,d\sigma},$$

$$'b^\lambda_{\mu,\,c\nu,\,d\sigma} = b^\lambda_{\mu,\,c\nu,\,d\sigma} + \delta^\lambda_\sigma\, h_{d\mu,\,c\nu} - \delta^\lambda_\nu\, h_{c\mu,\,d\sigma}.$$

Легко убедиться, что при этом равенство (20) не нарушается. Ограничим свободу изменения форм $\omega_{b\mu}$ условиями

$$\sum_a {}'b^a_{b,\,a\nu,\,d\sigma} = 0, \quad \sum_a {}'b^a_{b,\,c\nu,\,a\sigma} = 0. \tag{30}$$

Их достижимость доказывается совершенно так же, как условий (10)—надлежащим выбором коэффициентов $h_{b\sigma,\,c\nu}$. Ввиду (23) определенные ограничения при этом наложатся и на коэффициенты $b^\lambda_{\mu,\,c\nu,\,d\sigma}$.

4. Найдем продолжения структурных уравнений (28), (29). Внешнее дифференцирование уравнений (28) дает уравнения вида

$$\Delta\omega_{b\mu} \wedge \omega^{a\mu} + \Delta b^a_{b,\,c\nu,\,d\sigma}\,\omega^{c\nu} \wedge \omega^{d\sigma} = 0, \tag{31}$$

где

$$\Delta\omega_{b\mu} = d\omega_{b\mu} - \omega_{c\mu} \wedge \omega_b^c - \omega_{b\nu} \wedge \omega_\mu^\nu, \tag{32}$$

$$\Delta b^a_{b,\,c\nu,\,d\sigma} = \nabla b^a_{b,\,c\nu,\,d\sigma} + u^{a\mu}_{c\nu,\,d\sigma}\,\omega_{b\mu} + \ldots, \tag{33}$$

а ∇ составляется по образцу ковариантного дифференциала с формами связности ω_b^a и ω_μ^λ. Многоточия в ближайших рассмотрениях означают, что пропущены некоторые комбинации базисных форм.

Представим $\Delta\omega_{b\mu}$ в виде следующих разложений:

$$\Delta\omega_{b\mu} = \Omega_{b\mu} + \Omega_{b\mu,\,c\nu} \wedge \omega^{c\nu} + \ldots,$$

где $\Omega_{b\mu}$ — квадратичные, а $\Omega_{b\mu,\,c\nu}$ — линейные формы, не зависимые от базисных (или нулевые). Подставляя их в (31), убеждаемся, что возможно лишь $\Omega_{b\mu} = 0$ и что

$$\Delta b^a_{b,\,c\nu,\,d\sigma} = \delta^a_d\,\Omega_{b\sigma,\,c\nu} - \delta^a_c\,\Omega_{b\nu,\,d\sigma}. \tag{34}$$

Из (10), (30), (33) следует, что формы $\sum_a \Delta b^a_{b,\,a\nu,\,d\sigma}$ и $\sum_a \Delta b^a_{b,\,c\nu,\,a\sigma}$ являются главными. Тогда, суммируя (34) по $a = c$ и отдельно по $a = d$, получаем

$$\Omega_{b\sigma,\,d\nu} - m\Omega_{b\nu,\,d\sigma} + \ldots = 0,$$

$$m\Omega_{b\sigma,\,c\nu} - \Omega_{b\nu,\,c\sigma} + \ldots = 0.$$

Полагая $d=c$, имеем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными $\Omega_{b\sigma, c\nu}$ и $\Omega_{b\nu, c\sigma}$ и определителем $1-m^2\neq 0$ $(m\geqslant 2)$. Поэтому система имеет единственное нулевое решение $\Omega_{b\sigma, c\nu}=0$. Получаем, что $\Delta\omega_{b\mu}$ — главные формы, и тогда из (32) следует

$$d\omega_{b\mu}=\omega_{c\mu}\wedge\omega_b^c+\omega_{b\nu}\wedge\omega_\mu^\nu+\ldots \tag{35}$$

Дифференцирование структурных уравнений (29) и (35) не накладывает новых соотношений на имеющиеся линейные формы $\omega^{a\lambda}$, ω_b^a, ω_μ^λ, $\omega_{b\mu}$ и не приводит к получению новых форм, линейно независимых от указанных. Таким образом, система структурных уравнений почти грассманова многообразия (8) замкнута при втором продолжении. Тем самым получена

Теорема. *Почти грассманова G-структура является структурой конечного типа второго порядка.*

Заметим, что аналогичная теорема для соответствующих алгебр Ли доказана Ханганом ([1], с. 521).

5. Покажем, что почти грассманово многообразие действительно является обобщением грассманова многообразия. Пусть на базис $\{e_a, e_\lambda\}$ линейного пространства V_{m+n} размерности $m+n$ действует специальная линейная группа $SL(R, m+n)$. Получаемое при этом многообразие базисов можно отождествить с самой группой $SL(R, m+n)$. Пусть θ_b^a, θ_μ^a, θ_b^λ, θ_b^a — ее инвариантные формы, служащие компонентами инфинитезимального перемещения базиса

$$de_b=-\theta_b^a e_a-\theta_b^\lambda e_\lambda,\quad de_\mu=-\theta_\mu^a e_a-\theta_\mu^\lambda e_\lambda.$$

Для этих форм имеют место уравнения

$$d\theta_B^A=\theta_C^A\wedge\theta_B^C\quad (A, B, C=1,\ldots, m+n), \tag{36}$$

$$\sum_A\theta_A^A=\sum_a\theta_a^a+\sum_\lambda\theta_\lambda^\lambda=0, \tag{37}$$

называемые структурными уравнениями группы $SL(R, m+n)$. Согласно (36) внешние дифференциалы форм θ_λ^a выражаются линейно через сами эти формы

$$d\theta_\lambda^a=\theta_b^a\wedge\theta_\lambda^b+\theta_\mu^a\wedge\theta_\lambda^\mu, \tag{38}$$

и потому система уравнений $\theta_\lambda^a=0$ вполне интегрируема. Следовательно, она задает слоение, каждый слой которого удовлетворяет условию $de_\lambda=-\theta_\lambda^\mu e_\mu$, т. е. состоит из базисов, у которых площадка $L_n(e_\lambda)$ общая. Тем самым каждому слою однозначно соответствует площадка L_n размерности n. Поэтому базу слоения можно считать многообразием площадок L_n в линейном пространстве V_{m+n}, т. е. грассмановым многообразием $G_{m,n}$. Формы θ_λ^a являются его базисными формами, а уравнения (38) — основными структурными уравнениями, все же остальные уравнения системы (36)—их продолжениями. Если сменить обозначения форм $\theta_\lambda^a\to\omega^{a\lambda}$, $\theta_b^a\to\omega_b^a$, $\theta_\lambda^\mu\to-\omega_\mu^\lambda$, то из (37) получим равенство (7):

$$\sum_a\omega_a^a=\sum_\lambda\omega_\lambda^\lambda,$$

а из (38)—уравнения

$$d\omega^{a\lambda} = \omega^a_b \wedge \omega^{b\lambda} + \omega^\lambda_\mu \wedge \omega^b_\mu ,$$

которые совпадают с основными структурными уравнениями (8) почти грассманова многообразия при $u^{a\lambda}_{b\mu,\, c\nu} = 0$. Таким образом, грассманово многообразие—наиболее простой частный случай почти грассманова многообразия.

В общем случае тензор почти грассмановой структуры однозначно распадается в сумму двух тензоров

$$u^{a\lambda}_{b\mu,\, c\nu} = \bar{u}^{a\lambda}_{b\mu,\, c\nu} + \tilde{u}^{a\lambda}_{b\mu,\, c\nu} , \tag{39}$$

причем координаты первого симметричны по латинским индексам и кососимметричны по греческим, а координаты второго наоборот:

$$\bar{u}^{a\lambda}_{b\mu,\, c\nu} = \bar{u}^{a\lambda}_{c\mu,\, b\nu} , \quad \bar{u}^{a\lambda}_{b\mu,\, c\nu} = - \bar{u}^{a\lambda}_{b\nu,\, c\mu} ,$$

$$\tilde{u}^{a\lambda}_{b\mu,\, c\nu} = - \tilde{u}^{a\lambda}_{b\mu,\, b\nu} , \quad \tilde{u}^{a\lambda}_{b\mu,\, c\nu} = \tilde{u}^{a\lambda}_{b\nu,\, c\mu} .$$

Распадение тензора $u^{a\lambda}_{b\mu,\, c\nu}$ в сумму позволяет рассмотреть важные частные классы структур, характеризуемые обращением в нуль одного из слагаемых, что и будет сделано в следующем пункте.

6. Задание G-структуры связано с заданием в касательном пространстве $T_y(N)$ в каждой точке $y \in N$ некоторой фигуры, образованной векторами репера, которая инвариантна по отношению действия группы G. Для выявления этой фигуры используем тот факт, что касательное пространство $T_y(N)$, размерность которого есть произведение натуральных чисел mn, можно представить как тензорное произведение $V_m \otimes V_n$. Для этого к каждой точке $y \in N$ присоединим линейные пространства V_m и V_n, в которых фиксированы базисы $\{e_a\}$ и $\{e_\lambda\}$, а в $T_y(N)$ остановимся на исходном репере, который гладко разнесен по многообразию N. Зададим соответствие для базисных векторов $e_a \otimes e_\lambda \leftrightarrow e_{a\lambda}$ и распространим его на остальные векторы линейных пространств $V_m \otimes V_n$ и $T_y(N)$, объявляя соответствующими векторы, имеющие соответственно равные координаты относительно своих базисов. Это соответствие является изоморфизмом линейных пространств, и поэтому будем считать $e_{a\lambda} = e_a \otimes e_\lambda$. Тогда любой другой базис $\{'e_{b\mu}\}$, получаемый действием на исходный базис действием преобразования из группы G, имеет вид $'e_{b\mu} = A^a_b A^\lambda_\mu (e_a \otimes e_\lambda) = 'e_b \otimes 'e_\mu$, где $'e_\mu = A^\lambda_\mu e_\lambda$, $'e_b = A^a_b e_a$, т. е. множество базисов $\{'e_{b\mu}\}$ над точкой y получается как множество базисов вида $\{'e_b \otimes 'e_\mu\}$, где $'e_b$ и $'e_\mu$ — векторы базисов в V_m и V_n, перемещаемых преобразованиями из полных линейных групп $GL(R, m)$ и $GL(R, n)$, согласованными между собой условием (5). Это ограничение не сужает множества базисов $\{'e_b \otimes 'e_\mu\}$, а только делает их получение однозначным, что для нас сейчас несущественно. Поэтому условие (5) можно здесь не принимать во внимание. Множество векторов $'e_{b\mu} = 'e_b \otimes 'e_\mu$ (штрихи в дальнейшем опустим) заполняют в $T_y(N)$ некоторый конус K. Заметим, что поскольку каждый вектор e_b, где b фиксировано, при действии на базис $\{e\}_a$ полной линейной группы $GL(R, m)$ пробегает все ненулевые значения в пространстве V_m, то множество векторов $e_b \otimes e_\mu$ не будет сужено, если индекс b фиксировать на каком-либо значении от 1 до m,

То же самое можно сказать и о индексе μ, считая его фиксированным на любом значении от $m+1$ до $m+n$. Пусть вектор e_b фиксирован, а e_μ подвергается вместе с репером $\{e_\lambda\}$ действию группы $GL(R, m)$. При этом e_μ исчерпывает собой пространство $V_m \setminus 0$, и тогда $e_b \otimes e_\mu$ заполняют в $T_y(N)$ n-мерную площадку. Фиксируя e_b на другом направлении, получаем другую n-мерную площадку и т. д. Таким образом, все множество векторов $e_b \otimes e_\mu$, заполняющих собой конус K, будет расслоено на площадки L_n, т. е. конус имеет систему n-мерных образующих. Меняя ролями греческие и латинские индексы, получим, что тот же конус K имеет систему m-мерных образующих площадок L_m. Имея в виду, что эти рассуждения проведены для каждой точки $y \in N$, получаем следующее утверждение: почти грассманова G-структура порождает над N расслоенное многообразие $\bar{M}$ касательных площадок размерности n, каждый слой которого образует в $T_y(N)$ конус K, и аналогичное расслоенное многообразие $\tilde{M}$ над N касательных к N m-мерных площадок L_m.

Среди почти грассмановых структур представляют особый интерес те, для которых одно из многообразий $\bar{M}$ или $\tilde{M}$ голономно. Голономность многообразия $\bar{M}$ площадок L_n означает, что на N существует семейство поверхностей размерности n, каждой своей точкой касающихся соответствующей площадки L_n, причем каждая площадка будет касаться одной из таких поверхностей. Почти грассманову структуру назовем полуголономной, если одно из многообразий $\bar{M}$ или $\tilde{M}$ голономно, и голономной, если голономны оба многообразия.

Если многообразие $\bar{M}$ голономно, то оно дважды расслоено. Первое расслоение — исходное; оно состоит из слоев над точками $y \in N$, и каждый слой составляет конус K. Второе расслоение, порожденное голономностью $\bar{M}$, имеет слоем множество площадок, касающихся одной и той же огибающей поверхности. Назовем его голономным расслоением многообразия $\bar{M}$.

Каждую n-мерную площадку $L_n \in \bar{M}$ можно задать как множество всех векторов $e_{1\mu} = e_1 \otimes e_\mu$, в которых направление вектора e_1 фиксировано, а e_μ принимает все ненулевые значения из V_n, т. е. каждая площадка L_n однозначно определяется направлением вектора e_1 в V_n. Тогда многообразие $\bar{M}$ можно получить как фактор-пространство многообразия N'_G по слоям, составленным из реперов, у которых фиксированы точка $y \in N$ и направление вектора e_1. Точка y фиксируется условиями $\omega^{a\lambda} = 0$, а направление вектора e_1 —условиями $\omega^i_1 = 0$ $(i, j, k, \ldots = 2, \ldots, m)$, т. к. при этом уравнение $de_1 = \omega^1_1 e_1 + \omega^i_1 e_i$ превращается в $de_1 = \omega^1_1 e_1$. Таким образом, $\bar{M}$ есть база расслоения в N'_G, задаваемого вполне интегрируемой системой уравнений $\omega^{1\lambda} = 0$, $\omega^{i\lambda} = 0$, $\omega^i_1 = 0$. Выражения дифференциалов форм $\omega^{1\lambda}$, $\omega^{i\lambda}$, ω^i_1 составляют основные структурные уравнения этого многообразия. Ими являются все уравнения (8) и уравнения (28), взятые при $a = i$, $b = 1$:

$$d\omega^i_1 = \omega^i_1 \wedge \omega^1_1 + \omega^i_k \wedge \omega^k_1 + \omega_{1\mu} \wedge \omega^{i\mu} + b^i_{1,\,1\mu,\,1\nu}\omega^{1\mu} \wedge \omega^{1\nu} + \\ + 2b^i_{1,\,k\mu,\,1\nu}\omega^{k\mu} \wedge \omega^{1\nu} + b^i_{1,\,k\mu,\,l\nu}\omega^{k\mu} \wedge \omega^{l\nu}, \tag{40}$$

$$d\omega^{1\lambda} = \omega^{\lambda}_{\mu} \wedge \omega^{1\mu} + \omega^{1}_{k} \wedge \omega^{k\lambda} + \omega^{1}_{1} \wedge \omega^{1\lambda} + u^{1\lambda}_{1\mu,\,1\nu}\, \omega^{1\mu} \wedge \omega^{1\nu} +$$
$$+ 2u^{1\lambda}_{k\mu,\,1\nu}\, \omega^{k\mu} \wedge \omega^{1\nu} + u^{1\lambda}_{k\mu,\,l\nu}\, \omega^{k\mu} \wedge \omega^{l\nu}, \tag{41}$$

$$d\omega^{i\lambda} = \omega^{i}_{k} \wedge \omega^{k\lambda} + \omega^{\lambda}_{\mu} \wedge \omega^{i\mu} + \omega^{i}_{1} \wedge \omega^{1\lambda} + u^{i\lambda}_{1\mu,\,1\nu}\, \omega^{1\mu} \wedge \omega^{1\nu} +$$
$$+ 2u^{i\lambda}_{k\mu,\,1\nu}\, \omega^{k\mu} \wedge \omega^{1\nu} + u^{i\lambda}_{k\mu,\,l\nu}\, \omega^{k\mu} \wedge \omega^{l\nu}. \tag{42}$$

Перейдем к рассмотрению условий голономности многообразия $\bar{M}$.

Теорема. *Для того, чтобы многообразие $\bar{M}$ было голономным, необходимо и достаточно, чтобы система уравнений*

$$\omega^{i}_{1} = 0, \quad \omega^{i\lambda} = 0 \tag{43}$$

была вполне интегрируемой.

Начнем с доказательства достаточности этих условий. Полная интегрируемость системы (43) обеспечивает наличие расслоения многообразия $\bar{M}$. Каждый его слой состоит из площадок L_n, точки касания которых с многообразием N образуют поверхность, удовлетворяющую согласно (43) системе уравнений $\omega^{\lambda} = 0$. Размерность этой поверхности определяется числом базисных форм $\omega^{a\lambda}$, оставшихся на ней линейно независимыми. Таковыми являются формы $\omega^{1\lambda}$ ($\lambda = m+1, \ldots, m+n$) и, следовательно, размерность поверхности равна n. Условия $\omega^{i}_{1} = 0$, как мы убедились ранее, фиксируют площадку $L_n \in \bar{M}$, касающуюся фиксированной точки $y \in N$. Таким образом, указанный слой состоит из площадок, взятых по одной для каждой точки поверхности, удовлетворяющей условиям $\omega^{i\lambda} = 0$. Эти уравнения предписывают вектору смещения по поверхности $X = \omega^{i\lambda} e_{i\lambda} + \omega^{i\lambda} e_{1\lambda}$ иметь только составляющую $\omega^{1\lambda} e_{1\lambda}$, т. е. принадлежать площадке L_n. Это означает, что указанная поверхность является огибающей для выбранного слоя площадок. Таким образом, система (43) задает голономное расслоение в $\bar{M}$, т. е. $\bar{M}$ голономно. Нетрудно провести рассуждения в обратном порядке, показав, что если $\bar{M}$ голономно, то голономное расслоение задается вполне интегрируемой системой (43).

Судя по структурным уравнениям (40) и (42), система (43), вообще говоря, не является вполне интегрируемой, а становится таковой для почти грассмановых структур, у которых

$$b^{l}_{1,\,1\mu,\,1\nu} = 0, \quad u^{i\lambda}_{1\mu,\,1\nu} = 0 \tag{44}$$

во всех системах координат. Остановимся на вторых условиях. Из них следует $du^{i\lambda}_{1\mu,\,1\nu} = 0$, где дифференцирование ведется вдоль слоя в $\bar{M}$ над точкой $y \in N$. Внесение последних равенств и (44) в уравнения (16) приводит к очередным условиям

$$u^{1\lambda}_{1\mu,\,1\nu} = 0, \quad \bar{u}^{i\lambda}_{k\mu,\,1\nu} = 0.$$

Повторяя для них такие же рассмотрения, получаем в свою очередь

$$\bar{u}^{1\lambda}_{i\mu,\,1\nu} = \bar{u}^{i\lambda}_{k\mu,\,l\nu} = 0.$$

Объединяя все полученные равенства с исходными, приходим к окончательному требованию

$$\bar{u}^{a\lambda}_{b\mu,\,c\nu} = 0, \tag{45}$$

Обратимся теперь к первым равенствам из (44). При $n > 2$ они являются следствиями (45). Действительно, при выполнении (45) коэффициенты $u^{i\lambda}_{1\mu,\,1\nu,\,1\sigma}$, входящие в формулы (16), окажутся нулями и равенства (23) для соответствующих значений индексов приобретут вид

$$\delta^\lambda_\mu\, b^i_{1,\,1\nu,\,1\sigma} + \delta^\lambda_\nu\, b^i_{1,\,1\sigma,\,1\mu} + \delta^\lambda_\sigma\, b^i_{1,\,1\mu,\,1\nu} = 0. \tag{46}$$

Пусть $\lambda = \mu$, $\lambda \neq \nu$, $\lambda \neq \sigma$ (при $n > 2$ такой выбор возможен для любых ν и σ). Получаем

$$b^i_{1,\,1\nu,\,1\sigma} = 0.$$

Для случая $n = 2$ равенства $b^i_{1,\,1\nu,\,1\sigma} = 0$ не вытекают из (45) и требуют определенного строения коэффициентов $b^a_{b,\,c\nu,\,d\sigma}$.

Подводя итог в исследовании условий голономности многообразия $\overline{M}$, получаем следующую теорему.

Теорема. *Почти грассманова полуголономная структура на многообразии N размерности mn (с голономностью многообразия $\overline{M}$) определяется обращением в нуль тензора $\overline{u}^{a\lambda}_{b\mu,\,c\nu}$ для всех $m \geqslant 2$, $n > 2$ (при $n = 2$ это условие является только необходимым). Аналогичное утверждение справедливо по отношению многообразия $\widetilde{M}$ и тензора $\widetilde{u}^{a\lambda}_{b\mu,\,e\nu}$.*

Почти грассманова голономная структура определяется обращением в нуль тензора $u^{a\lambda}_{b\mu,\,c\nu}$.

В работе [7] при изучении широкого класса два-тканей типа $T^{(m-1)\,n}_{m-1,\,n}$ мы приходим к структурным уравнениям, совпадающим с (40)—(42), если в них внести условие голономности многообразия $\overline{M}$. Таким образом, почти грассманово полуголономное многообразие служит для интерпретации определенного класса тканей, изученных сначала независимо от него. При этом голономному почти грассманову многообразию соответствует так называемая флаговая два-ткань (см. [8]). Из рассмотрения ее структурных уравнений следует, что это многообразие является локально грассмановым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hangan Th. Géometrie différentielle grassmannienne par Th Hangan. Rev. roum. math. pures et appl. 1967, v. 11, № 5, p. 519—531.

2. Hangan Th. Tensor—product tangent bundles. Arch. Math., 1969, Bd. 19, № 4, S. 436—440.

3. Ishihara Torû. On tensorproduct structures and Grassmannian structures. J. Math. Tokushima Univ., 1972, № 4, p. 1—17.

4. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Теория совместимости систем дифференциальных уравнений в полных дифференциалах и частных производных. М.—Л., Гостехиздат, 1948.

5. Васильев А. М. Общие инвариантные методы в дифференциальной геометрии. ДАН СССР, т. 79, № 1, 1951, с. 5—7.

6. Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. Тр. Моск. матем. о-ва, т. 2, 1953, с. 275—382.

7. Михайлов Ю. К. О многомерных два-тканях типа $T^{mn}_{m,\,n}$. Тезисы докл. V Всесоюзн. конф. по современным проблемам геометрии, Самарканд, 1972, с. 141.

8. Михайлов Ю. И. Об одном классе многомерных два-тканей. Изв. вузов. Матем., 1975, № 7, с. 64—75.

г. Балашов

Поступила
21 IV 1975