УДК 514.763.347

ПОДМНОГООБРАЗИЯ В ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЯХ, НАДЕЛЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ СТРУКТУРАМИ. II. ПОДМНОГООБРАЗИЯ КОРАЗМЕРНОСТИ 2 В КОНТАКТНОМ И ПОЧТИ КОНТАКТНОМ МНОГООБРАЗИЯХ

Н. М. Остиану, Р. Ф. Домбровский, Н. Д. Поляков

ВВЕДЕНИЕ

Статья является продолжением работы, опубликованной в т. 11 сборника «Проблемы геометрии» [10].

Геометрия подмногообразий коразмерности 2 в контактном и почти контактном многообразиях, в некоторой степени, обладает спецификой. В связи с этим, в начатой в [10] серии работ, авторы сочли целесообразным остановиться на исследовании таких подмногообразий.

Если принять в качестве критерия классификации M_{n-1} в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ расположение $T_x(M_{n-1})$ относительно подпространств, определяемых в каждой точке $x \in M_{n-1}$, структурными объектами η и ξ, то выделяются 3 типа поверхностей.

В большинстве работ, опубликованных по этой теме, подмногообразие M_{n-1} в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ оснащается парой полей единичных взаимно ортогональных векторов, натягивающих в каждой точке подмногообразия ортогонально оснащающую плоскость.

Исследование многообразий M_{n-1} в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$, оснащенных произвольными нормально оснащающими полями двумерных плоскостей, остается в стороне. Для более полного исследования геометрии этих подмногообразий естественно при классификации учитывать и расположение относительно η и ξ нормально оснащающих подпространств.

В § 1 настоящей работы авторы преследовали цель осветить с более общих позиций некоторые классические вопросы дифференциальной геометрии подмногообразий, изложив их с помощью теории полей геометрических объектов. В § 2 проведена классификация индуцированных структур на M_{n-1} в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$. В § 3 систематизированы индуцированные структуры на M_{n-1} в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ и, с применением метода, изложенного в § 1, описаны исследования по теории вложения подмногообразий коразмерности 2 в многообразия метрических контактной и почти контактной структур и их подклассов.

На протяжении всего изложения индексы будут пробегать следующие значения:

$$I, J, K, \ldots = 1, \ldots, n+1;\ i, j, k, \ldots = 1, \ldots, m;$$
$$\alpha, \beta, \ldots = m+1, \ldots, n+1;\ A, B, \ldots = m+1, \ldots, n+1, n+2.$$

§ 1. ПОДМНОГООБРАЗИЕ M_m В МНОГООБРАЗИИ M_{n+1} СО СВЯЗНОСТЬЮ

1. Введение. Пусть M_{n+1} — нечетномерное дифференцируемое многообразие класса C^∞. Рассмотрим некоторую окрестность $U \subset M_{n+1}$ произвольной точки x_0. Текущую точку в этой окрестности будем обозначать x. Через $T^s(M_{n+1})$ обозначим касательное расслоение порядка s над окрестностью U, а через $T_x^s(M_{n+1})$, где $x \in U$ (и, следовательно $x \in M_{n+1}$) — слой этого расслоения, соответствующий точке $x \in M_{n+1}$, т. е. касательное пространство порядка s к M_{n+1} в точке x.

Будем считать, что над M_{n+1} введено расслоение реперов $R^s(M_{n+1}) = \bigcup\limits_{x \in M_{n+1}} R^s(M_{n+1})$, где $R_x^s(M_{n+1})$ — множество всех реперов в точке $x \in M_{n+1}$ с базисными векторами $\underset{x}{\vec{e}_J}, \underset{x}{\vec{e}_{J_1 J_2}}, \ldots, \underset{x}{\vec{e}_{J_1 \ldots J_s}}$.

Как известно [5], над окрестностью $U \subset M_{n+1}$ можно ввести n линейных линейно независимых дифференциальных форм (структурные формы многообразия M_{n+1}):

$$\omega^J = x_K^J dx^K, \tag{1.1}$$

уравнения структуры которых имеют вид:

$$d\omega^J = \omega^K \wedge \omega_K^J. \tag{1.2}$$

При последовательных продолжениях системы (1.2) над U возникает последовательность линейных дифференциальных форм [5]:

$$\omega_K^J, \ldots, \omega_{K_1 \ldots K_s}^J, \ldots, \tag{1.3}$$

удовлетворяющих структурным уравнениям вида:

$$d\omega_{K_1 \ldots K_p}^J = \sum_{s=1}^{p} \frac{1}{s!\,(p-s)!}\, \omega_{(K_1 \ldots K_s}^L \wedge \omega_{K_{s+1} \ldots K_p)L}^J + \omega^L \wedge \omega_{K_1 \ldots K_s L}^J \tag{1.4}$$

и, следовательно, имеющих расслоенную структуру относительно форм ω^J.

При фиксации точки $x \in M_{n+1}$ формы ω^J обращаются в нуль, а $\overline{\omega}^J_K$, $\overline{\omega}^J_{K_1K_2}, \ldots, \overline{\omega}^J_{K_1\ldots K_s}$ становятся инвариантными формами линейной группы, которую, следуя Г. Ф. Лаптеву [5], мы называем дифференциальной группой порядка s и обозначаем D^s_{n+1}.

В касательном пространстве $T_x{}^s(M_{n+1})$ порядка s группа D^s_{n+1} представлена как группа преобразований репера $\{\underset{x}{\vec{e}}_J, \ldots$ $\ldots, \underset{x}{\vec{e}}_{J_1\ldots J_s}\}$.

В частности, группа D^1_{n+1} с инвариантными формами $\overline{\omega}^J_K$ представлена в слоях касательного расслоения первого порядка, которое мы будем обозначать $T(M_{n+1})$, как группа преобразований локального векторного репера $\underset{x}{\vec{e}}_J$: $\delta\underset{x}{\vec{e}}_J = \overline{\omega}^K_J\underset{x}{\vec{e}}_K$.

Дифференциальной структурой [11], [9], наиболее существенной для построения геометрии многообразия M_{n+1} и подмногообразий M_m, заданных в нем, является связность.

Как известно [4], необходимым и достаточным условием введения связности первого порядка в многообразие M_{n+1} (т. е. связности в касательном расслоении $T(M_{n+1})$) является задание на M_{n+1} поля геометрического объекта $\Gamma = \{\Gamma^I_{JK}\}$ такого, что

$$d\Gamma^I_{JK} - \Gamma^I_{LK}\omega^L_J - \Gamma^I_{JL}\omega^L_K + \Gamma^L_{JK}\omega^I_L + \omega^I_{JK} - \Gamma^M_{JK}\Gamma^I_{ML}\omega^L = \Gamma^I_{JKL}\omega^L. \quad (1.5)$$

При этом формы $\tilde{\omega}^I_K$, получаемые при помощи преобразования:

$$\tilde{\omega}^I_K = \omega^I_K - \Gamma^I_{KL}\omega^L, \quad (1.6)$$

удовлетворяют условиям теоремы Картана—Лаптева [11] и, следовательно, являются формами связности Г. Формы $\tilde{\omega}^I_K$ определяют инфинитезимальные отображения локальных пространств $T_{x+dx}(M_{n+1})$ на $T_x(M_{n+1})$. Поэтому в равной мере в литературе применяется как понятие связность первого порядка на M_{n+1}, так и связность в касательном расслоении $T(M_{n+1})$.

На M_{n+1}, оснащенном дифференциально-геометрическими структурами некоторых типов, связность возникает естественным образом, т. е. компоненты объекта Г определяются как функции компонент структурных объектов и продолженных структурных объектов.

Так, риманова связность возникает на M_{n+1} при задании на нем поля объекта G типа (0, 2), линейная связность Г возникает на M_{n+1} почти контактной структуры [13] при задании поля A^{n+1}_{ij} (i, $j = 1, \ldots, m$) и др. (см., например, [1], [6]).

Нужно отметить, что специальное исследование типов структур, задание которых позволяет присоединить к M_{n+1} ими индуцированную связность, не проводилось.

2. M_m в многообразии M_{n+1} со связностью. Погруженным m-мерным многообразием или m-мерным подмногообразием многообразия M_{n+1} будем называть отображение f окрестности u m-мерного дифференцируемого многообразия S_m в окрестность $U \subset M_{n+1}$, удовлетворяющее надлежащим условиям (см., например, [10], § 2). Образ $f(S_m)$ будем обозначать M_m. Этому отображению соответствует гладкое отображение $df: T(S_m) \to T(M_{n+1})$.

Обозначим структурные формы многообразия S_m (многообразия параметров) $\theta^i (i=1, \ldots, m)$. Над окрестностью $u \subset S_m$ возникает последовательность форм $\theta_j^i, \ldots, \theta^i_{j_1 \ldots j_k}$, удовлетворяющих структурным уравнениям вида (1.4).

Отображение df можно записать следующим образом:

$$\omega^J = \overset{\circ}{\Lambda}{}^J_i \theta^i. \tag{1.7}$$

Функции $\overset{\circ}{\Lambda}{}^J_i$ в каждой точке $x \in M_m$, как известно, образуют фундаментальный объект первого порядка подмногообразия M_m. Дифференциальные уравнения поля этого объекта имеют вид:

$$d\Lambda^J_i - \Lambda^J_k \theta_i{}^k + \Lambda^K_i \omega^J_K = \Lambda^J_{ik} \theta^k. \tag{1.8}$$

В дальнейшем, так как мы предполагаем излагать локальную теорию, говоря о дифференцируемом многообразии, мы будем подразумевать окрестность некоторой точки этого многообразия.

3. Объект, определяющий нормально оснащающее поле на M_m. В каждой точке $x \in M_m$ касательное пространство $T_x(M_m)$ определяется векторами $\vec{\Lambda}_i$:

$$\vec{\Lambda}_i = \Lambda^K_i \vec{e}_K. \tag{1.9}$$

Группа $D_m{}^1$ с инвариантными формами $\overline{\theta}_j{}^i = \theta_j{}^i|_{\theta^i=0}$ представлена в каждом касательном пространстве как группа преобразований этого векторного репера $\vec{\Lambda}_i$:

$$\delta\vec{\Lambda}_i = \overline{\theta}_i{}^k \vec{\Lambda}_k. \tag{1.10}$$

При надлежащей нумерации векторов $\vec{\Lambda}_i$, можно считать, что $|\Lambda_i{}^k| \neq 0$, и ввести величины $A_k{}^i$ такие, что

$$A_k{}^i \Lambda_i{}^j = \delta_k{}^j. \tag{1.11}$$

При этом из (1.9) получаем

$$\vec{e}_k = A_k{}^i \vec{\Lambda}_i - h^\alpha_k \vec{e}_\alpha, \tag{1.12}$$

где

$$h^\alpha_k \overset{\text{def}}{=} A_k{}^i \Lambda^\alpha_i. \tag{1.13}$$

Используя дифференциальные уравнения репера $\vec{e}_J$:

$$\delta\vec{e}_J = \overline{\omega}_J^K \vec{e}_K \tag{1.14}$$

и равенства (1.10), находим

$$dA_j{}^l + A_j{}^l\theta_l{}^l - A_k{}^l\omega_j{}^k - A_k{}^l h_j^\beta\omega_\beta^k = A_{jk}^l\theta^k, \tag{1.15}$$

$$dh_j^\alpha + h_j^\beta\omega_\beta^\alpha - h_k^\alpha\omega_j{}^k + \omega_j^\alpha - h_j^\beta h_k^\alpha\omega_\beta^k = h_{jk}^\alpha\theta^k. \tag{1.16}$$

Уравнения (1.16) можно записать следующим образом

$$dh_j^\alpha - h_k^\alpha\vartheta_j{}^k + h_j^\beta\omega_\beta^\alpha + \omega_j^\alpha = h_{jk}^\alpha\theta^k, \tag{1.17}$$

где

$$\vartheta_j{}^k \overset{\text{def}}{=} \omega_j{}^k + h_j^\beta\omega_\beta^k \tag{1.18}$$

и

$$d\vartheta_j{}^k = \vartheta_j{}^l \wedge \vartheta_l{}^k + \theta^l \wedge \vartheta_{jl}^k, \tag{1.19}$$

причем

$$\vartheta_{jl}^k = \omega_{jl}^k + h_{jl}^\beta\omega_\beta^k + h_j^\beta\omega_{\beta l}^k. \tag{1.20}$$

Следовательно, формы $\vartheta_j{}^k$ имеют расслоенную структуру относительно базовых форм θ^l. В каждой касательной плоскости $T_x(M_m)$ группа с инвариантными формами $\overline{\vartheta}_j{}^k = \vartheta_j{}^k|_{\theta^k=0}$ представлена как группа преобразований системы m линейно независимых векторов

$$\vec{h}_l = A_l{}^k\vec{\Lambda}_k = \vec{e}_l + h_l^\alpha\vec{e}_\alpha, \tag{1.21}$$

так как $\delta\vec{h}_l = \overline{\vartheta}_l{}^k\vec{h}_k$.

Введем теперь систему $(n+1-m)$ линейно независимых векторов $\vec{v}_\alpha$:

$$\vec{v}_\alpha = v_\alpha^K\vec{e}_K, \tag{1.22}$$

натягивающих в каждой точке $x \in M_m$ инвариантную относительно преобразований репера $\vec{e}_J$ $(n+1-m)$-мерную нормально оснащающую плоскость $N_x(M_m)$. Следовательно, должно выполняться условие

$$\delta\vec{v}_\alpha = \overline{\theta}_\alpha^\beta\vec{v}_\beta, \tag{1.23}$$

где формы $\overline{\theta}_\alpha^\beta$ являются инвариантными формами некоторой группы $Gl(n+1-m, R)$.

Вводя репер $\{\vec{h}_l, \vec{e}_\beta\}$, с помощью разложения (1.21) запишем разложение (1.22) следующим образом:

$$\vec{v}_\alpha = v_\alpha^k\vec{h}_k + (v_\alpha^\beta - h_k^\beta v_\alpha^k)\vec{e}_\beta, \tag{1.24}$$

где $|\nu_\alpha^\beta - h_k^\beta \nu_\alpha^k| \neq 0$.

Введем теперь величины $\overset{*}{K}{}_\alpha^\beta$ такие, что:

$$\overset{*}{K}{}_\gamma^\alpha (\nu_\alpha^\beta - h_k^\beta \nu_\alpha^k) = \delta_\gamma^\beta \tag{1.25}$$

и новую систему линейно-независимых векторов $\vec{N}_\alpha$ такую, что

$$\vec{N}_\alpha \overset{\text{def}}{=} \overset{*}{K}{}_\alpha^\beta \vec{\nu}_\beta = N_\alpha^k \vec{h}_k + \vec{e}_\alpha, \tag{1.26}$$

где

$$N_\alpha^k \overset{\text{def}}{=} \overset{*}{K}{}_\alpha^\gamma \nu_\gamma^k. \tag{1.27}$$

Переходя опять к реперу $\{\vec{e}_J\}$, получим следующее разложение:

$$\vec{N}_\alpha = N_\alpha^k \vec{e}_k + (\delta_\alpha^\beta + N_\alpha^k h_k^\beta) \vec{e}_\beta. \tag{1.28}$$

Итак, координатами разложения векторов $\vec{N}_\alpha$ по векторам репера $\vec{e}_J$ являются величины:

$$N_\alpha^J = \begin{cases} N_\alpha^k & \text{при } J = k, \\ \delta_\alpha^\beta + N_\alpha^k h_k^\beta & \text{при } J = \beta, \end{cases} \tag{1.29}$$

т. е.

$$\vec{N}_\alpha = N_\alpha^J \vec{e}_J. \tag{1.30}$$

Дифференциальные уравнения поля нормально оснащающих плоскостей, определенных векторами $\vec{\nu}_\alpha$, имеют следующий вид:

$$d\nu_\alpha^J - \nu_\beta^J \theta_\alpha^\beta + \nu_\alpha^K \omega_K^J = \nu_{\alpha k}^J \theta^k. \tag{1.31}$$

Из уравнений (1.24) с учетом (1.25) следует, что:

$$\vec{e}_\alpha = \overset{*}{K}{}_\alpha^\beta \vec{\nu}_\beta - N_\alpha^k \vec{h}_k. \tag{1.32}$$

Используя уравнения (1.14) и (1.16), находим:

$$d\overset{*}{K}{}_\alpha^\gamma + \overset{*}{K}{}_\alpha^\beta \theta_\beta^\gamma - \overset{*}{K}{}_\beta^\gamma \omega_\alpha^\beta + h_l^\beta \overset{*}{K}{}_\beta^\gamma \omega_\alpha^l = \overset{*}{K}{}_{\alpha k}^\gamma \theta^k, \tag{1.33}$$

$$dN_\alpha^k + N_\alpha^l \vartheta_l{}^k - N_\beta^k \vartheta_\alpha^\beta + \omega_\alpha^k = N_{\alpha l}^k \theta^l, \tag{1.34}$$

где

$$\vartheta_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\beta - h_l^\beta \omega_\alpha^l, \tag{1.35}$$

и

$$d\vartheta_\alpha^\beta = \vartheta_\alpha^\gamma \wedge \vartheta_\gamma^\beta + \theta^k \wedge \vartheta_{\alpha k}^\beta. \tag{1.36}$$

Учитывая (1.26) и используя уравнения (1.33), (1.34), устанавливаем, что в каждой точке $x \in M_m$:

$$\delta\vec{N}_\alpha = \overline{\vartheta}_\alpha^\beta \vec{N}_\beta,$$

т. е. группа $Gl(n+1-m, R)$ с инвариантными формами $\overline{\vartheta}_\alpha^\beta$, представлена как группа преобразований векторов репера $\vec{N}_\alpha$.

Теперь, используя (1.34) и (1.17), находим дифференциальные уравнения для компонент $N_\alpha^\beta \overset{\text{def}}{=} \delta_\alpha^\beta + N_\alpha^k h_k^\beta$ (см. (1.29)):

$$dN_\alpha^\beta - N_\gamma^\beta \vartheta_\alpha^\gamma + N_\alpha^\gamma \vartheta_\gamma^\beta + h_k^\beta N_\alpha^\gamma \omega_\gamma^k + N_\alpha^k \omega_k^\beta = N_{\alpha k}^\beta \theta^k. \qquad (1.37)$$

Непосредственной проверкой устанавливаем, что уравнения (1.34), (1.37) допускают следующую объединенную запись

$$dN_\alpha^J - N_\beta^J \vartheta_\alpha^\beta + N_\alpha^K \omega_K^J = N_{\alpha k}^J \theta^k, \qquad (1.38)$$

т. е. уравнения (1.38) имеют вид, аналогичный (1.31).

Следовательно, нормально оснащающая плоскость N_x, определенная векторами $\vec{N}_\alpha$ (1.26), инвариантна относительно допустимых преобразований векторов репера $\{\vec{e}_J\}$.

Итак, инвариантное нормально оснащающее поле, элементы которого определены в каждой точке $x \in M_m$ векторами (1.26), задается уравнениями (1.34), (1.37), а компоненты геометрического объекта, порождающего это поле, имеют строение (1.29).

4. Тангенциальная и нормальная связности на M_m в M_{n+1} со связностью. При исследовании подмногообразий M_m в M_{n+1} чаще всего задают на M_{n+1} некоторую связность Г. Однако наличие связности Г на M_{n+1} не является достаточным для того, чтобы в касательном расслоении $T(M_m)$ возникла связность.

Внесение связности в расслоение $T(M_m)$ является отдельной задачей.

Будем считать, что на M_{n+1} задана линейная связность первого порядка Г.

Линейную связность в касательном расслоении $T(M_m)$ будем называть тангенциальной связностью.

Необходимым и достаточным условием естественного возникновения тангенциальной связности на подмногообразии M_m многообразия M_{n+1} со связностью Г является задание на M_m инвариантного нормально оснащающего поля $N(M_m)$ или нормального расслоения, т. е. поля $(n+1-m)$-мерных линейных элементов $N_x(M_m)$, дополняющих $T_x(M_m)$ в каждой точке $x \in M_m$ до $T_x(M_{n+1})$. Такое поле определяется уравнениями вида (1.31).

Изучению возможности внесения тангенциальной связности, внутренне присоединенной к M_m, посвящены многочисленные работы (см. [10]).

Связность в нормальном расслоении $N(M_m)$ будем называть нормальной связностью. Она возникает естественным образом в любом нормальном расслоении подмногообразия M_m многообразия M_{n+1} со связностью.

Специальными типами тангенциальной и нормальной связности являются, соответственно, индуцированная связность $\overset{\circ}{\gamma}$ (см. [7]) и внешняя связность $\overset{*}{\gamma}$ (по терминологии А. П. Нордена (см. [7])) или вертикальная (по терминологии Яно (см. [28])).

Остановимся на построении объектов $\overset{\circ}{\gamma}=\{\overset{\circ}{\gamma}{}^{i}_{jk}\}$ и $\overset{*}{\gamma}=\{\overset{*}{\gamma}{}^{\alpha}_{\beta k}\}$ индуцированной и вертикальной связностей.

Пусть связность Γ, заданная на M_{n+1}, определена полем объекта $\{\Gamma^I_{JK}\}$ (1.5).

На подмногообразии M_m, заданном системой уравнений (1.7), преобразование (1.6) принимает вид:

$$\tilde{\omega}^I_J=\omega^I_J-\Gamma^I_{Jk}\theta^k, \tag{1.39}$$

где

$$\Gamma^I_{Jk}\overset{\mathrm{def}}{=}\Gamma^I_{JK}\Lambda^K_k. \tag{1.40}$$

Объект $\{\Lambda^I_k, \Gamma^I_{Jk}\}$ будем называть ограничением объекта связности Γ на подмногообразии M_m. Поле этого объекта на M_m определяется системой дифференциальных уравнений (1.8) и

$$d\Gamma^I_{Jk}-\Gamma^I_{Lk}\omega^L_J+\Gamma^L_{Jk}\omega^I_L-\Gamma^I_{Jl}\theta_k{}^l+\Lambda^L_k\omega^I_{JL}-\Gamma^L_{Jk}\Gamma^I_{Ll}\theta^l=\Gamma^I_{Jkl}\theta^l. \tag{1.41}$$

Введем формы $\tilde{\theta}_k{}^i$, определенные преобразованием:

$$\tilde{\theta}_k{}^i=\theta_k{}^i-\overset{1}{\gamma}{}^i_{kl}\theta^l, \tag{1.42}$$

и потребуем, чтобы формы $\tilde{\theta}_k{}^i$ удовлетворяли уравнениям Картана — Лаптева [11], т. е. являлись формами тангенциальной связности. Для этого необходимо и достаточно, чтобы функции $\overset{1}{\gamma}{}^i_{kl}$ удовлетворяли уравнениям

$$d\overset{1}{\gamma}{}^i_{jk}-\overset{1}{\gamma}{}^i_{lk}\theta_j{}^l-\overset{1}{\gamma}{}^i_{jl}\theta_k{}^l+\overset{1}{\gamma}{}^l_{jk}\theta_l{}^i-\overset{1}{\gamma}{}^m_{jk}\overset{1}{\gamma}{}^i_{ml}\theta^l+\theta^i_{jk}=\overset{1}{\gamma}{}^i_{jkl}\theta^l. \tag{1.43}$$

Если объект $\overset{1}{\gamma}$ охвачен фундаментальными объектами подмногообразия M_m и объектом связности Γ, то такая тангенциальная связность внутренним образом (по определению Г. Ф. Лаптева [11]) присоединена к M_m.

Пусть на M_m задано (или к M_m внутренним образом присоединено) поле объекта $N=\{N^J_\alpha\}$, определенное уравнениями:

$$dN^J_\alpha-N^J_\beta\theta^\beta_\alpha+N^K_\alpha\omega^J_K=N^J_{\alpha k}\theta^k, \tag{1.44}$$

где θ_β^α — линейные дифференциальные формы, удовлетворяющие следующим структурным уравнениям

$$d\theta_\beta^\alpha = \theta_\beta^\gamma \wedge \theta_\gamma^\alpha + \theta^k \wedge \theta_{\beta k}^\alpha, \tag{1.45}$$

а линейная группа с инвариантными формами $\overline{\theta}_\beta^\alpha = \theta_\beta^\alpha |_{\theta^k = 0}$ представлена в элементах $N_x(M_m)$, где $x \in M_m$, как группа преобразований векторного репера $\underset{x}{\vec{N}}_\alpha = \underset{x}{N}{}_\alpha^J \vec{e}_J$.

Формы

$$\tilde{\theta}_\beta^\alpha = \theta_\beta^\alpha - \overset{2}{\gamma}{}_{\beta k}^\alpha \theta^k \tag{1.46}$$

будут формами нормальной связности в расслоении $N(M_m)$, определенном полем (1.44), если функции $\overset{2}{\gamma}$ будут удовлетворять уравнениям:

$$d\overset{2}{\gamma}{}_{\beta i}^\alpha - \overset{2}{\gamma}{}_{\beta k}^\alpha \theta_i^k - \overset{2}{\gamma}{}_{\delta i}^\alpha \theta_\beta^\delta + \overset{2}{\gamma}{}_{\beta i}^\delta \theta_\delta^\alpha - \overset{2}{\gamma}{}_{\beta i}^\delta \overset{2}{\gamma}{}_{\delta k}^\alpha \theta^k + \theta_{\beta i}^\alpha = \overset{2}{\gamma}{}_{\beta i k}^\alpha \theta^k. \tag{1.47}$$

При этом формы $\overline{\theta}_\beta^\alpha$ удовлетворяют условиям теоремы Картана — Лаптева [11].

При наличии на M_m полей $\{\Lambda_i^J\}$ и $\{N_\alpha^J\}$, как известно [10], можно ввести не равный нулю относительный инвариант:

$$A = \det \left\| \begin{matrix} \Lambda_i^J \\ \hline N_\alpha^J \end{matrix} \right\| \tag{1.48}$$

и при его помощи ввести [10] обращенные объекты $\overset{*}{\Lambda} = \{\overset{*}{\Lambda}{}_J^i\}$, $\overset{*}{N} = \{\overset{*}{N}{}_J^\alpha\}$:

$$\overset{*}{\Lambda}{}_J^i \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \ln A}{\partial \Lambda_i^J}, \quad \overset{*}{N}{}_J^\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \ln A}{\partial N_\alpha^J}, \tag{1.49}$$

удовлетворяющие следующим дифференциальным уравнениям

$$d\overset{*}{\Lambda}{}_K^i + \overset{*}{\Lambda}{}_K^l \theta_l^i - \overset{*}{\Lambda}{}_J^i \omega_K^J = \overset{*}{\Lambda}{}_{Kk}^i \theta^k, \tag{1.50}$$

$$d\overset{*}{N}{}_K^\beta - \overset{*}{N}{}_J^\beta \omega_K^J + \overset{*}{N}{}_K^\alpha \theta_\alpha^\beta = \overset{*}{N}{}_{Kk}^\beta \theta^k. \tag{1.51}$$

Выполняются следующие конечные соотношения

$$\Lambda_k^J \overset{*}{\Lambda}{}_J^i = \delta_k^i, \quad N_\alpha^J \overset{*}{N}{}_J^\beta = \delta_\alpha^\beta,$$

$$\Lambda_k^J \overset{*}{\Lambda}{}_K^k + N_\alpha^J \overset{*}{N}{}_K^\alpha = \delta_K^J, \quad \Lambda_k^J \overset{*}{N}{}_J^\alpha = 0, \quad N_\alpha^J \overset{*}{\Lambda}{}_J^k = 0. \tag{1.52}$$

Индуцированная связность $\overset{\circ}{\gamma}$ и вертикальная связность $\overset{\perp}{\gamma}$, ассоциированные нормально оснащающему полю $N(M_m)$ (1.44), определяются, соответственно, объектами, компоненты которых имеют следующее строение:

$$\overset{\circ}{\gamma}{}^{i}_{jk} = -\overset{*}{\Lambda}{}^{i}_{K}(\Lambda^{K}_{jk} - \Lambda^{L}_{j}\Gamma^{K}_{Lk}), \tag{1.53}$$

$$\overset{*}{\gamma}{}^{\alpha}_{\beta k} = -\overset{*}{N}{}^{\alpha}_{K}(N^{K}_{\beta k} - N^{L}_{\beta}\Gamma^{K}_{Lk}). \tag{1.54}$$

Итак, каждому нормально оснащающему полю, заданному на подмногообразии M_m в M_{n+1} со связностью Γ, соответствуют однозначно определенные индуцированная связность $\overset{\circ}{\gamma}$ и вертикальная связность $\overset{*}{\gamma}$.

5. Обобщенные уравнения Гаусса—Вейнгартена и Ван дер Вардена—Бортолотти. Если дифференциальные уравнения полей (1.8), (1.44) объектов $\{\Lambda^{J}_{i}\}$ и $\{N^{J}_{\alpha}\}$ записать при помощи форм связности Γ, заданной в многообразии M_{n+1}, и тангенциальной и нормальной связностей $\overset{1}{\gamma}$ и $\overset{2}{\gamma}$, то эти уравнения примут вид:

$$d\Lambda^{J}_{i} + \Lambda^{K}_{i}\tilde{\omega}^{J}_{K} - \Lambda^{J}_{k}\tilde{\theta}^{k}_{i} = \overset{\Gamma,\overset{1}{\gamma}}{\tilde{\Lambda}}{}^{J}_{ik}\theta^{k}, \tag{1.55}$$

$$dN^{J}_{\alpha} + N^{K}_{\alpha}\tilde{\omega}^{J}_{K} - N^{J}_{\beta}\tilde{\theta}^{\beta}_{\alpha} = \overset{\Gamma,\overset{1}{\gamma}}{\tilde{N}}{}^{J}_{\alpha k}\theta^{k}, \tag{1.56}$$

где формы $\tilde{\omega}^{J}_{K}$, $\tilde{\theta}^{k}_{i}$, $\tilde{\theta}^{\alpha}_{\beta}$ определены, соответственно, равенствами (1.6), (1.42), (1.46) и

$$\overset{\Gamma,\overset{1}{\gamma}}{\tilde{\Lambda}}{}^{J}_{ik} \overset{\text{def}}{=} \Lambda^{J}_{ik} - \Lambda^{K}_{i}\Gamma^{J}_{Kk} + \Lambda^{J}_{l}\overset{1}{\gamma}{}^{l}_{ik}, \tag{1.57}$$

$$\overset{\Gamma,\overset{2}{\gamma}}{\tilde{N}}{}^{J}_{\alpha k} \overset{\text{def}}{=} N^{J}_{\alpha k} - N^{K}_{\alpha}\Gamma^{J}_{Kk} + N^{J}_{\beta}\overset{2}{\gamma}{}^{\beta}_{\alpha k}. \tag{1.58}$$

Функции (1.57), (1.58) названы (см. [1]) ковариантным производными объектов $\{\Lambda^{J}_{i}\}$ и $\{N^{J}_{\alpha}\}$ относительно связностей Γ, $\overset{1}{\gamma}$ и Γ, $\overset{2}{\gamma}$, соответственно.

По аналогичному закону мы можем вычислить ковариантную производную любого объекта, поле которого задано на подмногообразии M_m.

В каждой точке $x \in M_m$ векторы:

$$\underset{x}{\vec{\Lambda}}_{i} = \Lambda^{J}_{i}\vec{e}_{J}, \tag{1.59}$$

$$\underset{x}{\vec{N}}_{\alpha} = N^{J}_{\alpha}\vec{e}_{J}, \tag{1.60}$$

в силу (1.48), образуют репер, который мы обозначим $R(\Lambda, N)$. Используя объекты (1.49), получаем равенства:

$$\underset{x}{\vec{e}}_{J} = \overset{*}{\Lambda}{}^{i}_{J}\underset{x}{\vec{\Lambda}}_{i} + \overset{*}{N}{}^{\alpha}_{J}\underset{x}{\vec{N}}_{\alpha}. \tag{1.61}$$

Замечание. Для упрощения записи в дальнейшем мы будем опускать индекс x в обозначениях векторов.

Введем векторы:

$$\vec{\Lambda}_{ij} \overset{\text{def}}{=} \overset{\overset{1}{\Gamma,\gamma}}{\tilde{\Lambda}}{}^{K}_{ij}\vec{e}_K, \tag{1.62}$$

$$\vec{N}_{\alpha k} \overset{\text{def}}{=} \overset{\overset{2}{\Gamma,\gamma}}{\tilde{N}}{}^{K}_{\alpha k}\vec{e}_K. \tag{1.63}$$

Разложив векторы (1.62) по векторам репера $R(\Lambda, N)$ и учтя соотношения (1.57) и (1.52), получим:

$$\vec{\Lambda}_{ik} = (\Lambda^J_{ik} - \Lambda^K_i\Gamma^J_{Kk} + \Lambda^J_l\overset{1}{\gamma}{}^l_{ik})\overset{*}{\Lambda}{}^j_J\vec{\Lambda}_j + (\Lambda^J_{ik} - \Lambda^K_i\Gamma^J_{Kk})\overset{*}{N}{}^\alpha_J\vec{N}_\alpha, \tag{1.64}$$

откуда следует, что:

$$\overset{\overset{1}{\Gamma,\gamma}}{\tilde{\Lambda}}{}^J_{ik} \doteq H^l_{ik}\Lambda^J_l + H^\alpha_{ik}N^J_\alpha, \tag{1.65}$$

где

$$H^j_{ik} = \left(\Lambda^L_{ik} - \Lambda^K_i\Gamma^L_{Kk} + \Lambda^L_l\overset{1}{\gamma}{}^l_{ik}\right)\overset{*}{\Lambda}{}^j_L, \tag{1.66}$$

$$H^\alpha_{ik} = \left(\Lambda^L_{ik} - \Lambda^K_i\Gamma^L_{Kk}\right)\overset{*}{N}{}^\alpha_L. \tag{1.67}$$

Соотношения (1.65) получаются непосредственно из (1.57), если учесть (1.52).

Функции H^l_{jk} (1.66) образуют тензор, ассоциированный выбранному нормально оснащающему полю $N(M_m)$ и тангенциальной связности $\overset{1}{\gamma}$.

Предложение 1. Обращение в нуль компонент тензора H^l_{jk} является необходимым и достаточным условием того, чтобы тангенциальная связность $\overset{1}{\gamma}$ была бы индуцированной связностью $\overset{\circ}{\gamma}$ (1.53).

Справедливость устанавливается непосредственно, в силу формул охвата тензора H^l_{jk} и объекта $\overset{\circ}{\gamma}$.

Функции H^α_{ik} также образуют тензор, ассоциированный полю $N(M_m)$ и не зависящий от выбора тангенциальной связности. Этот тензор называется вторым фундаментальным тензором первого рода подмногообразия M_m.

Уравнения (1.65) представляют собой обобщенные уравнения Гаусса (см. § 3).

Действительно, если в расслоении реперов $R^1(M_{n+1})$ выделено поле реперов $\underset{0}{R^1}(M_{n+1})$, например, поле натуральных реперов, то $\omega^K = dx^K$ и

$$\omega^J_K = \Gamma^J_{KL}\omega^L. \tag{1.68}$$

Такие формы (1.36), называющиеся специализированными формами связности, [4] удовлетворяют условиям теоремы Картана—Лаптева и, следовательно, определяют отображение касательных пространств $T_{x+dx}(M_{n+1})$ на $T_x(M_{n+1})$, а функции Γ^I_{JK}—коэффициентами связности (см. [7]).

Введенные в (1.57) и (1.58) ковариантные производные совпадают в этом случае с общепринятыми ковариантными производными (см., например, [1], стр. 69)

$$\tilde{\nabla}_k \Lambda^J_i = \partial_k \Lambda^J_i + \Gamma^J_{Lk} \Lambda^L_i - \overset{1}{\gamma}{}^l_{ik} \Lambda^J_l, \tag{1.69}$$

$$\tilde{\nabla}_k N^J_\alpha = \partial_k N^J_\alpha + \Gamma^J_{Lk} N^L_\alpha - \overset{2}{\gamma}{}^\beta_{\alpha k} N^J_\beta. \tag{1.70}$$

Если считать, что в качестве связности $\overset{1}{\gamma}$ выбрана индуцированная связность $\overset{\circ}{\gamma}$, то уравнения (1.65) примут вид:

$$\tilde{\nabla}_k \Lambda^J_i = H^\alpha_{ik} N^J_\alpha, \tag{1.71}$$

т. е. совпадут с известными уравнениями Гаусса (см. § 3).

Аналогичным путем получаем:

$$\vec{N}_{\alpha k} = (N^J_{\alpha k} - N^K_\alpha \Gamma^J_{Kk}) \overset{*}{\Lambda}{}^l_J \vec{\Lambda}_l + (N^J_{\alpha k} - N^K_\alpha \Gamma^J_{Kk} + N^J_\beta \overset{2}{\gamma}{}^\beta_{\alpha k}) \overset{*}{N}{}^\gamma_J \vec{N}_\gamma. \tag{1.72}$$

Откуда следует:

$$\overset{\Gamma, \overset{2}{\gamma}}{\tilde{N}}{}^J_{\alpha k} = l^l_{\alpha k} \Lambda^J_l + l^\beta_{\alpha k} N^J_\beta, \tag{1.73}$$

где

$$l^l_{\alpha k} = (N^J_{\alpha k} - N^K_\alpha \Gamma^J_{Kk}) \overset{*}{\Lambda}{}^l_J, \tag{1.74}$$

$$l^\beta_{\alpha k} = (N^J_{\alpha k} - N^K_\alpha \Gamma^J_{Kk} + N^J_\gamma \overset{2}{\gamma}{}^\gamma_{\alpha k}) \overset{*}{N}{}^\beta_J. \tag{1.75}$$

Уравнения (1.73) представляют собой обобщенные уравнения Вейнгартена.

Функции (1.74) и (1.75) образуют два тензора, ассоциированных нормально оснащающему полю $N(M_m)$.

Тензор $l^l_{\alpha k}$ называется вторым фундаментальным тензором второго рода.

Тождественное обращение в нуль тензора $l^\beta_{\alpha k}$ является необходимым и достаточным условием совпадения нормальной связности $\overset{2}{\gamma}$, ассоциированной нормально оснащающему полю $N(M_m)$, с вертикальной связностью, ассоциированной тому же полю $N(M_m)$.

Если формы ω^J_K определены равенствами (1.68) и $l^\beta_{\alpha k}$ тождественно равны нулю, то уравнения (1.73) совпадают с классическими уравнениями Вейнгартена (см. § 3);

$$\overset{\Gamma, \overset{*}{\gamma}}{\tilde{N}}{}^J_{\alpha k} = l^l_{\alpha k} \Lambda^J_l. \tag{1.76}$$

Для ковариантных производных обращенных объектов $\{\overset{*}{\Lambda}{}^l_J\}$ и $\{\overset{*}{N}{}^\alpha_J\}$ получаем следующие уравнения:

$$\overset{\overset{1}{\Gamma},\gamma}{\tilde{\overset{*}{\Lambda}}}{}^l_{Jk} = -H^l_{lk}\overset{*}{\Lambda}{}^l_J - l^i_{\alpha k}\overset{*}{N}{}^\alpha_J, \tag{1.77}$$

$$\overset{\overset{2}{\Gamma},\gamma}{\tilde{\overset{*}{N}}}{}^\alpha_{Jk} = -H^\alpha_{lk}\overset{*}{\Lambda}{}^l_J - l^\alpha_{\beta k}\overset{*}{N}{}^\beta_j. \tag{1.78}$$

Эти уравнения обобщают известные уравнения Ван дер Вардена—Бортолотти.

Если формы ω^J_K определены равенствами (1.68) и в качестве тангенциальной и нормальной связностей выбраны индуцированная связность $\overset{\circ}{\gamma}$ (1.53) и вертикальная связность $\overset{*}{\gamma}$ (1.54), то уравнения (1.77), (1.78) совпадают с классическими уравнениями Ван дер Вардена—Бортолотти.

$$\tilde{\nabla}_k\overset{*}{\Lambda}{}^l_J = -l^l_{\alpha k}\overset{*}{N}{}^\alpha_J, \tag{1.79}$$

$$\tilde{\nabla}_k\overset{*}{N}{}^\alpha_J = -H^\alpha_{lk}\overset{*}{\Lambda}{}^l_J. \tag{1.80}$$

6. Соотношения для тензоров кручения и кривизны.

1. Пусть формы связности $\tilde{\omega}^J_K$ получены преобразованием (1.6):

$$\tilde{\omega}^J_K = \omega^J_K - \Gamma^J_{KL}\omega^L.$$

При этом структурные уравнения (1.2) для форм ω^J могут быть записаны в виде:

$$d\omega^J = \omega^K \wedge \tilde{\omega}^J_K + R^J_{KL}\omega^K \wedge \omega^L, \tag{1.81}$$

где

$$R^J_{KL} = \frac{1}{2}(\Gamma^J_{KL} - \Gamma^J_{LK}).$$

На подмногообразии M_m, заданном уравнениями (1.7):

$$\omega^J = \Lambda^J_k\theta^k$$

уравнения (1.81) принимают вид:

$$(d\Lambda^J_k - \Lambda^J_l\theta_k{}^l + \Lambda^K_k\tilde{\omega}^J_K) \wedge \theta^k = R^J_{kl}\theta^k \wedge \theta^l, \tag{1.82}$$

где

$$R^J_{kl} \overset{\text{def}}{=} R^J_{KL}\Lambda^K_k\Lambda^L_l.$$

Учитывая уравнения (1.8), получаем

$$R^J_{kl} = \frac{1}{2}[(\Lambda^J_{kl} - \Lambda^K_k\Gamma^J_{Kl}) - (\Lambda^J_{lk} - \Lambda^K_l\Gamma^J_{Kk})] \tag{1.83}$$

или, в силу симметрии Λ^J_{kl},

$$R^J_{kl}=-\frac{1}{2}\left(\Lambda^K_k\Gamma^J_{Kl}-\Lambda^K_l\Gamma^J_{Kk}\right).\qquad(1.84)$$

Используя эти формулы, находим строение тензора кручения тангенциальной связности.

Пусть формы $\tilde{\theta}_k{}^l$, полученные преобразованиями (1.42):

$$\tilde{\theta}_k{}^l=\theta_k{}^l-\overset{1}{\gamma}{}^l_{kl}\theta^l,$$

являются формами тангенциальной связности $\overset{1}{\gamma}$. Подставляя в (1.82) вместо форм $\theta_k{}^l$ формы $\tilde{\theta}_k{}^l$, получим, с учетом формул (1.57),

$$\left(\overset{\Gamma,\overset{1}{\gamma}}{\tilde{\Lambda}}{}^J_{kl}-\Lambda^J_j\overset{1}{\gamma}{}^j_{kl}\right)\theta^k\wedge\theta^l=-R^J_{kl}\theta^k\wedge\theta^l,$$

следовательно,

$$\Lambda^J_j r^j_{kl}=\frac{1}{2}\left(\overset{\Gamma,\overset{1}{\gamma}}{\tilde{\Lambda}}{}^J_{kl}-\overset{\Gamma,\overset{1}{\gamma}}{\tilde{\Lambda}}{}^J_{kl}\right)+R^J_{kl},$$

где $r^j_{kl}=\frac{1}{2}\left(\overset{1}{\gamma}{}^j_{kl}-\overset{1}{\gamma}{}^j_{lk}\right)$ — тензор кручения тангенциальной связности $\overset{1}{\gamma}$. Свертывая с $\overset{*}{\Lambda}{}^m_J$, находим

$$r^j_{kl}=\overset{*}{\Lambda}{}^j_J\left[R^J_{kl}+\frac{1}{2}\left(\tilde{\Lambda}^J_{kl}-\tilde{\Lambda}^J_{lk}\right)\right]$$

или, с учетом формул (1.57), (1,66), (1.67) и соотношений (1.52),

$$r^j_{kl}=\overset{*}{\Lambda}{}^j_J R^J_{kl}+\frac{1}{2}\left(H^j_{kl}-H^j_{lk}\right).\qquad(1.85)$$

Если связность $\overset{1}{\gamma}$ совпадает с индуцированной связностью $\overset{0}{\gamma}$, то очевидно, что

$$r^J_{kl}=\overset{*}{\Lambda}{}^j_J R^J_{kl}.\qquad(1.86)$$

2. Классические уравнения Гаусса, Кодацци, Риччи, как правило, выводятся в предположении, что тангенциальная связность есть индуцированная связность (см. п. 4), ассоциированная ортогонально оснащающему полю. Для произвольной тангенциальной связности, ассоциированной произвольному нормально оснащающему полю и произвольной нормальной связности мы получаем четыре типа уравнений, из которых при дополнительных условиях, указанных выше непосредственно получаются уравнения Гаусса—Кодацци—Риччи.

Продифференцировав внешним образом уравнения (1.55) и заменив в них дифференциал $d\overset{\Gamma,\overset{1}{\gamma}}{\tilde{\Lambda}}{}^J_{ik}$ его выражением, полученный при дифференцировании (1.65), после ряда преобразований, использующих формулы (1.66) и (1.67), получим внешнее квадратичное уравнение:

$$\{\Lambda^J_l[\overset{\overset{1}{\gamma}}{\tilde{\nabla}}H^l_{ik}+(H^j_{ik}H^l_{jm}+H^\alpha_{ik}l^l_{\alpha m}-H^l_{ij}r^j_{km}-r^l_{ikm})\theta^m]+\Lambda^K_lR^J_{Kkm}\theta^m+$$
$$+N^J_\alpha[\overset{\overset{1}{\gamma},\overset{2}{\gamma}}{\tilde{\nabla}}H^\alpha_{ik}+(H^l_{ik}H^\alpha_{lm}+H^\beta_{ik}l^\alpha_{\beta m}-H^\alpha_{il}r^l_{km})\theta^m]\}\wedge\theta^k\doteq 0, \quad (1.87)$$

где r^j_{km} — тензор кривизны тангенциальной связности $\overset{1}{\gamma}$, $R^J_{Kkm}=R^J_{KLM}\Lambda^L_k\Lambda^M_m$, R^J_{KLM} и r^j_{ikm} — тензоры кривизны связности Γ и $\overset{1}{\gamma}$, соответственно, $\overset{\overset{1}{\gamma}}{\tilde{\nabla}}H^l_{ik}$ — ковариантная производная тензора H^l_{ik} (1.66) в тангенциальной связности $\overset{1}{\gamma}$, а $\overset{\overset{1}{\gamma},\overset{2}{\gamma}}{\tilde{\nabla}}H^\alpha_{ik}$ — ковариантная производная тензора H^α_{ik} (1.67) в тангенциальной связности $\overset{1}{\gamma}$ и нормальной связности $\overset{2}{\gamma}$ и

$$\overset{\overset{1}{\gamma}}{\tilde{\nabla}}H^l_{ik}=\tilde{H}^l_{ikm}\theta^m, \quad (1.88)$$
$$\overset{\overset{1}{\gamma},\overset{2}{\gamma}}{\tilde{\nabla}}H^\alpha_{ik}=\tilde{H}^\alpha_{ikm}\theta^m. \quad (1.89)$$

Свернув уравнения (1.87) один раз с $\overset{*}{\Lambda}{}^j_J$, а второй раз с $\overset{*}{N}{}^\alpha_J$, получим:

$$\overset{*}{\Lambda}{}^j_J\Lambda^K_iR^J_{Kkm}-r^j_{ikm}+\tilde{H}^j_{i[km]}-H^l_{i[k}H^j_{|l|m]}+H^\alpha_{i|k}l^j_{|\alpha|m]}-H^j_{il}r^l_{km}=0, \quad (1.90)$$

$$\overset{*}{N}{}^\gamma_J\Lambda^K_iR^J_{Kkm}+\tilde{H}^\gamma_{i[km]}+H^l_{i[k}H^\gamma_{|l|m]}+H^\alpha_{i[k}l^\gamma_{|\alpha|m]}-H^\gamma_{il}r^l_{km}=0. \quad (1.91)$$

Уравнения (1.90) являются обобщенными уравнениями Гаусса, а уравнения (1.91) — обобщенными уравнениями Кодацци.

Аналогичным путем, отправляясь от уравнений (1.56) и используя уравнения (1.73) и равенства (1.74) и (1.75), находим следующие системы:

$$\overset{*}{\Lambda}{}^j_JN^K_\alpha R^J_{Kkm}+\tilde{l}^j_{\alpha[km]}+l^i_{\alpha|k}H^j_{|i|m]}+l^\gamma_{\alpha[k}l^j_{|\gamma|m]}-l^j_{\alpha l}r^l_{km}=0, \quad (1.92)$$

$$N^K_\alpha\overset{*}{N}{}^\gamma_JR^J_{Kkm}-r^\gamma_{\alpha km}+\tilde{l}^\gamma_{\alpha[km]}+l^i_{\alpha[k}H^\gamma_{|i|m]}+$$
$$+l^\beta_{\alpha[k}l^\gamma_{|\beta|m]}-l^\gamma_{\alpha l}r^l_{km}=0, \quad (1.93)$$

где $r^\gamma_{\alpha km}$ — кручение нормальной связности $\overset{2}{\gamma}$, $\tilde{l}^j_{\alpha km}$ и $\tilde{l}^\gamma_{\alpha km}$ ковариантные производные тензоров (1.74) и (1.75) в связностях $\overset{1}{\gamma}$ и $\overset{2}{\gamma}$.

Уравнения (1.93) являются обобщенными уравнениями Риччи.

В частном случае, когда тангенциальной связностью является индуцированная связность $\overset{\circ}{\gamma}$ (1.53) уравнения (1.90)—(1.92) упрощаются, в силу того, что $\underset{2}{H}{}^{i}_{jk} \equiv 0$.

Если, кроме того, связность γ есть вертикальная связность $\overset{*}{\gamma}$ (1.54), то в уравнениях (1.91)—(1.93) обращаются в нуль и слагаемые, содержащие $l^{\alpha}_{\beta k}$, в силу тождественного обращения в нуль этих величин.

7. Подмногообразие M_m в метрическом многообразии M_{n+1}.

1. Объекты, индуцированные метрическим тензором. Пусть на M_{n+1} задано поле невырожденного, симметрического тензора G типа (0,2) — поле метрического тензора:

$$dG_{JK} - G_{LK}\omega^L_J - G_{JL}\omega^L_K = G_{JKL}\omega^L. \tag{1.94}$$

Линейная связность Г, заданная на M_{n+1} называется метрической, ассоциированной метрическому тензору G, если относительно этой связности метрический тензор G ковариантно постоянен, т. е.

$$\tilde{G}_{JKL} = G_{JKL} + G_{MK}\Gamma^M_{JL} + G_{JM}\Gamma^M_{KL} = 0. \tag{1.95}$$

На подмногообразии M_m, заданном уравнениями (17.), возникает ограничение поля тензора G (1.94), определенное системой:

$$dG_{JK} - G_{LK}\omega^L_J - G_{JL}\omega^L_K = G_{JKl}\theta^l, \tag{1.96}$$

где

$$G_{JKl} \overset{\text{def}}{=} G_{JKL}\Lambda^L_l. \tag{1.97}$$

Метрический тензор G индуцирует на M_m поле дважды ковариантного тензора:

$$g_{ik} = G_{JK}\Lambda^J_i\Lambda^K_k \tag{1.98}$$

такого, что

$$dg_{ik} - g_{lk}\theta_i{}^l - g_{il}\theta_k{}^l = g_{ikl}\theta^l. \tag{1.99}$$

Этот тензор g_{ik} называется индуцированным метрическим тензором на M_m.

Из формул охвата (1.98) следует, что

$$g_{ikl} = G_{JKL}\Lambda^L_l\Lambda^J_i\Lambda^K_k + G_{JK}(\Lambda^J_{il}\Lambda^K_k + \Lambda^J_i\Lambda^K_{kl}). \tag{1.100}$$

Если на M_m задано нормально оснащающее поле $N(M_m)$, то на M_m естественно возникают поля объектов

$$g_{\alpha\beta} = G_{JK}N^J_\alpha N^K_\beta, \tag{1.101}$$

$$g_{i\alpha} = G_{JK}\Lambda^J_i N^K_\alpha, \tag{1.102}$$

таких, что

$$dg_{\alpha\beta}-g_{\gamma\beta}\theta^{\gamma}_{\alpha}-g_{\alpha\gamma}\theta^{\gamma}_{\beta}=g_{\alpha\beta k}\theta^{k}, \tag{1.103}$$

$$dg_{i\alpha}-g_{k\alpha}\theta_{i}^{k}-g_{i\beta}\theta^{\beta}_{\alpha}=g_{i\alpha k}\theta^{k}. \tag{1.104}$$

Свертывая (1.98) и (1.101) с $\overset{*}{\Lambda}{}^{i}_{J}$ и $\overset{*}{N}{}^{\alpha}_{J}$, соответственно, получаем:

$$G_{JK}\Lambda^{K}_{k}=g_{ki}\overset{*}{\Lambda}{}^{i}_{J}+g_{k\alpha}\overset{*}{N}{}^{\alpha}_{J}, \tag{1.105}$$

$$G_{JK}N^{K}_{\alpha}=g_{\alpha i}\overset{*}{\Lambda}{}^{i}_{J}+g_{\alpha\beta}\overset{*}{N}{}^{\beta}_{J}. \tag{1.106}$$

Если нормально оснащающее поле является ортогонально оснащающим полем, то $g_{i\alpha}=0$ и из равенств (1.105) и (1.106) следует

$$G_{JK}\Lambda^{K}_{k}=g_{ki}\overset{*}{\Lambda}{}^{i}_{J}, \tag{1.107}$$

$$G_{JK}N^{K}_{\alpha}=g_{\alpha\beta}\overset{*}{N}{}^{\beta}_{J}. \tag{1.108}$$

Пусть на M_m задана тангенциальная связность $\overset{1}{\gamma}$ (см. п. 4). Ковариантная производная $\tilde{g}_{ikl}$ тензора g_{ik} относительно этой связности имеет следующее строение:

$$\tilde{g}_{ikl}=g_{ikl}+g_{mk}\overset{1}{\gamma}{}^{m}_{il}+g_{im}\overset{1}{\gamma}{}^{m}_{kl}. \tag{1.109}$$

Из (1.98) и (1.95) следует, что

$$\tilde{g}_{ikl}=\tilde{G}_{JKL}\Lambda^{L}_{l}\Lambda^{J}_{i}\Lambda^{K}_{k}+G_{JK}(\tilde{\Lambda}^{J}_{il}\Lambda^{K}_{k}+\Lambda^{J}_{i}\Lambda^{K}_{kl}), \tag{1.110}$$

где $\tilde{\Lambda}^{J}_{il}$ определены в (1.57).

Укажем на некоторые свойства тангенциальной связности $\overset{1}{\gamma}$.

Утверждение 1. Пусть связность Γ — метрическая. Тангенциальная связность $\overset{1}{\gamma}$ будет метрической по отношению к индуцированной метрике, если выполнено условие:

$$G_{JK}(\tilde{\Lambda}^{J}_{il}\Lambda^{K}_{k}+\Lambda^{J}_{i}\tilde{\Lambda}^{K}_{kl})=0. \tag{1.111}$$

Справедливо и обратное утверждение.

Действительно, так как по предположению $\tilde{G}_{JKL}=0$, то из (1.110) следует, что при выполнении условия (1.111) имеем $\tilde{g}_{ikl}=0$ и обратно.

Замечание 1. Условие (1.111) можно записать и в иной форме:

$$g_{kj}\overset{1}{\gamma}{}^{j}_{il}+g_{ji}\overset{1}{\gamma}{}^{j}_{kl}+G_{JK}[\Lambda^{K}_{k}(\Lambda^{J}_{il}-\Lambda^{L}_{i}\Gamma^{J}_{Ll})+\Lambda^{J}_{i}(\Lambda^{K}_{kl}-\Lambda^{L}_{k}\Gamma^{K}_{Ll})]=0. \tag{1.112}$$

Замечание. Если на M_m задано нормально оснащающее поле $N(M_m)$ (1.44), то, воспользовавшись формулами (1.65) и (1.66), (1.67), условия (1.111) можно привести к виду:

$$g_{kj}H^{j}_{il}+g_{ij}H^{j}_{kl}+g_{\alpha k}H^{\alpha}_{il}+g_{\alpha i}H^{\alpha}_{kl}=0. \tag{1.113}$$

Утверждение 2. Если связность Γ — метрическая, то индуцированная связность $\overset{\circ}{\gamma}$, ассоциированная нормально оснащающему полю $N(M_m)$, будет метрической, если:

$$g_{\alpha k}H^{\alpha}_{il}+g_{\alpha i}H^{\alpha}_{kl}=0, \qquad (1.114)$$

где поле $N(M_m)$ определено уравнениями (1.44) и H^{α}_{kl} — уравнениями (1.65).

Так как для $\overset{\circ}{\gamma}$ имеем $H^{i}_{jk}\equiv 0$, то справедливость утверждения следует из (1.113) в силу утверждения 1.

Следствие 1. Если связность Γ — метрическая, то индуцированная связность $\overset{\circ}{\gamma}$, ассоциированная ортогонально оснащающему полю, также метрическая относительно индуцированной метрики.

Справедливость утверждения следует из (1.102).

Связность D называется римановой связностью, ассоциированной метрическому тензору G, если компоненты объекта этой связности D^{J}_{KL} определены формулами:

$$D^{J}_{KL}=-\frac{1}{2}G^{JM}(G_{KLM}-G_{MKL}-G_{LMK}). \qquad (1.115)$$

Как известно, для римановой связности $\tilde{G}_{JKL}=0$ и $\Gamma^{J}_{KL}-\Gamma^{J}_{LK}=0$, т. е. риманова связность — симметричная метрическая.

Утверждение 3. Для того чтобы тангенциальная связность $\overset{1}{\gamma}$ была римановой, необходимо и достаточно, чтобы она была метрической и ее тензор кручения был равен нулю.

Необходимость. Пусть связность $\overset{1}{\gamma}$ — риманова по отношению к индуцированной метрике g_{ij} (1.98). Это означает, что:

$$\overset{1}{\gamma}{}^{j}_{ik}=-\frac{1}{2}g^{jl}(g_{ikl}-g_{lik}-g_{kli}). \qquad (1.116)$$

Непосредственной подстановкой в равенство (1.109) убеждаемся, что $\tilde{g}_{ikl}=0$, т. е. $\overset{1}{\gamma}$ — метрическая связность. Симметрия $\overset{1}{\gamma}$ следует из того, что $\overset{1}{\gamma}$ — риманова связность.

Достаточность. Пусть $\overset{1}{\gamma}$ — метрическая связность относительно индуцированной метрики, т. е. выполняются условия $\tilde{g}_{ikl}=0$, и пусть ее тензор кручения S^{j}_{ik} равен нулю, т. е. $\overset{1}{\gamma}{}^{j}_{ik}-\overset{1}{\gamma}{}^{j}_{ki}=0$. При этом из (1.109) находим, что $\overset{1}{\gamma}{}^{j}_{ik}$ имеют строение (1.116).

Утверждение 4. Если связность Γ — риманова и тангенциальная связность есть индуцированная связность $\overset{\circ}{\gamma}$, причем нормально оснащающее поле $N(M_m)$, является ортогонально оснащающим, то связность $\overset{\circ}{\gamma}$ также риманова.

Действительно, т.к. Г — риманова связность, то $R^J_{kl}=0$, а в силу того, что $\overset{\circ}{\gamma}$ — индуцированная связность из (1.86) следует, что $\overset{\circ}{\gamma}$ — симметрическая. Поскольку по предположению $G_{JK}\Lambda^J_l N^K_\alpha = g_{l\alpha}=0$, то условия (1.114) выполняются, т.е. $\overset{\circ}{\gamma}$ — метрическая связность. Следовательно, $\overset{\circ}{\gamma}$ — риманова.

Используя соотношения (1.98), (1.101), и (1.102), а также соотношения (1.52), получаем

$$G_{KL}=g_{ij}\overset{*}{\Lambda}{}^i_K\overset{*}{\Lambda}{}^j_L+g_{\alpha\beta}\overset{*}{N}{}^\alpha_K\overset{*}{N}{}^\beta_L+g_{\alpha k}\,(\overset{*}{\Lambda}{}^k_K\overset{*}{N}{}^\alpha_L+\overset{*}{\Lambda}{}^k_L\overset{*}{N}{}^\alpha_K). \quad (1.117)$$

2. Соотношения между компонентами H^i_{jk}, H^α_{jk}, $l^i_{\alpha k}$, $l^\gamma_{\alpha k}$. Компонентами объектов H^i_{jk}, H^α_{jk}, $l^i_{\alpha k}$, $l^\alpha_{\beta k}$ определены, соответственно, в (1.66), (1.67), (1.74), (1.75). Вычисляя ковариантную производную в связностях Г, $\overset{1}{\gamma}$ и $\overset{2}{\gamma}$ для $g_{\alpha i}$ и $g_{\alpha\beta}$ получаем:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{\alpha i k}=H^j_{ik}g_{\alpha j}+H^\beta_{ik}g_{\alpha\beta}+l^j_{\alpha k}g_{ij}+l^\beta_{\alpha k}g_{\beta j}+\\ +\Lambda^J_i N^K_\alpha \tilde{G}_{JKL}\Lambda^L_k,\end{aligned} \quad (1.118)$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{\alpha\beta i}=g_{\alpha\gamma}l^\gamma_{\beta i}+g_{\gamma\beta}l^\gamma_{\alpha i}+g_{\alpha l}l^l_{\beta i}+g_{\beta l}l^l_{\alpha i}+\\ +\tilde{G}_{JKL}\Lambda^L_i N^J_\alpha N^K_\beta.\end{aligned} \quad (1.119)$$

В частности, если а) связность Г — метрическая и б) нормально оснащающее поле $N(M_m)$ является ортогонально оснащающим полем, то $\tilde{G}_{JKL}=0$, $g_{\alpha i}=0$, $g_{\alpha i k}=0$, $\tilde{g}_{\alpha i k}=0$ и мы получаем соотношение:

$$l^i_{\alpha k}=-g^{ij}g_{\alpha\beta}H^\beta_{jk}, \quad (1.120)$$

обобщающее известное соотношение (см., например, [3]) и соотношение

$$\tilde{g}_{\alpha\beta i}=g_{\alpha\gamma}l^\gamma_{\beta i}+g_{\gamma\beta}l^\gamma_{\alpha i}. \quad (1.121)$$

Если в качестве нормальной связности выбрать вертикальную связность $\overset{*}{\gamma}$ (1.54), то $l^\gamma_{\beta i}\equiv 0$, а из (1.121) следует, что нормальная связность — метрическая. Получаем следующее утверждение.

Утверждение 2. Если связность Г — метрическая, то вертикальная связность $\overset{*}{\gamma}$ в ортогонально оснащающем распределении — метрическая связность, ассоциированная тензору $g_{\alpha\beta}$.

Обратное утверждение справедливо только при $m=n$. Действительно, если связность Г — метрическая и нормальная связность $\overset{2}{\gamma}$ также метрическая то: $g_{\alpha\gamma}l^\gamma_{\beta i}+g_{\gamma\beta}l^\gamma_{\alpha i}=0$. При $m=n$ отсюда следует, что $l^{n+1}_{n+1 i}=0$, т.е. связность $\overset{2}{\gamma}$ — вертикальная связность.

3. Соотношения для тензоров кривизны. Если связность $\overset{1}{\Gamma}$ — метрическая связность, γ — индуцированная и нормально оснащающее поле является ортогонально оснащающим полем, то, в силу уравнений (1.120) и соотношений (1.107) и (1.108), уравнения (1.90), (1.91) и (1.93) принимают вид:

$$g^{jl}G_{JL}\Lambda^L_l\Lambda^K_i R^J_{Kkm} - r^j_{ikm} - g^{jl}g_{\alpha\beta}H^\alpha_{i[k}H^\beta_{|l|m]} = 0, \tag{1.122}$$

$$g^{\gamma\beta}G_{JL}N^L_\beta\Lambda^K_i R^J_{Kkm} + \tilde{H}^\gamma_{i[km]} + H^\alpha_{i[k}l^\gamma_{|\alpha|m]} = 0, \tag{1.123}$$

$$g^{\gamma\beta}G_{JL}N^L_\beta N^K_\alpha R^J_{Kkm} - r^\gamma_{\alpha km} + \tilde{l}^\gamma_{\alpha[km]} - g^{ij}g_{\alpha\beta}H^\beta_{j[k}H^\gamma_{|i|m]} + $$
$$+ l^\beta_{\alpha[k}l^\gamma_{|\beta|m]} = 0. \tag{1.124}$$

Соотношения (1.92) в метрическом случае совпадают с (1.123).

§ 2. КЛАССИФИКАЦИЯ ИНДУЦИРОВАННЫХ СТРУКТУР НА ПОДМНОГООБРАЗИИ КОРАЗМЕРНОСТИ 2

1. Индуцированная ($f\xi\eta\rho$)-структура на подмногообразии коразмерности 2. Предположим, что на исследуемом многообразии M_{n+1} ($(n+1)$ — нечетное число) задана дифференциально-геометрическая структура первого порядка со структурными объектами φ, ξ, η, компоненты которых подчинены конечным соотношениям:

$$\varphi^I_K\varphi^K_L = -\delta^I_L + \xi^I\eta_L, \quad \varphi^I_K\eta_I = 0, \quad \varphi^I_K\xi^K = 0, \quad \eta_I\xi^I = 1 \tag{2.1}$$

и удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$d\varphi^I_K - \varphi^I_L\omega^L_K + \varphi^L_K\omega^I_L = \varphi^I_{KL}\omega^L, \tag{2.2}$$

$$d\eta_K - \eta_L\omega^L_K = \eta_{KL}\omega^L, \tag{2.3}$$

$$d\xi^I + \xi^L\omega^I_L = \xi^I_L\omega^L. \tag{2.4}$$

Многообразие M_{n+1}, снабженное такой дифференциально-геометрической структурой, называется почти контактным многообразием (см. [1], [13]).

В исследуемом многообразии M_{n+1} рассмотрим подмногообразие M_{n-1} коразмерности 2, заданное уравнениями (1.7):

$$\omega^I = \Lambda^I_i\theta^i, \tag{2.5}$$

причем

$$d\Lambda^I_i - \Lambda^I_j\theta_i{}^j + \Lambda^K_i\omega^I_K = \Lambda^I_{ij}\theta^j. \tag{2.6}$$

Пусть касательную плоскость $T_x(M_{n-1})$ поверхности M_{n-1} натягивают векторы

$$\vec{\Lambda}_i = \Lambda^I_i\vec{e}_I. \tag{2.7}$$

Будем считать, что поверхность M_{n-1} в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ оснащена полем нормальных двумерных плоскостей N_x, определенных системой двух линейно независимых векторов

$$\vec{N}_\alpha = N^I_\alpha \vec{e}_I, \tag{2.8}$$

причем $\delta\vec{N}_\alpha = \overline{\theta}^\beta_\alpha \vec{N}_\beta$. Формы $\overline{\theta}^\beta_\alpha$ являются инвариантными формами полной линейной группы $GL(2, R)$. Дифференциальные уравнения оснащающего поля имеют вид (1.38):

$$dN^I_\alpha - N^I_\beta \theta^\beta_\alpha + N^K_\alpha \omega^I_K = N^I_{\alpha l}\theta^l. \tag{2.9}$$

Теорема (Основная теорема, см. [10], § 5). Если поверхность M_m, погруженная в дифференцируемое многообразие $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$, нормально оснащена полем плоскостей N_x, то на M_m естественным образом возникает $(f\xi\eta\rho)$-структура.

Очевидно, что эта теорема верна и для нормально оснащенных подмногообразий коразмерности 2 в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$.

Структурные объекты индуцированной $(f\xi\eta\rho)$-структуры на M_{n-1}:

$$f_j^{\,l},\quad \tilde{\eta}^A_j = \{\tilde{\eta}^\alpha_j,\ \tilde{\eta}^{(n+2)}_j\},\quad \tilde{\xi}^l_B = \{\tilde{\xi}^l_\beta,\ \tilde{\xi}^l_{(n+2)}\},$$
$$\rho^B_A = \{\rho^\beta_\alpha,\ \rho^\beta_{(n+2)},\ \rho^{(n+2)}_\alpha,\ \rho^{(n+2)}_{(n+2)} = 0\}$$

определяются из разложения векторов $\varphi\vec{\Lambda}_l$, $\varphi\vec{N}_\alpha$, $\vec{\xi}$ по векторам базиса $\{\vec{\Lambda}_i, \vec{N}_\alpha\}$:

$$\varphi\vec{\Lambda}_l = f_l^{\,j}\vec{\Lambda}_j + \tilde{\eta}^\alpha_l \vec{N}_\alpha, \tag{2.10}$$

$$\varphi\vec{N}_\beta = -\tilde{\xi}^j_\beta\vec{\Lambda}_j + \rho^\alpha_\beta \vec{N}_\alpha, \tag{2.11}$$

$$\vec{\xi} = \tilde{\xi}^j_{(n+2)}\vec{\Lambda}_j - \rho^\alpha_{(n+2)}\vec{N}_\alpha, \tag{2.12}$$

а также из формул:

$$\tilde{\eta}^{(n+2)}_l = \eta_I \Lambda^I_l, \tag{2.13}$$

$$\rho^{(n+2)}_\alpha = \eta_I N^I_\alpha. \tag{2.14}$$

Компоненты индуцированной $(f\xi\eta\rho)$-структуры на подмногообразии M_{n-1} подчинены известным конечным соотношениям (см. [6], [9]):

$$\begin{aligned} f_k^{\,l} f_j^{\,k} &= -\delta_j^l + \tilde{\eta}^A_j \tilde{\xi}^l_A, \\ f_k^{\,l}\tilde{\xi}^k_A &= -\rho^B_A \tilde{\xi}^l_B, \\ f_k^{\,l}\tilde{\eta}^B_l &= -\rho^B_A \tilde{\eta}^A_k, \\ \rho^B_A \rho^C_B &= -\delta^C_A + \tilde{\eta}^C_l \tilde{\xi}^l_A. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Дифференциальные уравнения полей структурных объектов индуцированной на $M_{n-1}(f\xi\eta\rho)$-структуры получаются непосредственным дифференцированием уравнений (2.10)—(2.14) с учетом (2.2)—(2.4), (2.6), (2.9):

$$df_j^i - f_l^i\theta_j^l + f_j^l\theta_l^i = f_{jk}^i\theta^k, \tag{2.16}$$

$$d\tilde{\xi}_\alpha^i - \tilde{\xi}_\beta^i\theta_\alpha^\beta + \tilde{\xi}_\alpha^j\theta_j^i = \xi_{\alpha k}^i\theta^k, \tag{2.17}$$

$$d\tilde{\xi}_{(n+2)}^i + \tilde{\xi}_{(n+2)}^j\theta_j^i = \xi_{(n+2)k}^i\theta^k, \tag{2.18}$$

$$d\tilde{\eta}_i^\alpha - \tilde{\eta}_j^\alpha\theta_i^j + \tilde{\eta}_i^\beta\theta_\beta^\alpha = \eta_{ik}^\alpha\theta^k, \tag{2.19}$$

$$d\tilde{\eta}_i^{(n+2)} - \tilde{\eta}_j^{(n+2)}\theta_i^j = \eta_{ik}^{(n+2)}\theta^k, \tag{2.20}$$

$$d\rho_\beta^\alpha - \rho_\gamma^\alpha\theta_\beta^\gamma + \rho_\beta^\gamma\theta_\gamma^\alpha = \rho_{\beta k}^\alpha\theta^k, \tag{2.21}$$

$$d\rho_{(n+2)}^\alpha + \rho_{(n+2)}^\gamma\theta_\gamma^\alpha = \rho_{(n+2)k}^\alpha\theta^k, \tag{2.22}$$

$$d\rho_\beta^{(n+2)} - \rho_\gamma^{(n+2)}\theta_\beta^\gamma = \rho_{\beta k}^{(n+2)}\theta^k. \tag{2.23}$$

Из дифференциальных уравнений (2.16) и (2.21) следует, что величины $\{f_j^i\}$, $\{\rho_\beta^\alpha\}$ являются линейными однородными объектами (тензорами типа (1.1)), причем $\{f_j^i\}$ присоединен к группе $GL(n-1, R)$, а $\{\rho_\beta^\alpha\}$—группе $GL(2, R)$.

Из дифференциальных уравнений (2.19)—(2.20) следует, что система величин $\{\tilde{\eta}_i^A\}$ определяет геометрический объект, присоединенный к группе $GL(n-1, R)\times GL(2, R)$. Поле этого объекта определяет в каждой точке $x\in M_{n-1}$ двупараметрический пучок гиперплоскостей $\tilde{\eta}_x^A$ с общей инвариантной осью $\tilde{\eta}$, определенной в репере $\{\vec{A}_i, \vec{N}_\alpha\}$ системой уравнений:

$$\tilde{\eta}_i^A x^i = 0, \quad x^\alpha = 0. \tag{2.24}$$

Ось $\tilde{\eta}$ пучка плоскостей $\tilde{\eta}^A$ в случае максимальности ранга матрицы $\|\tilde{\eta}_i^A\|$ (т. е. $\operatorname{rang}\|\tilde{\eta}_i^A\|=3$) имеет размерность, равную $(n-4)$. Таким образом, поле геометрического объекта $\{\tilde{\eta}_i^A\}$ в случае максимальности ранга $\|\tilde{\eta}_i^A\|$ определяет распределение $(n-4)$-мерных плоскостей $\tilde{\eta}$, каждый элемент которого принадлежит касательной плоскости $T_x(M_{n-1})$ поверхности M_{n-1}.

Системы величин $\{\tilde{\eta}_i^\alpha\}$ и $\{\tilde{\eta}_i^{(n+2)}\}$ определяют самостоятельные геометрические объекты, являющиеся подобъектами объекта $\{\tilde{\eta}_i^A\}$. Поле геометрического объекта $\{\tilde{\eta}_i^\alpha\}$ определяет поле однопараметрического пучка гиперплоскостей $\tilde{\eta}^\alpha$ в $T(M_{n-1})$ с общей инвариантной осью $\tilde{\eta}'$. Ось $\tilde{\eta}'$ пучка плоскостей $\tilde{\eta}^\alpha$ в случае максимальности ранга матрицы (т. е. $\operatorname{rang}\|\tilde{\eta}_i^\alpha\|=2$) имеет размерность, равную $(n-3)$. Таким образом, поле геометрического объекта $\{\tilde{\eta}_i^\alpha\}$ в случае максимальности ранга матрицы $\|\tilde{\eta}_i^\alpha\|$ определяет распределение $(n-3)$-мерных плоскостей $\tilde{\eta}'$, каждый элемент которого принадлежит касательной плоскости $T_x(M_{n-1})$. Очевидно, что распределение $\tilde{\eta}$ есть подрасслоение распределения $\tilde{\eta}'$, т. е. каждый элемент распределения $\tilde{\eta}$ содержится в соответствующем элементе распределения $\tilde{\eta}'$.

Из (2.10) следует, что образ вектора $\vec{C}=C^i\vec{\Lambda}_i \in T_x(M_{n-1})$, полученный под действием аффинора φ, принадлежит касательной плоскости $T_x(M_{n-1})$ тогда и только тогда, когда координаты вектора $\vec{C}$ являются решением системы уравнений

$$\tilde{\eta}_i^\alpha x^i=0, \quad x^\alpha=0.$$

Следовательно, элементы распределения $\tilde{\eta}'$ натянуты на такую систему векторов $\{\vec{C}_1, \vec{C}_2, \ldots\}$ из $T_x(M_{n-1})$, что векторы $\{\varphi\vec{C}_1, \varphi\vec{C}_2, \ldots\}$ также принадлежат плоскости $T_x(M_{n-1})$. Это и есть геометрическая интерпретация поля объекта $\{\tilde{\eta}_i^\alpha\}$. Если в каждой точке $x \in M_{n-1}$ $T_x(M_{n-1}) \subset \eta_x$ или $\vec{\xi}_x \in T_x(M_{n-1})$, то элемент распределения $\tilde{\eta}'$ совпадает с плоскостью $T_x(M_{n-1}) \cap \varphi T_x(M_{n-1})$.

Поле геометрического объекта $\{\tilde{\eta}_i^{(n+2)}\}$ определяет распределение $(n-2)$-мерных линейных элементов $\tilde{\eta}^{(n+2)}$, каждый элемент которого принадлежит плоскости $T_x(M_{n-1})$. Очевидно, что распределение $\tilde{\eta}$ является подрасслоением распределения $\tilde{\eta}^{(n+2)}$. Из (2.13) следует, что в каждой точке $x \in M_{n-1}$ элемент распределения $\tilde{\eta}^{(n+2)}$ совпадает с плоскостью пересечения касательной плоскости $T_x(M_{n-1})$ с элементом распределения η_x, т. е. $\tilde{\eta}_x^{(n+2)}=\lambda_x=T_x(M_{n-1}) \cap \eta_x$. Это и есть геометрическая интерпретация поля геометрического объекта $\{\tilde{\eta}_i^{(n+2)}\}$.

Из дифференциальных уравнений (2.17)—(2.18) следует, что система величин $\{\tilde{\xi}_A^i\}$ определяет геометрический объект, присоединенный к группе $GL(n-1, R) \times GL(2, R)$. Поле этого геометрического объекта в случае максимальности ранга матрицы $\|\tilde{\xi}_A^i\|$ (т. е. $\operatorname{rang}\|\tilde{\xi}_A^i\|=3$) определяет распределение трехмерных плоскостей $\tilde{\xi}$, каждый элемент которого содержится в $T_x(M_{n-1})$ и натянут на векторы

$$\vec{\xi}_A=\tilde{\xi}_A^i\vec{\Lambda}_i. \qquad (2.25)$$

Геометрические объекты $\{\tilde{\xi}_\alpha^i\}$ и $\{\tilde{\xi}_{(n+2)}^i\}$ являются подобъектами объекта $\{\tilde{\xi}_A^i\}$. Поле геометрического объекта $\{\tilde{\xi}_\alpha^i\}$ в случае максимальности ранга матрицы $\|\tilde{\xi}_\alpha^i\|$ (т. е. $\operatorname{rang}\|\tilde{\xi}_\alpha^i\|=2$) определяет распределение двумерных плоскостей $\tilde{\xi}'$, каждый элемент которого содержится в $T_x(M_{n-1})$ и натянут на векторы $\vec{\xi}_\alpha$. Из (2.11) следует, что в каждой точке $x\in M_{n-1}$ элемент распределения $\tilde{\xi}'$ есть проекция образа нормально оснащенной плоскости φN_x на плоскость $T_x(M_{n-1})$ в направлении N_x. Поле геометрического объекта $\tilde{\xi}^i_{(n+2)}$ определяет распределение одномерных направлений $\tilde{\xi}_{(n+2)}$, каждый элемент которого коллинеарен вектору $\vec{\xi}_{(n+2)}$. Из (2.12) следует, что каждый вектор $\vec{\xi}_{(n+2)}$ является проекцией вектора $\vec{\xi}_x$ на плоскость $T_x(M_{n-1})$ в направлении N_x.

В работе [12] показано, что распределения $\tilde{\eta}$ и $\tilde{\xi}$ инвариантны относительно действия аффинора f. Известно, что аффинор f действует на векторы, принадлежащие элементам распределения $\tilde{\eta}$, как аффинор почти комплексной структуры.

Н. Д. Поляковым в работе [12] показано, что в зависимости от типа поверхности M_{n-1} элементы распределения $\tilde{\eta}$ в каждой точке $x\in M_{n-1}$ могут быть либо $(n-2)$-мерными, либо $(n-4)$-мерными, а элементы распределения $\tilde{\xi}$ могут быть либо одномерными, либо трехмерными. Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Распределение $\tilde{\eta}$ является распределением $(n-2)$-мерных плоскостей тогда и только тогда, когда

а) либо M_{n-1} — инвариантное подмногообразие в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$;

б) либо распределение плоскостей $\lambda_x=\eta_x\cap T_x(M_{n-1})$ инвариантно относительно действия аффинора φ (при $T_x(M_{n-1})\not\subset\eta_x$).

в) либо подмногообразие M_{n-1} является интегральным многообразием распределения η.

Во всех остальных случаях $\tilde{\eta}$-распределение $(n-4)$-мерных плоскостей.

В силу этого, ранг матрицы $\|\tilde{\eta}^A_i\|$ может быть равным либо трем, либо единице.

Утверждение 2. Распределение $\tilde{\xi}$ является распределением прямых тогда и только тогда, когда

а) либо нормальное расслоение инвариантно относительно действия аффинора φ;

б) либо в каждой точке $x\in M_{n-1}$-плоскости N_x и φN_x пересекаются по прямой t_x;

в) либо нормально оснащающая плоскость N_x содержит структурный вектор $\vec{\xi}_x$.

Во всех остальных случаях $\tilde{\xi}$-распределение трехмерных плоскостей.

В силу этого утверждения, ранг матрицы $\|\tilde{\xi}^i_A\|$ может быть равным либо трем, либо единице.

Утверждение 3. Ранг матрицы $\|f\|$ индуцированной $(f\xi\eta\rho)$ структуры на подмногообразии M_{n-1} коразмерности 2, понижается на одну единицу, т. е. $\operatorname{rang}\|f\|=(n-2)$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

1) либо в каждой точке $x \in M_{n-1}$ структурный вектор $\vec{\xi}_x$ принадлежит касательной плоскости $T_x(M_{n-1})$;

2) либо подмногообразие M_{n-1} в каждой точке $x \in M_{n-1}$ нормально оснащено плоскостью N_x, принадлежащей η_x;

3) либо подмногообразие M_{n-1} в каждой точке $x \in M_{n-1}$ нормально оснащено двумерной плоскостью N_x, пересекающей плоскость $\varphi T_x(M_{n-1})$ по прямой l_x'.

Необходимость. Пусть $\operatorname{rang}\|f\|=(n-2)$. Это означает, что компоненты тензора f_j^i удовлетворяют соотношениям вида:

$$l^i f_i^j = 0, \quad l_j f_i^j = 0, \tag{2.26}$$

где не все l^i и, следовательно, не все l_i равны нулю. Рассмотрим в плоскости $T_x(M_{n-1})$ ненулевой вектор

$$\vec{l} = l^i \vec{\Lambda}_i$$

и ненулевой ковектор, определенный объектом l_i. Если $\vec{l}=\vec{\xi}_{(n+2)}$, то из соотношений (2.15) и (2.26) следует, что $\rho^{\alpha}_{(n+2)}=0$. Следовательно, вектор $\vec{\xi}_x$ принадлежит плоскости $T_x(M_{n-1})$, т. е. условие 1) выполняется. Если же $l_i=\eta_i^{(n+2)}$, то из соотношений (2.15) и (2.26). следует, что $\rho_{\alpha}^{(n+2)}=0$. Следовательно, поверхность нормально оснащена полем плоскостей, принадлежащих элементам распределения η_x, т. е. условие 2) выполняется.

Предположим теперь, что $l^i \neq \tilde{\xi}^{i}_{(n+2)}$ и $l_i \neq \tilde{\eta}_i^{(n+2)}$. При выполнении этих условий очевидно, что ненулевой вектор $\varphi\vec{l}$ принадлежит нормальной плоскости N_x: $\varphi\vec{l}=l^i\tilde{\eta}_i^{\alpha}\vec{N}_{\alpha}$. Последнее означает, что в каждой точке $x \in M_{n-1}$ плоскости $\varphi T_x(M_{n-1})$ и N_x пересекаются по прямой l_x' с направляющим вектором $\varphi\vec{l}$.

Достаточность. Если выполняется хотя бы одно из первых двух требований теоремы, то либо $\rho^{\alpha}_{(n+2)}=0$, либо $\rho_{\alpha}^{(n+2)}=0$. При выполнении хотя бы одного из выше указанных равенств из соотношений (2.15) следует, что $\operatorname{rang}\|f\|=(n-2)$.

Пусть выполняется требование 3) утверждения, т. е. в каждой точке $x \in M_{n-1}$ $N_x \cap \varphi T_x(M_{n-1})=l_x'$. Если плоскость N_x пересекается с плоскостью $\varphi T_x(M_{n-1})$ по прямой l_x', то в касательной плоскости $T_x(M_{n-1})$ существует ненулевой вектор $\vec{l}=l^i\vec{\Lambda}_i$ такой, что его образ $\varphi\vec{l}$ принадлежит нормальной плоскости N_x. Так как

$$\varphi\vec{l}=l^i(f_i^j\vec{\Lambda}_j+\tilde{\eta}_i^{\alpha}\vec{N}_{\alpha}),$$

то $l^i f_i^j=0$. Следовательно, $\mathrm{rang}\,\|f\|=(n-2)$. Справедливость утверждения 3 доказана.

Замечание. При одновременном выполнении условий 1 и 2 утверждения 3 ранг матрицы $\|f\|$ остается равным $(n-2)$.

Для подмногообразия M_{n-1} в $M_{n+2}(\varphi\xi\eta)$ нормально оснащенного двумерной плоскостью N_x, не принадлежащей элементу распределения η_x и такого, что касательная плоскость в каждой точке $x \in M_{n-1}$ не содержит структурный вектор $\vec{\xi}_x$, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. Ранг матрицы $\|f\|$, индуцированной $(f\xi\eta\rho)$-структуры на подмногообразии M_{n-1} коразмерности 2 в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ уменьшается на две единицы (т. е. $\mathrm{rang}\|f\|=n-3$) тогда и только тогда, когда в каждой точке $x \in M_{n-1}$ подмногообразие M_{n-1} нормально оснащено двумерной плоскостью N_x, принадлежащей плоскости $\varphi(T_x(M_{n-1}))$.

Взаимосвязь рангов матриц $\|f\|$ и $\|\rho\|$ индуцированной $(f\xi\eta\rho)$-структуры на подмногообразии M_{n-1} в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ вытекает из следующего утверждения.

Утверждение 5. Ранг матрицы $\|\rho\|$ индуцированной $(f\xi\eta\rho)$-структуры на подмногообразии M_{n-1} в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ уменьшается на s-единиц, т. е. $\mathrm{rang}\|\rho\|=3-s$ $(s=1, 2, 3)$ тогда и только тогда, когда ранг матрицы $\|f\|$ уменьшается на s-единиц.

Утверждение 5 доказывается с учетом соотношений (2.15).

Н. М. Остиану в работе [9] были введены понятия ранга и коранга $(f\xi\eta\rho)$-структуры. Рангом $(f\xi\eta\rho)$-структуры называется ранг матрицы $\|f\|$, а корангом — ранг матрицы $\|\rho\|$.

Из утверждений 3—5 следует, что для подмногообразий коразмерности 2 в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ максимальное значение ранга равно $(n-1)$, минимальное — $(n-4)$ и максимальное значение коранга равно 3, минимальное — нулю.

Следствие. Ранг и коранг индуцированной $(f\xi\eta\rho)$-структуры на M_{n-1} в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ понижаются одновременно на одно и то же число.

Из вышеуказанных утверждений вытекает, что индуцированная $(f\xi\eta\rho)$-структура на M_{n-1} порождает в касательном расслоении $T(M_{n-1})$ два распределения: распределение $\tilde{\eta}$ и распределение $\tilde{\xi}$. Особый интерес представляют те $(f\xi\eta\rho)$-структуры, для которых в каждой точке $x \in M_{n-1}$ элементы распределений $\tilde{\eta}$ и $\tilde{\xi}$ определяют π-структуру (структуру почти произведения) в $T_x(M_{n-1})$. Очевидно, что если $\tilde{\xi}_x$ и $\tilde{\eta}_x$ определяют π-структуру в $T_x(M_{n-1})$, то $\mathrm{rang}\,\|\tilde{\xi}^i_A\|=\mathrm{rang}\,\|\tilde{\eta}_i^A\|$.

Замечание. В этой работе рассмотрим только те нормально оснащенные подмногообразия M_{n-1} в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$, на которых индуцируется такая $(f\xi\eta\rho)$-структура, что элементы распределений $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\eta}$ определяют π-структуру в $T_x(M_{n-1})$.

2. Классификация индуцированных $(f\xi\eta\rho)$-структур на M_{n-1}.

Определение. $(f\xi\eta\rho)$-структура на дифференцируемом многообразии M называется $(f\xi\eta\rho)$-структурой рода (k, l, p, q), если $\operatorname{rang}\|f\|=k$, $\operatorname{rang}\|\rho\|=q$, размерность элементов распределения ξ равна l и размерность элементов распределения η равна p.

Из определения следует, что $(f\xi\eta\rho)$-структура рода (k, l, p, q) является $(f\xi\eta\rho)$-структурой ранга k и коранга q.

Для проведения классификации индуцированных $(f\xi\eta\rho)$-структур на подмногообразии M_{n-1} в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$, оснащенном полем нормальных плоскостей N_x, будем различать три типа подмногообразий M_{n-1}:

1. $\vec{\xi}_x \notin T_x(M_{n-1})$, $T_x(M_{n-1}) \not\subset \eta_x$;
2. $\vec{\xi}_x \in T_x(M_{n-1})$;
3. $T_x(M_{n-1}) \subset \eta_x$;

и три типа оснащения подмногообразия M_{n-1} в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$:

1. $\vec{\xi}_x \in N_x$, $N_x \subset \eta_x$;
2. $\vec{\xi}_x \in N_x$;
3. $N_x \subset \eta_x$.

Замечание. Фактически существует семь различных видов оснащенных подмногообразий коразмерности 2 в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$, так как не совместны требования 2 и 2, 3 и 3.

Из уравнений (2.12)—(2.13) следует, что для подмногообразий типа 2: $\rho^{\alpha}_{(n+2)}=0$, а для M_{n-1}—типа 3: $\tilde{\eta}^{(n+2)}_i=0$. Аналогичные соотношения справедливы для трех типов оснащения. А именно, для оснащения типа 1: $\tilde{\xi}^i_{(n+2)}\neq 0$, $\rho^{(n+2)}_{\alpha}\neq 0$, для оснащения типа 2: $\tilde{\xi}^i_{(n+2)}=0$, а для оснащения типа 3: $\rho^{(n+2)}_{\alpha}=0$.

Рассмотрим в отдельности каждый из указанных типов подмногообразий коразмерности 2 в многообразии почти контактной структуры.

А. Пусть M_{n-1}—подмногообразие типа 1 в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$. В этом случае $\tilde{\eta}^{n+2}_i\neq 0$ и $\rho^{\alpha}_{(n+2)}\neq 0$.

а) Будем считать, что подмногообразие M_{n-1} нормально оснащено полем плоскостей N_x, не принадлежащих элементу η_x и не содержащих вектор $\vec{\xi}_x$ (т. е. оснащение—типа 1). В этом случае, в силу утверждения 1, распределение $\tilde{\eta}$ является распределением $(n-2)$-мерных плоскостей, если распределение плоскостей λ_x инвариантно относительно действия аффинора φ, а в остальных случаях $\tilde{\eta}$—распределение $(n-4)$-мерных плоскостей. Из утверждения 2 следует, что распределение $\tilde{\xi}$ является распределением прямых, если в каждой точке $x\in M_{n-1}$ $N_x \cap \varphi N_x = t_x$, а в остальных случаях $\tilde{\xi}$-распределение трехмерных плоскостей, натянутых на векторы $\vec{\xi}_A$.

Так как M_{n-1} нормально оснащено полем плоскостей N_x, не принадлежащих η_x, то эту плоскость можно выбрать так, что размерность пересечения с $\varphi T_x(M_{n-1})$ может быть равна либо нулю, либо единице. Из утверждений 3—4 следует, что в зависимости от размерности пересечения плоскостей N_x и $\varphi T_x(M_{n-1})$ ранг индуцированной $(f\xi\eta\rho)$-структуры на M_{n-1} может быть равным либо $(n-1)$, либо $(n-2)$ и коранг — либо трем, либо двум.

Следовательно, справедлива теорема.

Теорема 1. Если подмногообразие M_{n-1} коразмерности 2, погруженное в дифференцируемое многообразие $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ — типа I и нормально оснащена полем плоскостей N_x типа I, то на M_{n-1} естественным образом возникают:

1) $(f\xi\eta\rho)$-структура рода $(n-1, 3, n-4, 3)$, если $\varphi\lambda_x \not\subset \lambda_x$, $\dim(N_x \cap \varphi N_x)=0$ и $\dim(\varphi T_x(M_{n-1}) \cap N_x)=0$;

2) $(f\xi\eta\rho)$-структура рода $(n-2, 3, n-4, 2)$, если $\varphi\lambda_x \not\subset \lambda_x$, $\dim(N_x \cap \varphi N_x)=0$ и $\dim(\varphi T_x(M_{n-1}) \cap N_x)=1$;

3) $(f\xi\eta\rho)$-структура рода $(n-1, 1, n-2, 3)$, если $\varphi\lambda_x=\lambda_x$, $N_x \cap \varphi N_x=t_x$ и $\dim(\varphi T_x(M_{n-1}) \cap N_x)=0$;

4) $(f\xi\eta\rho)$-структура рода $(n-2, 1, n-2, 2)$, если $\varphi\lambda_x=\lambda_x$, $N_x \cap \varphi N_x=t_x$ и $\dim(\varphi T_x(M_{n-1}) \cap N_x)=1$.

б) Будем считать, что подмногообразие M_{n-1} типа 1 в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ нормально оснащено полем плоскостей N_x, содержащих вектор $\vec{\xi}_x$ (т. е. оснащение — типа 2). В этом случае $\tilde{\xi}$ — распределение одномерных направлений (см. утверждение 2). В данном случае элементы распределений $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\eta}$ определяют π-структуру в $T_x(M_{n-1})$, если $\tilde{\eta}$ — распределение $(n-2)$-мерных плоскостей в $T(M_{n-1})$. Следовательно, распределение плоскостей λ_x инвариантно относительно действия аффинора φ. Ранг индуцированной $(f\xi\eta\rho)$-структуры на M_{n-1} равен $(n-1)$, коранг — трем, если $\dim(\varphi T_x(M_{n-1}) \cap N_x)=0$ и ранг равен $(n-2)$, коранг — двум, если $\dim(\varphi T_x(M_{n-1}) \cap N_x)=1$.

Следовательно, справедлива теорема.

Теорема 2. Если подмногообразие M_{n-1} коразмерности 2, погруженное в дифференцируемое многообразие $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ — типа 1, и нормальное оснащено полем плоскостей N_x типа 2, то на M_{n-1} естественным образом возникают:

1) $(f\xi\eta\rho)$-структура рода $(n-1, 1, n-2, 3)$, если $\varphi\lambda_x=\lambda_x$ и $\dim(\varphi T_x(M_{n-1}) \cap N_x)=0$;

2) $(f\xi\eta\rho)$-структура рода $(n-2, 1, n-2, 2)$, если $\varphi\lambda_x=\lambda_x$ и $\dim(\varphi T_x(M_{n-1}) \cap N_x)=1$.

в) Будем считать, что подмногообразие M_{n-1} типа 1 в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ нормально оснащено полем плоскостей N_x, принадлежащих элементу распределения η (т. е. оснащение—типа 3). Если в каждой точке $x \in M_{n-1}$ $N_x \subset \eta_x$, то $\rho_\alpha^{(n+2)}=0$. С учетом (2.15), получаем $f_j^i \tilde{\eta}_i^{(n+2)}=0$. Следовательно, в случае $N_x \subset \eta_x$, ранги аффиноров $\|f\|$ и $\|\rho\|$ уменьшаются на одну единицу, если $N_x \not\subset \varphi T_x(M_{n-1})$ и уменьшаются на две единицы, если $N_x \subset \subset \varphi T_x(M_{n-1})$. Распределение $\tilde{\eta}$ является распределением $(n-2)$-мерных плоскостей (если $\varphi\lambda_x=\lambda_x$), либо распределением $(n-4)$-мерных плоскостей во всех остальных случаях. Распределение $\tilde{\xi}$ — распределение прямых, если нормальное расслоение N инвариантно относительно действия аффинора φ и $\tilde{\xi}$ — распределение трехмерных плоскостей во всех остальных случаях.

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 3. Если подмногообразие M_{n-1} коразмерности 2, погруженное в дифференцируемое многообразие $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ типа 1 и нормально оснащено полем плоскостей N_x типа 3, то на M_{n-1} естественным образом возникают:

1) $(f\xi\eta\rho)$-структура рода $(n-2, 3, n-4, 2)$, если $\varphi\lambda_x \not\subset \lambda_x$, $\dim(\varphi N_x \cap N_x)=0$ и $\dim(\varphi T_x(M_{n-1}) \cap N_x)=1$;

2) $(f\xi\eta\rho)$-структура рода $(n-3, 3, n-4, 1)$, если $\varphi\lambda_x \not\subset \lambda_x$, $\dim(\varphi N_x \cap N_x)=0$ и $\dim(\varphi T_x(M_{n-1}) \cap N_x)=2$;

3) $(f\xi\eta\rho)$-структура рода $(n-2, 1, n-2, 2)$, если $\varphi\lambda_x=\lambda_x$, $\varphi N_x=N_x$ и $\dim(\varphi T_x(M_{n-1}) \cap N_x)=1$.

Б. Пусть подмногообразие коразмерности 2 в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ — типа 2, т. е. в каждой точке $x \in M_{n-1}$ вектор $\vec{\xi}_x$ принадлежит касательной плоскости $T_x(M_{n-1})$. В этом случае $\rho^\alpha_{(n+2)}=0$. Из соотношений (2.15) получим $f_j^i \tilde{\xi}^j_{(n+2)}=0$. Следовательно, на M_{n-1} типа 2 не может возникать $(f\xi\eta\rho)$ — структура максимального ранга и максимального коранга.

а) Будем считать, что подмногообразие M_{n-1} нормально оснащено полем плоскостей N_x, не принадлежащих элементам распределения η (т. е. оснащение — типа 1). В этом случае распределение η является распределением $(n-2)$-мерных плоскостей, если $\varphi\lambda_x=\lambda_x$. Так как для поверхностей типа 2 в каждой точке $x \in M_{n-1}$ плоскость $\varphi T_x(M_{n-1})$ совпадает с плоскостью $\varphi\lambda_x$, то в данном случае $\tilde{\eta}$ — распределение $(n-2)$-мерных плоскостей, если M_{n-1} инвариантное подмногообразие (φ — инвариантное подмногообразие [24]). Верно и обратное утверждение.

Таким образом, доказано

Утверждение 6. На подмногообразии M_{n-1} типа 2 в многообразии $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ распределение $\tilde{\eta}$ — распределение $(n-2)$-мерных плоскостей тогда и только тогда, когда M_{n-1} — инвариантная поверхность.

Из этого утверждения следует, что если M_{n-1} неинвариантная поверхность в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$, то $\tilde{\eta}$—распределение $(n-4)$-мерных плоскостей. Распределение $\tilde{\xi}$ является распределением прямых, если в каждой точке $x \in M_{n-1}$ плоскости N_x и φN_x пересекаются по некоторой прямой и в остальных случаях $\tilde{\xi}$—распределение трехмерных плоскостей. В зависимости от размерности пересечения плоскостей $\varphi T_x(M_{n-1})$ и N_x ранг индуцированной $(f\xi\eta\rho)$-структуры может быть равным либо $(n-2)$, либо $(n-3)$, коранг — либо двум, либо единице.

Теорема 4. Если подмногообразие M_{n-1} коразмерности 2, погруженное в дифференцируемое многообразие $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$, есть поверхность типа 2 и оно нормально оснащено полем плоскостей N_x типа 1, то на M_{n-1} естественным образом возникают:

1) $(f\xi\eta\rho)$-структура рода $(n-2, 3, n-4, 2)$, если M_{n-1} — неинвариантная поверхность, $\dim(\varphi N_x \cap N_x)=0$, $\dim(\varphi T_x(M_{n-1}) \cap \cap N_x)=0$;

2) $(f\xi\eta\rho)$-структура рода $(n-3, 3, n-4, 1)$, если M_{n-1} — неинвариантная поверхность, $\dim(\varphi N_x \cap N_x)=0$, $\dim(\varphi T_x(M_{n-1}) \cap \cap N_x)=1$;

3) $(f\xi\eta\rho)$-структура рода $(n-2, 1, n-2, 2)$, если M_{n-1} — инвариантная поверхность и $\varphi N_x \cap N_x = t_x$.

б) Будем считать, что M_{n-1} нормально оснащено полем плоскостей N_x, принадлежащих элементам распределения η (т. е. оснащение типа 3).

На таких оснащенных подмногообразиях индуцируется $(f\xi\eta\rho)$-структура четырех родов.

Теорема 5. Если подмногообразие коразмерности 2, погруженное в дифференцируемое многообразие $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ — типа 2 и нормально оснащено полем плоскостей N_x типа 3, то на M_{n-1} естественным образом возникают:

1) $(f\xi\eta\rho)$-структура рода $(n-2, 3, n-4, 2)$, если M_{n-1} — неинвариантная поверхность, $\dim(\varphi N_x \cap N_x)=0$, $\dim(\varphi T_x(M_{n-1}) \cap \cap N_x)=0$;

2) $(f\xi\eta\rho)$-структура рода $(n-3, 3, n-4, 1)$, если M_{n-1} — неинвариантная поверхность, $\dim(\varphi N_x \cap N_x)=0$, $\dim(\varphi T_x(M_{n-1}) \cap \cap N_x)=1$;

3) $(f\xi\eta\rho)$-структура рода $(n-4, 3, n-4, 0)$, если M_{n-1} — неинвариантная поверхность, $\dim(\varphi N_x \cap N_x)=0$, $N_x \subset \varphi T_x(M_{n-1})$;

4) $(f\xi\eta\rho)$-структура рода $(n-2, 1, n-2, 2)$, если M_{n-1} — инвариантная поверхность, $\varphi N_x = N_x$ (инвариантное оснащение).

В. Пусть подмногообразие коразмерности 2 в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ — типа 3, т. е. является интегральным подмногообразием размерности $(n-1)$ распределения η. В этом случае $\tilde{\eta}_i^{(n+2)}=0$ Из утверждения 1 следует, что для таких поверхностей $\tilde{\eta}$—распределение $(n-2)$-мерных плоскостей $H_x = \varphi T_x(M_{n-1}) \cap \cap T_x(M_{n-1})$. В данном случае элементы распределений $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\eta}$ определяют π-структуру в $T_x(M_{n-1})$, если $\tilde{\xi}$—распределение прямых. Следовательно, поверхность M_{n-1} должна быть нормально оснащена полем плоскостей N_x, либо содержащих вектор $\vec{\xi}_x$, либо удовлетворяющих условию $\varphi N_x \cap N_x = t_x$. В зависимости от размерности пересечения плоскостей $\varphi T_x(M_{n-1})$ и N_x ранг индуцированной $(f\xi\eta\rho)$-структуры на M_{n-1} может быть равным либо $(n-1)$, либо $(n-2)$, коранг — либо трем, либо двум.

Следовательно, справедлива теорема.

Теорема 6. Если подмногообразие коразмерности 2, погруженное в дифференцируемое многообразие $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ — типа 3 и нормально оснащено полем плоскостей N_x, то на M_{n-1} естественным образом возникают:

1) $(f\xi\eta\rho)$-структура — рода $(n-1, 1, n-2, 3)$, если $\dim(\varphi T_x(M_{n-1}) \cap N_x) = 0$ и в каждой точке $x \in M_{n-1}$ либо $\xi_x \in \in N_x$, либо $N_x \cap \varphi N_x = t_x$;

2) $(f\xi\eta\rho)$-структура — рода $(n-2, 1, n-2, 2)$, если $\dim(\varphi T_x(M_{n-1}) \cap N_x) = 1$ и в каждой точке $x \in M_{n-1}$ либо $\xi_x \in N_x$, либо $N_x \cap \varphi N_x = t_x$.

Таким образом, рассмотрены все типы подмногообразий коразмерности 2 в многообразии почти контактной структуры. Классификацию индуцированных $(f\xi\eta\rho)$ — структур на оснащенных подмногообразиях M_{n-1} коразмерности 2 в многообразии почти контактной структуры можно иллюстрировать прилагаемой таблицей.

Из теорем 1—6 следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 7. $(f\xi\eta\rho)$-структура, индуцированная на подмногообразии коразмерности 2 в многообразии почти контактной структуры может быть шести родов: $(n-1, 3, n-4, 3)$, $(n-1, 1, n-2, 3)$, $(n-2, 3, n-4, 2)$, $(n-2, 1, n-2, 2)$, $(n-3, 3, n-4, 1)$, $(n-4, 3, n-4, 0)$.

Индуцированная $(f\xi\eta\rho)$-структура на M_{n-1} будет максимального ранга и максимального коранга, а) если M_{n-1} — типа 1 и нормально оснащена полем плоскостей N_x, не принадлежащих плоскостям η_x и не пересекающих плоскость $\varphi T_x(M_{n-1})$ (см. таблицу № 1); б) если M_{n-1} — типа 3 и нормально оснащена полем плоскостей N_x, не пересекающих плоскость $\varphi T_x(M_{n-1})$ (см. таблицу № 1, 3, 17, 19). Индуцированная $(\varphi\xi\eta\rho)$-структура на M_{n-1} в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ имеет максимально возможные ранги матриц $\|f_j^i\|$, $\|\tilde{\xi}_A^i\|$, $\|\bar{\eta}_i^B\|$, $\|\tilde{\rho}_B^A\|$ если M_{n-1} типа 1, распределение плоскостей λ_x неинвариантно относительно действия аффинора φ и она нормально оснащена полем плоскостей N_x таких, что в каждой точке $x \in M_{n-1}$ $\dim(N_x \cap \varphi N_x) = 0$, $\dim(\varphi T_x(M_{n-1}) \cap N_x) = 0$ (см. таблицу, № 1).

3. Почти контактное вложение.

Определение. Если на подмногообразии, вложенном в дифференцируемое многообразие M_{n+1}, наделенное почти контактной структурой, индуцируется также почти контактная структура, то такое вложение называется почти контактным вложением в M_{n+1}.

Выясним теперь вопрос о возможности почти контактного вложения подмногообразия коразмерности 2 в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$. Очевидно, что на M_{n-1} индуцируется почти контактная структура со структурным тензором $\tilde{f}$, если rang$\|f\|=(n-2)$, распределение $\tilde{\eta}$ является распределением $(n-2)$-мерных плоскостей, а распределение $\tilde{\xi}$ — распределением одномерных направлений, т. е. $(\tilde{f}\xi\eta\rho)$-структура рода $(n-2, 1, n-2, 2)$. Таким образом, справедлива следующая теорема о почти контактном вложении:

Теорема 8 (теорема о почти контактном вложении). На подмногообразии M_{n-1} коразмерности 2 в почти контактном многообразии $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ индуцируется почти контактная структура тогда и только тогда, когда

1) подмногообразие M_{n-1} — типа 1, распределение плоскостей λ_x инвариантно и M_{n-1} нормально оснащено полем плоскостей N_x такими, что а) либо в каждой точке $x \in M_{n-1}$ $N_x \cap \varphi N_x = t_x$ и $\dim(\varphi T_x(M_{n-1}) \cap N_x) = 1$ (см. таблицу, № 4); либо в каждой точке $x \in M_{n-1}$ $\vec{\xi}_x \in T_x(M_{n-1})$ и $\dim(\varphi T_x(M_{n-1}) \cap N_x) = 1$ (см. таблицу, № 6); в) либо нормальное расслоение инвариантно относительно действия аффинора φ и в каждой точке $x \in M_{n-1}$ $\dim(\varphi T_x(M_{n-1}) \cap N_x) = 1$ (см. таблицу, № 9);

2) подмногообразие M_{n-1} — типа 2, инвариантно в M_{n+1} и нормально оснащено полем плоскостей таким, что а) либо в каждой точке $x \in M_{n-1}$ $N_x \cap \varphi N_x = t_x$ (см. таблицу, № 12); б) либо нормальное расслоение инвариантно относительно действия аффинора φ (см. таблицу. № 16);

3) подмногообразие M_{n-1} — типа 3 и нормально оснащено полем плоскостей N_x таким, что а) либо в каждой точке $x \in M_{n-1}$ $\vec{\xi}_x \in T_x(M_{n-1})$ (см. таблицу №№ 3, 18); б) либо в каждой точке $x \in M_{n-1}$ $N_x \cap \varphi N_x = t_x$ (см. таблицу, № 20).

Из теоремы 8 следует, что если подмногообразие M_{n-1} — инвариантно в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$, то оно несет почти контактную структуру со структурными объектами f_j^i, $\tilde{\xi}^i_{(n+2)}$, $\tilde{\eta}_j^{(n+2)}$. Это утверждение было доказано в работе [10] для инвариантной m-мерной поверхности M_m (m — нечетное число) в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$.

Пусть подмногообразие M_{n-1} — неинвариантное подмногообразие и допускает почти контактное вложение в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$. В этом случае M_{n-1} поверхность либо типа 1, либо типа 3.

а) Будем считать, что M_{n-1} — типа 1. Пусть геометрические объекты f_j^i, V^i, u_j являются структурными объектами индуцированной почти контактной структуры на M_{n-1}. Вектор $\vec{V} = V^i \vec{\Lambda}_i$ в данном случае под действием аффинора φ преобразуется в вектор $\varphi\vec{V}$, определяющий прямую пересечения плоскости $\varphi T_x(M_{n-1})$ с N_x. Очевидно, что в каждой точке $x \in M_{n-1}$ прямые V_x, направленные по вектору $\vec{V}$, являются линейными элементами распределения $\tilde{\xi}$. Следовательно, в этом случае $\vec{\xi}_A = P_A \vec{V}$.

Замечание. Если в каждой точке $x \in M_{n-1}$ нормально оснащающаяся плоскость N_x не содержит вектора $\vec{\xi}_x$ и не принадлежит плоскости η_x, то все P_A отличны от нуля; если N_x содержит вектор $\vec{\xi}_x$, то $P_{n+2}=0$; если N_x принадлежит плоскости η_x, то $P_\alpha = 0$.

В каждой точке $x \in M_{n-1}$ структурный ковектор u_i определяет $(n-2)$-мерную плоскость, совпадающую с плоскостью $\tilde{\eta}_x$. Очевидно, что $u_x = \tilde{\eta}_x$, если $\tilde{\eta}_i^A = q^A u_i$.

б) Будем считать, что подмногообразие M_{n-1}, несущее почти контактную структуру, является поверхностью типа 3. Структурные объекты обозначим через f_j^i, $\tilde{V}^i$, $\tilde{u}_j$. В этом случае также справедливы равенства

$$\vec{\xi}_A = \tilde{P}_A \vec{\tilde{V}},$$

где $\vec{\tilde{V}} = \tilde{V}^i \vec{\Lambda}_i$. Если оснащающая плоскость N_x содержит вектор $\vec{\xi}_x$, то $\tilde{P}_{n+2}=0$, в остальных случаях все $\tilde{P}_A$ отличны от нуля. В каждой точке $x \in M_{n-1}$ структурный вектор $\tilde{u}_j$ определяет $(n-2)$-мерную плоскость $\bar{u}_x$, совпадающую с плоскостью $H_x = T_x(M_{n-1}) \cap \varphi T_x(M_{n-1})$.

В работе Е. В. Опольской [8] найдены достаточные аналитические условия, при выполнении которых на многообразии M_m (m — нечетное число), вложенном в многообразие почти контактной структуры M_{n+1}, естественным образом возникает почти контактная структура со структурными объектами f_j^i, $\tilde{\xi}^i_{(n+2)}$, $\tilde{\eta}_j^{(n+2)}$. Фактически в цитированной работе [8] в рассмотрение включены только подмногообразия типа 1 или типа 2 (которые указаны в таблице под номерами 4, 9, 12, 16).

Неинвариантные подмногообразия M_{n-1} коразмерности 2 в многообразии почти контактной структуры изучал Канемаки в работе [18]. Им доказано, что если M_{n-1} нормально оснастить полем плоскостей N_x, содержащих вектор $\vec{\xi}_x$ и пересекающихся с плоскостью $\varphi T_x(M_{n-1})$ по некоторой прямой, то на M_{n-1} возникает почти контактная структура. Фактически Канемаки в работе [18] рассматривал только подмногообразия типа 1 и типа 3 (которые записаны в таблице под номерами 6 и 20).

§ 3. ГЕОМЕТРИЯ ПОДМНОГООБРАЗИЙ КОРАЗМЕРНОСТИ 2

1. Индуцированные структуры на M_{n-1} в многообразии метрической контактной и метрической почти контактной структуры. Пусть задано дифференцируемое многообразие

M_{n+1}, наделенное метрической почти контактной структурой со структурными объектами φ, ξ, η, G, компоненты которых подчинены соотношениям (2.1) и

$$G_{IK}\varphi^I_L\varphi^K_M = G_{LM} - \eta_L\eta_M,$$
$$G_{IK}\xi^I = \eta_K. \tag{3.1}$$

В работе [10] доказана следующая теорема.

Теорема ([10], § 5). На поверхности M_m, погруженной в метрическое почти контактное многообразие $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ и нормально оснащенной полем плоскостей N_x, индуцируется метрическая $(f\xi\eta\rho)$-структура.

Очевидно, что эта теорема верна и для нормально оснащенных подмногообразий коразмерности 2 в многообразии метрической почти контактной структуры. Структурными объектами индуцированной метрической $(f\xi\eta\rho)$-структуры на подмногообразии являются следующие геометрические объекты: $f_j{}^i$, $\hat{\xi}^i_A$, $\hat{\eta}^B_j$, и ρ^B_A (см. § 2) и

$$g_{ij} = G_{IK}\Lambda^I_i\Lambda^K_j, \tag{3.2}$$

$$g_{i\alpha} = G_{IK}\Lambda^I_i N^K_\alpha, \tag{3.3}$$

$$g_{\alpha\beta} = G_{IK}N^I_\alpha N^K_\beta. \tag{3.4}$$

Компоненты структурных объектов индуцированной метрической $(f\xi\eta\rho)$-структуры удовлетворяют соотношениям (2.15), а также ряду соотношений, связывающих компоненты $f_j{}^i$, $\tilde{\xi}^i_A$, $\tilde{\eta}^B_j$, ρ^B_A с объектами (3.2)—(3.4) (см. [10] формула (5.28), а также (1.22) в работе [14]).

Классификацию индуцированных метрических $(f\xi\eta\rho)$-структур на подмногообразии M_{n-1} в многообразии $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ также можно иллюстрировать приложенной таблицей. Следовательно, на подмногообразии M_{n-1} коразмерности 2 в метрическом почти контактном многообразии, оснащенном полем $N(M_{n-1})$ нормально оснащающих плоскостей N_x в зависимости от типа поверхности и от типа ее оснащения, индуцируются шесть различных родов метрических $(f\xi\eta\rho)$-структур: $(n-1, 3, n-4, 3)$, $(n-1, 1, n-2, 3)$, $(n-2, 3, n-4, 2)$, $(n-2, 1, n-2, 2)$, $(n-3, 3, n-4, 1)$, $(n-4, 3, n-4, 0)$.

В дальнейшем будем считать, что исследуемое подмногообразие M_{n-1} нормально оснащено полем плоскостей N_x, ортогональных плоскости $T_x(M_{n-1})$. Такое оснащение поверхности будем называть ортогональным оснащением и обозначать $N_x{}^\perp$. При ортогональном оснащении поверхности M_{n-1} из (3.3) следует:

$$g_{i\alpha} = 0. \tag{3.5}$$

Очевидно, что если поверхность M_{n-1} — типа 1 (см. § 2), то в каждой точке $x \in M_{n-1}$ ортогонально оснащающая плоскость N_x^1 не содержит вектора $\vec{\xi}$ и не принадлежит плоскости η_x (т. е. оснащение — типа 1); если M_{n-1} — типа 2, то $N_x^{\perp} \subset \eta_x$ (т. е. оснащение — типа 3); если M_{n-1} — типа 3, то $\vec{\xi}_x \subset N_x^{\perp}$ (т. е. оснащение — типа 2).

При выполнении условий (3.5) компоненты структурных объектов индуцированной $(f\xi\eta\rho)$-структуры на M_{n-1} удовлетворяют соотношениям (2.15) и соотношениям (получаемым из (1.22), приведенных в [14]):

$$\begin{aligned}
&1.\ g_{ij} f_l{}^j + g_{lj} f_i{}^j = 0,\\
&2.\ g_{\alpha\rho} \rho^{\beta}_{\gamma} + g_{\gamma\rho} \rho^{\beta}_{\alpha} = 0,\\
&3.\ g_{ij} f_k{}^i f_l{}^j + g_{\alpha\beta} \tilde{\eta}^{\alpha}_k \tilde{\eta}^{\beta}_l = g_{kl} - \tilde{\eta}^{(n+2)}_k \tilde{\eta}^{(n+2)}_l,\\
&4.\ g_{\alpha\rho} \rho^{\alpha}_{\gamma} \rho^{\beta}_{\delta} + g_{ij} \tilde{\xi}^i_{\gamma} \tilde{\xi}^j_{\delta} = g_{\gamma\delta} - \rho^{(n+2)}_{\gamma} \rho^{(n+2)}_{\delta},\\
&5.\ g_{ij} \tilde{\xi}^j_{(n+2)} = \tilde{\eta}^{(n+2)}_l,\\
&6.\ g_{ij} \tilde{\xi}^l_{\alpha} = -g_{\alpha\beta} \tilde{\eta}^{\beta}_j,\\
&7.\ \rho^{(n+2)}_{\alpha} = -g_{\alpha\rho} \rho^{\beta}_{(n+2)}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Рассмотрим распределения $\tilde{\eta}$ и $\tilde{\xi}$, определенные, соответственно, полями геометрических объектов $\tilde{\eta}^A_l$ и $\tilde{\xi}^l_B$ (см. § 2). Как видно из соотношений (3.6), элементы этих распределений в каждой точке $x \in M_{n-1}$ ортогональны в метрике g, а следовательно, определяют π-структуру в $T(M_{n-1})$. Из этого следует, что распределение $\tilde{\xi}$ является распределением 3-мерных плоскостей тогда и только тогда, когда распределение $\tilde{\eta}$ — распределение $(n-4)$-мерных плоскостей и распределением одномерных направлений тогда и только тогда, когда $\tilde{\eta}$ — распределение $(n-2)$-мерных плоскостей.

Из соотношений (2.15) и (3.6) следует, что равенства $\tilde{\xi}^l_{\alpha} = 0$, $\tilde{\eta}^{\alpha}_l = 0$ выполняются одновременно. Следовательно, подмногообразие M_{n-1} допускает ортогональное оснащение инвариантное относительно действия аффинора φ, только тогда, когда это подмногообразие M_{n-1} инвариантно в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$.

Утверждение 1. Если подмногообразие M_{n-1} ортогонально оснащено полем плоскостей $N_x^{\perp}$, то матрицы $\|f\|$ и $\|\rho\|$ — вырожденные.

Справедливость утверждения 1 непосредственно следует из соотношений (3.6).

Утверждение 2. Если в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ подмногообразие M_{n-1} — типа 1 или типа 3, то в каждой точке $x \in M_{n-1}$ плоскость $\varphi T_x(M_{n-1})$ пересекается с ортогонально оснащающей плоскостью $N_x^\perp$ по некоторой прямой l_x. Если подмногообразие M_{n-1} — типа 2 и не инвариантно, то в каждой точке $x \in M_{n-1}$ плоскость $N_x^\perp$ принадлежит плоскости $\varphi T_x(M_{n-1})$.

Из утверждений 1 и 2 следует, что на ортогонально оснащенном подмногообразии M_{n-1} не может индуцироваться метрическая $(f\xi\eta\rho)$-структура максимального ранга и максимального коранга. Причем если подмногообразие M_{n-1} — типа 1 или типа 3, то $\operatorname{rang}\|f\|=(n-2)$ и $\operatorname{rang}\|\rho\|=2$, если M_{n-1} — типа 2 и не инвариантно, то $\operatorname{rang}\|f\|=(n-4)$ и $\operatorname{rang}\|\rho\|=0$, если оно инвариантно, то $\operatorname{rang}\|f\|=(n-2)$ и $\operatorname{rang}\|\rho\|=2$.

Следовательно, на ортогонально оснащенных подмногообразиях коразмерности 2 в метрическом почти контактном многообразии индуцируется $(f\xi\eta\rho)$-структура следующих родов.

Теорема 1. Если подмногообразие M_{n-1} коразмерности 2, дифференцируемого многообразия метрической почти контактной структуры нормально оснащено полем плоскостей N_x^1, ортогональных $T_x(M_{n-1})$, то естественным образом возникает:

1) на подмногообразии типа 1 метрическая $(f\xi\eta\rho)$-структура рода $(n-2,\ 3,\ n-4,\ 2)$, если распределение плоскостей $\lambda_x = T_x(M_{n-1}) \cap \eta_x$ неинвариантно относительно действия аффинора φ (см. таблицу № 2) и метрическая $(f\xi\eta\rho)$-структура рода $(n-2,\ 1,\ n-2,\ 2)$, если распределение плоскостей λ_x инвариантно относительно действия аффинора φ (см. таблицу № 4); 2) на подмногообразии M_{n-1} типа 2 метрическая $(f\xi\eta\rho)$-структура рода $(n-4,\ 3,\ n-4,\ 0)$ (см. таблицу, № 15), если M_{n-1} — не инвариантно и метрическая $(f\xi\eta\rho)$-структура рода $(n-2,\ 1,\ n-2,\ 2)$, если M_{n-1} инвариантно (см. таблицу, № 16);

3) на подмногообразии M_{n-1} типа 3 метрическая $(f\xi\eta\rho)$-структура рода $(n-2,\ 1,\ n-2,\ 2)$ (см. таблицу, № 20).

Эта теорема и определяет классификацию индуцированных метрических $(f\xi\eta G)$-структур на подмногообразии коразмерности 2, ортогонально оснащенном полем плоскостей $N_x^\perp$ в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$.

Классификация индуцированных структур на M_{n-1} в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ с другой точки зрения проведена Канемаки в работах [19], [20].

Предположим, что нормальные векторы $\vec{N}_\alpha$ образуют ортонормированную систему векторов. В этом случае $g_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}$ Тогда из соотношений (3.6) следуют:

$$\begin{aligned} &\rho_n^{\,n}=\rho_{n+1}^{n+1}=0,\\ &\rho_n^{n+1}=-\rho_{n+1}^{n}\overset{\mathrm{def}}{=}c,\\ &\rho_n^{(n+2)}=-\rho_{(n+2)}^{n}=a,\\ &\rho_{n+1}^{(n+2)}=-\rho_{(n+2)}^{n+1}=b, \end{aligned} \tag{3.7}$$

где a, b, c — три поля абсолютных инвариантов, заданные на M_{n-1}.

Инвариант

$$k = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \tag{3.8}$$

поле которого задано на M_{n-1}, Канемаки [19] называет структурным индикатором подмногообразия коразмерности 2 в метрическом почти контактном многообразии. Показано, что $0 \leqslant k \leqslant 1$ (см. лемму 2.1 [19]). Янамото в работе [26] дал следующую интерпретацию инварианта k. Рассмотрим матрицу $\|K\|$:

$$\|K\| = \|K_B^A\| = \|\rho_B^C \rho_C^A + \delta_B^A\|. \tag{3.9}$$

Из соотношений (2.15) следует, что

$$\|K\| = \|\xi_B^i \eta_i^A\|.$$

Из (3.6) следует, что элементами матрицы являются скалярные произведения векторов $\vec{\xi}_A$ в метрике g_{ij}, т. е.

$$\|K\| = g_{ij} \tilde{\xi}_B^i \tilde{\xi}_A^j.$$

В работе [26] показано, что собственными значениями матрицы K являются следующие инварианты

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1 - k^2.$$

Такова характеристика инварианта k

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Если подмногообразие M_{n-1} метрического почти контактного многообразия ортогонально оснащено парой полей единичных взаимно ортогональных векторов $\vec{N}_\alpha$ и $k = 1$, то $\bar{\eta}$ — распределение $(n-2)$-мерных плоскостей и $\check{\xi}$ — распределение одномерных направлений.

Справедливо и обратное утверждение. Этот результат получен в работах [20], [26].

Из этой теоремы следует, что если $k \neq 0$ (т. е. $0 < k < 1$), то распределение $\tilde{\eta}$ — $(n-4)$-мерных плоскостей, а $\tilde{\xi}$ — распределение трехмерных плоскостей, причем векторы $\vec{\xi}_A$ в элементах распределения $\tilde{\xi}$ образуют ортонормированную систему векторов.

Из (3.8) следует, что если $k = 0$, то $a = b = c = 0$, а следовательно, матрица $\|\rho\|$ — нулевая матрица.

Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 3. Если подмногообразие M_{n-1}, в метрическом почти контактном многообразии ортогонально оснащено парой полей единичных взаимно ортогональных векторов $\vec{N}_\alpha$, то при $k = 1$ на M_{n-1} естественным образом индуцируется метрическая $(f\xi\eta\rho)$-структура рода $(n-2, 1, n-2, 2)$ (см. таблицу, №№ 14, 16, 20); при $k=0$ на M_n индуцируется метрическая $(f\xi\eta\rho)$-структура рода (n—4, 3, n—4, 0) (см. таблицу, № 15) и при $0<k<1$ на M_{n-1} индуцируется метрическая $(f\xi\eta\rho)$-структура рода (n—1, 3, n—4, 3) (см. таблицу, № 2).

Канемаки в работе [19] ввел в рассмотрение вектор $\vec{A}$ и ковектор α, компоненты которых определены, соответственно, формулами:

$$A^i = -c\tilde{\xi}^i_{n+1} - b\tilde{\xi}^i_n + a\tilde{\xi}^i_{(n+2)},$$
$$\alpha_i = -c\tilde{\eta}^{n+1}_i - b\tilde{\eta}^n_i + a\tilde{\eta}^{(n+2)}_i.$$

Показано [19], что компоненты геометрических объектов f, A, α, g удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{gathered} fA=0, \quad \alpha(A)=k^2, \quad \alpha(X)=g(X, A), \\ g(fX, Y) = -g(X, fY) \\ f^4X + (k^2+1) f^2X + k^2X = \alpha(X) A, \\ f^5X + (k^2+1) f^3X + k^2fX = 0, \end{gathered} \tag{3.10}$$

где X, Y — произвольные векторные поля, принадлежащие $T(M_{n-1})$. Подмногообразие M_{n-1}, оснащенное полями объектов f, A, α, g, компоненты которых удовлетворяют соотношениям (3.10), называется подмногообразием реперированной квинт-метрической структурой ранга (n—2) (см. [19]). Следовательно, при $0<k<1$ на M_{n-1} индуцируется также реперированная квинт-метрическая структура ранга (n—2) [19], [26].

Если $(f\xi\eta\rho)$-структура, индуцированная на M_{n-1} — рода (n—2, 1, n—2, 2), то можно определить объекты $f_j{}^i$, u_j, v^i, которые являются структурными объектами почти контактной структуры (см. § 2), если $(f\xi\eta\rho)$-структура — рода (n—4, 3, n—4, 0), то на M_{n-1} возникает f-структура ранга (n—4) со структурным объектом $f_j{}^i$ (см. § 2). Аналогичный результат справедлив для метрической $(f\xi\eta\rho)$-структуры, т. е. если метрическая $(f\xi\eta\rho)$-структура на M_{n-1} — рода (n—2, 1, n—2, 2), то на ней можно определить метрическую почти контактную структуру, если же метрическая $(f\xi\eta\rho)$-структура на M_{n-1} — рода (n—4, 3, n—4, 0), то на ней определяется реперированная метрическая f-структура ранга (n—4).

Следовательно, справедлива

Теорема 4 (см. теорему 2.2 [19]). Пусть M_{n-1} — подмногообразие многообразия M_{n+1} метрической почти контактной структуры. Если $k=0$, то на M_{n-1} при $n\geqslant 6$ индуцируется реперированная метрическая f-структура ранга (n—4); если $0<k<1$, то на M_{n-1} индуцируется реперированная квинт-метрическая структура ранга (n—2); если $k=1$, то на M_{n-1} индуцируется почти контактная структура.

2. Контактные метрические и почти контактные метрические вложения.

1. Многообразие M_{n+1} называется [1], [15] контактным многообразием, если на нем существует 1-форма η такая, что

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0 \qquad (3.11)$$

где $d\eta$ — 2-форма ранга n.

Если на многообразии контактной структуры M_{n+1} задана положительно определенная риманова метрика G, то на M_{n+1} определяются тензоры

$$\varphi^I_K = G^{IL}\theta_{KL},$$

$$\xi^I = G^{IK}\eta_K,$$

где

$$\theta_{IK} = \frac{1}{2}(\partial_I\eta_K - \partial_K\eta_I).$$

Контактное многообразие M_{n+1}, на котором задана риманова метрика G, удовлетворяющая условию

$$G_{IK}\xi^I\xi^K = 1, \quad \varphi^I_K\,\eta_I = 0,$$

$$\varphi^I_K\varphi^K_L = -\delta^I_L + \xi^I\eta_L. \qquad (3.12)$$

называется многообразием контактной метрической структуры (см., например, [1], [15]).

Пусть M_{n-1} ориентируемое подмногообразие коразмерности 2 в многообразии M_{n+1} контактной метрической структуры.

При выполнении условий (3.11) распределение гиперплоскостных элементов η допускает интегральные подмногообразия M_m, размерность которых не превышает $\frac{n}{2}$ (см., например, [15]). Следовательно, в контактном метрическом многообразии не существует подмногообразия коразмерности 2, являющегося подмногообразием типа 3. Это означает, что

$$\tilde{\eta}^{(n+2)}_i \neq 0, \quad \tilde{\xi}^i_{(n+2)} \neq 0. \qquad (3.13)$$

Определение 1. Если подмногообразие коразмерности 2 вложено в дифференцируемое многообразие M_{n+1}, наделенное контактной метрической структурой и существует пара нетривиальных инвариантов p и q таких, что объекты $u_i = p\tilde{\eta}^{(n+2)}_i$, и $\tilde{g}_{ij} = qg_{ij}$ являются структурными объектами контактной метрической структуры на M_{n-1}, то такое вложение называется контактным метрическим вложением [24].

Определение 2. Если для каждой точки x подмногообразия M_{n-1}, вложенного в многообразие контактной метрической структуры M_{n+1}, выполняется условие $\varphi T_x(M_{n-1}) \subset \subset T_x(M_{n-1})$, то вложение называется φ-инвариантным вложением [24].

Из теоремы 3 § 6 [10] следует, что если вложение M_{n-1} есть φ-инвариантное вложение, то структурный вектор $\vec{\xi}_x$ принадлежит касательной плоскости $T_x(M_{n-1})$, т. е. поверхность M_{n-1} — типа 2. В этом случае, в силу равенств (2.12) и (3.7) инварианты a и b тождественно обращаются в нуль, а структурный индикатор k равен c. Необходимым и достаточным условием φ-инвариантного вложения M_{n-1} в многообразие метрической контактной структуры является выполнение условия

$$k^2 = c^2 = 1.$$

Следовательно, из теоремы 4 и определений 1 и 2 получаем, что если вложение M_{n-1} в M_{n+1} метрической контактной структуры является φ-инвариантным вложением, то оно также является контактным метрическим вложением.

В работе [24] найдены необходимые и достаточные условия контактного метрического вложения подмногообразия коразмерности 2 в метрическое контактное многообразие M_{n+1}. Эти условия имеют вид:

$$\begin{gathered} f_j{}^i f_l{}^j = -\delta_l{}^i + \varkappa^{-1} \tilde{\eta}_l^{(n+2)} \tilde{\xi}^i_{(n+2)}, \\ \varkappa = g_{ij} \tilde{\xi}^i_{(n+2)} \tilde{\xi}^j_{(n+2)} = \text{const}. \end{gathered} \tag{3.14}$$

При выполнении условий (3.14) $k=1$. Условия (3.14) эквивалентны следующим условиям (см. [24], § 4).

$$\begin{gathered} \varkappa = g_{ij} \tilde{\xi}^i_{(n+2)} \tilde{\xi}^j_{(n+2)} = \text{const}, \\ \tilde{\xi}_n{}^i = -b \varkappa^{-\frac{1}{2}} \tilde{\xi}^i_{(n+2)}, \\ \tilde{\xi}^i_{n+1} = a \varkappa^{-\frac{1}{2}} \tilde{\xi}^i_{(n+2)}. \end{gathered} \tag{3.15}$$

В работе [24] исследованы также нормальные контактные вложения.

2. В § 2 настоящей статьи исследован вопрос о почти контактном вложении подмногообразий коразмерности 2 в $M_{n+1}(\varphi \xi \eta)$. Представляет интерес вопрос о почти контактном метрическом вложении.

Определение 3. Если на подмногообразии коразмерности 2, вложенном в дифференцируемое многообразие M_{n+1}, наделенное метрической почти контактной структурой, индуцируется метрическая почти контактная структура, то такое вложение называется почти контактным метрическим вложением.

Будем считать, что подмногообразие коразмерности 2 ортогонально оснащено парой полей взаимно ортогональных единичных векторов. Известно (см. § 2, п. 3), что на M_{n-1} индуцируется метрическая почти контактная структура со структурным аффинором $f_j{}^i$, если $\operatorname{rang}\|f\| = (n-2)$, распределение $\tilde{\eta}$ — распределение $_{(n-2)}$-мерных плоскостей и $\tilde{\xi}$-распределение одномерных направлений.

Теорема 5 (теорема о метрическом почти контактном вложении). Если подмногообразие коразмерности 2, вложенное в дифференцируемое многообразие метрической почти контактной структуры, ортогонально оснащено парой полей взаимно ортогональных единичных векторов, то на M_{n-1} естественным образом возникает метрическая почти контактная структура, если

1) либо поверхность M_{n-1} — типа 1 и распределение плоскостей λ_x инвариантно относительно действия аффинора φ (см. таблицу, № 4);

2) либо поверхность M_{n-1} — инвариантная поверхность (в этом случае M_{n-1} — типа 2 (см. таблицу, № 16)).

3) либо поверхность M_{n-1} — типа 3 (см. таблицу № 20).

Структурными объектами индуцированной метрической почти контактной структуры на подмногообразии M_{n-1} в M_{n+1} $(\varphi\xi\eta G)$ являются следующие объекты: f_j^i, V^i, u_j, g_{ij}, где f_j^i — структурный аффинор индуцированной $(f\xi\eta\rho)$-структуры на M_{n-1} (см. § 2), $\vec{V}=V^i\vec{\Lambda}_i$ — поле вектора, определяющее в каждой точке $x \in M_{n-1}$ элемент распределения $\tilde{\xi}$, u_i — поле ковектора, определяющее в каждой точке $x \in M_{n-1}$ элемент распределения $\tilde{\eta}$, а g_{ij} — метрический тензор на M_{n-1} (см. (3.2)).

Из теоремы 5 следует, что на всяком инвариантном подмногообразии коразмерности 2 в метрическом почти контактном многообразии естественным образом индуцируется метрическая почти контактная структура.

Теорема о почти контактном метрическом вложении для нечетномерной m-мерной поверхности доказана в работе [10]. Исследованием вложения инвариантных подмногообразий коразмерности 2 занимались также Мишра [23], Канемаки [19], [20], Янамото [26] и др.

Мишра в работе [23] нашел необходимые и достаточные условия при выполнении которых на M_{n-1} индуцируется метрическая почти контактная структура со структурными объектами f_j^i, $\tilde{\xi}^i_{(n+2)}$, $\tilde{\eta}_i^{(n+2)}$, g_{ij} (см. теорему 3.1 [23]). Показано, что только на инвариантных поверхностях M_{n-1} возникает метрическая почти контактная структура со структурными объектами f_j^i, $\tilde{\xi}^i_{(n+2)}$, $\tilde{\eta}_j^{(n+2)}$, g_{ij}. Аналогичная теорема для нечетномерных инвариантных поверхностей M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ доказана авторами настоящей работы в [10].

Канемаки [19] доказал, что на M_{n-1} индуцируется почти контактная структура со структурным тензором f_j^i тогда и только тогда, когда $k=1$ (см. также теорему 4). В работе [20] показано, что при $k\neq 0$ структурные объекты индуцированной метрической $(f\xi\eta\rho)$-структуры на M_{n-1} можно преобразовать так, что преобразованные геометрические объекты ψ, $\tilde{A}$, $\tilde{\alpha}$, g становятся структурными объектами почти контактной структуры на M_{n-1}. Формулы преобразования при $0<k<1$ имеют вид:

$$\tilde{A}^i=k^{-1}\left(-c\tilde{\xi}^i_{(n+2)}-b\xi_n{}^i+a\tilde{\xi}^i_{n+1}\right),$$

$$\tilde{\alpha}_j=k^{-1}(-\tilde{c}\eta_j^{(n+2)}-\tilde{b}\eta_j{}^n+\tilde{a}\eta_j^{n+1}),$$

$$\psi_j{}^l=\{k(k+1)\}^{-1}\{f_l{}^lf_j{}^l+(k^2+k+1)f_j{}^l\}.$$

Аналогичные формулы преобразования получены при $k=0$ (см. [20] п. 4).

В работе [18] проводятся исследования индуцированных структур на подмногообразии M_{n-1} типа 3 в M_{n+1} метрической почти контактной структуры, т. е. интегральных подмногообразий размерности $(n-1)$ распределения η, ортогонально оснащенных парой полей взаимно ортогональных единичных векторов $\vec{N}_\alpha$. Эти подмногообразия указаны под номером 20 в приведенной таблице. Очевидно, что такие подмногообразия являются неинвариантными подмногообразиями в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$. Показано, что на M_{n-1} естественным образом возникает метрическая почти контактная структура [18].

3. Уравнения Гаусса—Вейнгартена. Тензор кривизны. Тензор Риччи. В § 1 п. 5 были обобщены уравнения Гаусса (1.65) и Вейнгартена (1.73) для подмногообразий M_m в многообразии M_{n+1} со связностью. В большинстве работ, посвященных исследованию M_m в M_{n+1} почти контактной структуры, предполагается, что в M_{n+1} задана риманова метрика G и подмногообразие оснащено $n-m+1$ полями ортогонально оснащающих взаимно ортогональных векторов $\vec{N}_\alpha$, определенных дифференциальными уравнениями:

$$dN^I_\alpha+N^K_\alpha\omega^I_K=N^I_{\alpha k}\theta^k. \tag{3.16}$$

При этом в M_{n+1} однозначно определяется риманова связность $\overset{1}{\Gamma}$. Тангенциальная связность γ, естественно возникающая при этом на подмногообразии M_m, оказывается индуцированной связностью $\overset{\circ}{\gamma}$ (1.53), ассоциированной полям векторов $\vec{N}_\alpha$. В силу того, что Γ—риманова связность относительно метрики G, $\overset{\circ}{\gamma}$—также риманова относительно индуцированной метрики g (1.98). При этих предположениях уравнения (1.65) и (1.73) приобретают более простой вид.

$$\overset{\Gamma\overset{\circ}{\gamma}}{\tilde{\Lambda}}{}^J_{ik}\vec{e}_J=H^\alpha_{ik}\vec{N}_\alpha, \tag{3.17}$$

$$\overset{\Gamma}{\tilde{N}}{}^J_{\alpha k}\vec{e}_J=l^i_{\alpha k}\vec{\Lambda}_i+l^\beta_{\alpha k}\vec{N}_\beta, \tag{3.18}$$

где греческие индексы указывают на порядковый номер соответствующего объекта. Функции H^α_{ik} образуют $(n-m+1)$ симметричных тензоров типа (0, 2)—вторые фундаментальные тензоры первого рода, $l^i_{\alpha k}$ образуют $(n-m+1)$ тензоров типа (1.1)—вторые фундаментальные тензоры второго рода, а $l^{\alpha}_{\beta k}$ — $\frac{(n-m+1)(n-m)}{2}$ ковекторов.

Соотношения (1.120), (1.121) принимают, соответственно, вид:

$$l^{i}_{\alpha j}=-g^{ik}H^{\alpha}_{kj}, \tag{3.19}$$

$$l^{\alpha}_{\beta i}=-l^{\beta}_{\alpha i}. \tag{3.20}$$

Уравнения (3.17), (3.18) в работах, не использующих метод полей геометрических объектов, приводятся в следующем виде (см. например, [22], [23], [3]):

$$\nabla'_{\Lambda Y}(\Lambda X)=\Lambda(\nabla_Y X)+H^{\alpha}(X,Y)N_{\alpha}, \tag{3.21}$$

$$\nabla'_{\Lambda Y}N_{\alpha}=\Lambda(l_{\alpha}(Y))+l^{\beta}_{\alpha}(Y)N_{\beta}, \tag{3.22}$$

где ∇' и ∇—символы ковариантных производных в связностях Γ и γ, соответственно, X, Y—векторные поля, принадлежащие $T_x(M_{n-1})$ и $\Lambda:T_x(M_{n-1})\to T_x(M_{n+1})$.

Покажем эквивалентность уравнений (3.17), (3.18) и (3.21), (3.22), соответственно.

Пусть

$$\vec{X}=X^i\vec{\Lambda}_i=\overline{X}^J\vec{e}_J,$$

где

$$\overline{X}^J=\Lambda^J_i X^i. \tag{3.23}$$

Продифференцировав равенство (3.23) и заменив формы ω^J_K и $\theta_j{}^i$ формами связности $\tilde{\omega}^J_K$ (1.39) и $\tilde{\theta}_j{}^i$ (1.42), получим

$$X^i(\Lambda^J_{il}-\Lambda^K_i\Gamma^J_{KL}\Lambda^L_l+\Lambda^J_k\overset{\circ}{\gamma}{}^k_{il})=(\overline{X}^J_l-\overline{X}^K\Gamma^J_{KL}\Lambda^L_l)-$$
$$-\Lambda^J_i(X_l{}^i-X^j\gamma^i_{jl}). \tag{3.24}$$

Свернув (3.24) с Y^l, получим, с учетом (1.57) и (1.62)

$$\overset{\Gamma,\overset{\circ}{\gamma}}{\tilde{\Lambda}}(X,Y)=\nabla'_{\Lambda Y}(\Lambda X)-\Lambda\nabla_Y X, \tag{3.25}$$

где

$$(\overline{X}^J_L-\overline{X}^K\Gamma^J_{KL})\Lambda^L_l Y^l\overset{\text{def}}{=}\nabla'_{\Lambda Y}(\Lambda X) \tag{3.26}$$

и

$$(X_l{}^i+X^j\gamma^i_{jl})\overset{\text{def}}{=}\nabla_Y X. \tag{3.27}$$

Эквивалентность уравнений (3.17) и (3.21) непосредственно следует из (3.25). Эквивалентность (3.18) и (3.22) следует из (3.16) и обозначений (3.26) после замены форм ω^J_K формами связности $\tilde{\omega}^J_K$ (1.39)

4. Уравнения Гаусса—Кодацци и Риччи. Тензор Риччи. Для подмногообразия M_{n-1} коразмерности 2 $\alpha, \beta, \ldots = n, n+1$. Соотношения (3.19), (3.20) принимают следующий вид:

$$l^i_{nj} = -g^{ik}H^n_{kj}, \quad l^i_{n+1j} = -g^{ik}H^{n+1}_{kj}, \tag{3.28}$$

$$l^{n+1}_{ni} = -l^n_{n+1i}, \quad l^n_{ni} = l^{n+1}_{n+1i} = 0. \tag{3.29}$$

Из уравнений (1.122) (1.123) для M_{n-1} коразмерности 2, ортогонально оснащенной полями двух взаимно ортогональных векторов $\vec{N}_n$ и $\vec{N}_{n+1}$, учитывая (1.107) и (3.28), (3.29), получаем классические уравнения Гаусса—Кодацци (см., например, [23], [27], [3]):

$$R_{ijkm} - r_{ijkm} - H^n_{j|k}H^n_{|i|m]} - H^{n+1}_{j|k}H^{n+1}_{|i|m]} = 0, \tag{3.30}$$

$$R_{nikm} + \nabla_{[m}H^n_{|i|k]} + H^{n+1}_{i[k}l^n_{|n+1|m]} = 0, \tag{3.31}$$

$$R_{n+1,ikm} + \nabla_{[m}H^{n+1}_{|i|k]} + H^n_{i[k}l^{n+1}_{|n|m]} = 0. \tag{3.32}$$

а из уравнений (1.93)—классические уравнения Риччи:

$$R_{\alpha\beta km} + \nabla_{[m}l^\alpha_{|\beta|k]} - g^{il}H^\beta_{l|k}H^\alpha_{|i|m]} = 0. \tag{3.33}$$

Свертывая (2.15) с g^{im} получаем связь между тензорами Риччи многообразия M_{n+1} и подмногообразия M_{n-1} $R_{jk} \stackrel{\text{def}}{=} g^{im}R_{ijkm}$ и $r_{jk} \stackrel{\text{def}}{=} g^{im}r_{ijkm}$:

$$R_{jk} - r_{jk} - g^{im}H^n_{j|k}H^n_{|i|m]} - g^{im}H^{n+1}_{j[k}H^{n+1}_{|i|m]} = 0. \tag{3.34}$$

5. M_{n-1} **коразмерности 2 специальных классов контактных метрических многообразий.** Многообразие M_{n+1} контактной (почти контактной) структуры называется нормальным контактным (почти контактным) многообразием, если равен нулю тождественно тензор N (см. [1], гл. III, § 3):

$$N^J_{KL} = \varphi^M_L(\varphi^J_{KM} - \varphi^J_{MK}) - \varphi^M_K(\varphi^J_{LM} - \varphi^J_{ML}) + \eta_L\xi^J_K - \eta_K\xi^J_L. \tag{3.35}$$

Если M_{n+1} — метрическое многообразие контактной структуры, то при выполнении условия (3.35) оно называется многообразием метрической нормальной контактной (почти контактной) структуры или сасакиевым многообразием.

1. Подмногообразие M_{n-1} коразмерности 2, ортогонально оснащенное парой полей единичных взаимно ортогональных векторов $\vec{N}_\alpha$, называется вполне омбилическим, если для него справедливы соотношения

$$H^\alpha_{ij} = K^\alpha g_{ij}, \quad (\alpha = n, n+1),$$

где H^α_{ij}—вторые фундаментальные тензоры первого рода, а K^α—два абсолютных инвариантна, определенных формулами

$$K^\alpha = \frac{1}{n-1}g^{ik}H^\alpha_{ik}.$$

Вектор средней кривизны подмногообразия M_{n-1} определяется формулами

$$\vec{C}=C^J\vec{e}_J=g^{ij}H^{\alpha}_{ij}N^J_{\alpha}\vec{e}_J.$$

Абсолютный инвариант $h^2=G_{JK}C^JC^K$ называется средней кривизной подмногообразия M_{n-1} в M_{n+1}. Если вектор средней кривизны тождественно равен нулю, то M_{n-1} называется минимальным подмногообразием. Это условие эквивалентно равенству нулю следов аффиноров

$$\overset{\alpha}{h}{}^k_j=\overset{\alpha}{H}{}^k_{ij}g^{il}, \quad (\alpha=n, n+1). \tag{3.36}$$

Если для M_{n-1} выполняется условие

$$H^{\alpha}_{ij}=0,$$

то M_{n-1} называется вполне геодезическим. Очевидно, что если M_{n-1} минимально и вполне омбилично, то оно вполне геодезично.

Для M_{n-1} коразмерности 2 ортогонально оснащенного парой полей взаимно ортогональных векторов $\vec{N}_{\alpha}$ выполняется условие (см. п. 1):

$$\rho\overset{\text{def}}{=}\rho_n^{n+1}=-\rho_{n+1}^n, \quad \rho_n{}^n=\rho_{n+1}^{n+1}=0.$$

В работе [25] изучаются вполне омбилические подмногообразия M_{n-1} в метрическом нормальном контактном многообразии M_{n+1}. Предполагается, что ковариантная производная вектора средней кривизны $\vec{C}$ подмногообразия M_{n-1} касается M_{n-1}. Доказывается ряд теорем, иллюстрирующих некоторые свойства этих подмногообразий. В частности, доказано:

если функция ρ не постоянна, то а) градиент ρ есть специальное инфинитезимальное концеркулярное преобразование; б) M_{n-1} изометрично сфере радиуса $1/\sqrt{1+(K^n)^2+(K^{n+1})^2}$ n-мерного евклидова пространства, где $(K^n)^2+(K^{n+1})^2=k^2$;

если средняя кривизна k не обращается в нуль и функция ρ постоянна, то индуцированная риманова метрика g_{ij} гомотетична римановой метрике $(n-1)$-мерного нормального контактного метрического многообразия.

2. По Луддену [22] нормальное почти контактное метрическое многообразие, в котором 2-форма $\Phi(X, Y)=G(X, \varphi Y)$ замкнута $d\eta=0$, называется косимплектическим (см. также [1] гл. III, § 3).

Косимплектическая структура характеризуется условиями [17]:

$$\nabla'_X\varphi=0, \quad \nabla'_X\eta=0,$$

где ∇' — риманова связность, определенная метрикой G.

Нормальное почти контактное метрическое многообразие с киллинговыми структурными тензорами φ и η — косимплектическое (см. теорема 1.1. [17]). Хит, опираясь на этот факт, доказывает следующую теорему [17]:

Инвариантное подмногообразие M_{n-1} почти контактного метрического косимплектического многообразия M_{n+1} есть также почти контактное метрическое косимплектическое многообразие, причем выполняются следующие условия

$$H^n(X, \varphi Y) = -H^{n+1}(X, Y),$$
$$H^{n+1}(X, \varphi Y) = H^n(X, Y).$$

Это же утверждение было ранее приведено в работе [22], а также в [16].

В косимплектическом многообразии M_{n+1} рассматривается гиперповерхность P ортогонально оснащенная полем единичных векторов $\vec{N}_\alpha$. Будем считать, что $\xi \in T_x(P)$ в каждой точке $x \in P$. Это свойство назовем свойством (T).

Теорема А [16]. Пусть M_{n-1} — инвариантное подмногообразие косимплектического многообразия M_{n+1}. Если M_{n-1} погружено в M_{n+1} как ориентируемая гиперповерхность гиперповерхности P, обладающей свойством (T), и поле единичных нормалей $\vec{N}$ есть киллингово векторное поле, то M_{n-1} вполне геодезическое подмногообразие многообразия M_{n+1}.

Как следствие устанавливается, что при выполнении условий этой теоремы гиперповерхность P есть келерово многообразие.

Исследование подмногообразий коразмерности 2 в косимплектическом или почти контактном многообразии проводилось также в работе [26].

Почти контактное метрическое многообразие M_{n+1} с киллинговыми структурными объектами φ и η называется приблизительно косимплектическим.

Теорема [17]. Инвариантное подмногообразие M_{n-1} почти контактного метрического приблизительно косимплектического многообразия есть также почти контактное метрическое приблизительно косимплектическое многообразие, причем выполняются условия:

$$H^n(X, \varphi Y) + H^n(Y, \varphi X) + 2H^{n+1}(X, Y) = 0,$$
$$H^{n+1}(X, \varphi Y) + H^{n+1}(Y, \varphi X) + 2H^n(X, Y) = 0.$$

3. Известно, что инвариантное нечетномерное подмногообразие M_m сасакиева многообразия M_{n+1} есть сасакиево многообразие [10]. Это утверждение справедливо и для подмногообразия коразмерности 2 [16]. В качестве следствия устанавливается, что инвариантное подмногообразие M_{n-1} сасакиева многообразия M_{n+1} есть минимальное подмногообразие [16].

Для инвариантного подмногообразия M_{n-1} сасакиева многообразия M_{n+1} справедлива теорема, аналогичная теореме А.

Исследование подмногообразий M_{n-1} коразмерности 2 в многообразиях квази-сасакиевой структуры [1] при различных значениях индикатора k (см. п. 1) проведено в работе [20].

4. Контактное метрическое многообразие M_{n+1} называется C-эйнштейновым, если компоненты тензора Риччи имеют следующее строение:

$$R_{JK} = aG_{JK} + b\eta_J\eta_K, \tag{3.37}$$

где a, b — постоянные.

Если $b=0$, то M_{n+1} называется эйнштейновым многообразием.

Если компоненты тензора кривизны $R_{JKLM} = G_{JP}R^{P}_{KLM}$ многообразия M_{n+1} имеют следующее строение:

$$R_{JKLM} = c\,(G_{LK}G_{MJ} - G_{MK}G_{LJ}), \tag{3.38}$$

то M_{n+1} называется многообразием постояннной кривизны c.

Пусть M_{n+1} — многообразие постоянной кривизны c. Уравнения (3.30)—(3.33), в силу (3.38) принимают следующий вид [27]:

$$r_{ijkm} = c\,(g_{kj}g_{mi} - g_{mj}g_{ki}) - H^{n}_{j[k}H^{n}_{|i|m]} - H^{n+1}_{j[k}H^{n+1}_{|i|m]}, \tag{3.39}$$

$$\nabla_{[m}H^{n}_{|i|k]} + H^{n+1}_{i[k}l^{n}_{|n+1|m]} = 0, \tag{3.40}$$

$$\nabla_{[m}H^{n+1}_{|i|k]} + H^{n}_{i[k}l^{n+1}_{|n|m]} = 0, \tag{3.41}$$

$$\nabla_{[m}l^{\alpha}_{|\beta|k]} - g^{il}H^{\beta}_{l[k}H^{\alpha}_{|i|m]} = 0, \tag{3.42}$$

а из (3.34) получаем следующие уравнения для тензора Риччи подмногообразия M_{n-1}:

$$r_{jk} = (n-2)\,cg_{jk} - g^{im}H^{n}_{j[k}H^{n}_{|i|m]} - g^{im}H^{n+1}_{j[k}H^{n+1}_{|i|m]}. \tag{3.43}$$

Пусть M_{n+1} — нормальное контактное метрическое многообразие постоянной кривизны c, равной единице, и пусть инвариантное подмногообразие M_{n-1} — C — эйнштейново. В силу того, что в этом случае M_{n-1} — минимально (см. [10], § 6), из (3.43) получаем для тензора Риччи следующие формулы:

$$r_{jk} = (n-2)\,g_{jk} + g^{lm}H^{n}_{jm}H^{n}_{ik} + g^{lm}H^{n+1}_{jm}H^{n+1}_{ik}$$

и в то же время для r_{jk} выполняются формулы вида (3.37):

$$r_{jk} = ag_{jk} + b\eta_j\eta_k. \tag{3.44}$$

Если M_{n-1} — эйнштейново, то в формулах (3.44) b обращается в нуль. При этом устанавливаем, что все компоненты тензоров H^{α}_{ij} равны нулю и приходим к следующему утверждению [27]:

Классификация индуцированных $(f\xi\eta\rho)$—структур на M_{n-1} в M_{n+1}

№№ пп.	Тип поверхности	Тип оснащения	Является ли инвариантным λ	$\dim(N_x \cap \varphi N_x)$	$\dim(\varphi T_x(M_{n-1}) \cap N_x)$	$\mathrm{rang}\|f\|$	$\dim \tilde{\xi}_x$	$\dim \tilde{\eta}_x$	$\mathrm{rang}\|\rho\|$	Род $(f\xi\eta\rho)$-структуры на M_{n-1}	Является ли вложением почти контактным	Является ли вложением почти контактным метрическим
1	1	1	нет	0	0	$n-1$	3	$n-4$	3	$(n-1,\ 3,\ n-4,\ 3)$	нет	нет
2	1	1	нет	0	1	$n-2$	3	$n-4$	2	$(n-2,\ 3,\ n-4,\ 2)$	нет	нет
3	1	1	да	1	0	$n-1$	1	$n-2$	3	$(n-1,\ 1,\ n-2,\ 3)$	нет	нет
4	1	1	да	1	1	$n-2$	1	$n-2$	2	$(n-2,\ 1,\ n-2,\ 2)$	да	да
5	1	2	да	0	0	$n-1$	1	$n-2$	3	$(n-1,\ 1,\ n-2,\ 3)$	нет	нет
6	1	2	да	0	1	$n-2$	1	$n-2$	2	$(n-2,\ 1,\ n-2,\ 2)$	да	нет
7	1	3	нет	0	1	$n-2$	3	$n-4$	2	$(n-2,\ 3,\ n-4,\ 2)$	нет	нет
8	1	3	нет	0	2	$n-3$	3	$n-4$	1	$(n-3,\ 3,\ n-4,\ 1)$	нет	нет
9	1	3	да	2	1	$n-2$	1	$n-2$	2	$(n-2,\ 1,\ n-2,\ 2)$	да	нет
10	2	1	нет	0	0	$n-2$	3	$n-4$	2	$(n-2,\ 3,\ n-4,\ 2)$	нет	нет
11	2	1	нет	0	1	$n-3$	3	$n-4$	1	$(n-3,\ 3,\ n-4,\ 1)$	нет	нет
12	2	1	да	1	0	$n-2$	1	$n-2$	2	$(n-2,\ 1,\ n-2,\ 2)$	да	нет
13	2	3	нет	0	0	$n-2$	3	$n-4$	2	$(n-2,\ 3,\ n-4,\ 2)$	нет	нет
14	2	3	нет	0	1	$n-3$	3	$n-4$	1	$(n-3,\ 3,\ n-4,\ 1)$	нет	нет
15	2	3	нет	0	2	$n-4$	3	$n-4$	0	$(n-4,\ 3,\ n-4,\ 0)$	нет	нет
16	2	3	да	2	0	$n-2$	1	$n-2$	2	$(n-2,\ 1,\ n-2,\ 2)$	да	да
17	3	1	нет	1	0	$n-1$	1	$n-2$	3	$(n-1,\ 1,\ n-2,\ 3)$	нет	нет
18	3	1	нет	1	1	$n-2$	1	$n-2$	2	$(n-2,\ 1,\ n-2,\ 2)$	да	нет
19	3	2	нет	0	0	$n-1$	1	$n-2$	3	$(n-1,\ 1,\ n-2,\ 3)$	нет	нет
20	3	2	нет	0	1	$n-2$	1	$n-2$	2	$(n-2,\ 1,\ n-2,\ 2)$	да	да

Инвариантное эйнштейново подмногообразие M_{n-1} нормального контактного метрического многообразия постоянной кривизны — вполне геодезическое.

В работе [27] для инвариантных C-эйнштейновых подмногообразий коразмерности 2 нормального контактного метрического многообразия постоянной кривизны получены некоторые соотношения, которым удовлетворяют ковариантные производные тензоров H_{ij}^{α}, r_{ijkm} и r_{ij}.

Кенмоцу [21] доказывает следующую теорему.

Теорема. Пусть M_{n-1} — инвариантное C-эйнштейново подмногообразие коразмерности 2 в сасакиевом многообразии постоянной φ-секционной кривизны c. Если $c \leqslant -3$, то M_{n-1} — вполне геодезическое; если $c > -3$, то M_{n-1} — вполне геодезическое или C-эйнштейново многообразие, скалярная кривизна которого равна $\frac{1}{4}(n-2)\{c(n-2)+3n-10\}$.

Лудден [22] доказывает ряд утверждений для подмногообразий M_{n-1} коразмерности 2 постоянной φ-секционной кривизны; например:

Если M_{n+1} — косимплектическое многообразие постоянной φ-секционной кривизны, то из условия $\nabla_X(\overset{n}{h})^2=0$ следует $\nabla_X r=0$ (где $\overset{n}{h}$ — аффинор, введенный в (3.36), а ∇ — индуцированная риманова связность (см. п. 3)).

Подмногообразие M_{n-1} косимплектического многообразия M_{n+1} постоянной φ-секционной кривизны является вполне геодезическим тогда и только тогда, когда оно также постоянной φ-секционной кривизны.

Если многообразие M_{n+1} — косимплектическое многообразие φ-секционной кривизны и M_{n-1} — инвариантное C-эйнштейново многообразие коразмерности 2, то M_{n-1} — локально симметрично.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.*, Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 9 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1979, 246 с. (РЖМат, 1980, 1А800)
2. *Кабаяси Ш., Номидзу К.*, Основы дифференциальной геометрии. М., Наука, 1981, *1*, 344 с.
3. —, —, Основы дифференциальной геометрии. М., Наука, 1981, *2*, 414 с.
4. *Лаптев Г. Ф.*, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. В сб. «Тр. Моск. мат. о-ва», 1953, *2*, 275—382 (РЖМат, 1953, 433)
5. —, Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии. В сб. «Тр. Геометр. семинара. Т. 1 (Ин-т науч. информ. АН СССР)». М., 1966, 139—190 (РЖМат, 1967, 6А382)
6. —, *Остиану Н. М.*, $(f\xi\eta\rho)$-структура на дифференцируемых многообразиях. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 7 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1975, 5—22 (РЖМат, 1976, 9А622)

7. *Норден А. П.,* Пространства аффинной связности. М., Наука, 1976
8. *Опольская Е. В.,* О почти контактном погружении в многообразие почти контактной структуры. Дифференц. геометрия подмногообразий фигур. Калининград, 1982, вып. 13
9. *Остиану Н. М.,* Дифференциально-геометрические структуры на дифференцируемых многообразиях. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 8 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1977, 89—111 (РЖМат, 1978, 1А632)
10. —, *Поляков Н. Д.,* Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. I. В сб. Пробл. геометрии. Т. *11* (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1980, 3—63 (РЖМат, 1980,11А728)
11. —, *Рыжков В. В., Швейкин П. И.,* Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева. В сб. «Тр. Геометр. семинара. Т. 4 (Ин-т науч. информ. АН СССР)». М., 1973, 7—70 (РЖМат, 1974, 3А451)
12. *Поляков Н. Д.,* Классификация индуцированных $(f\xi\eta\rho)$-структур на подмногообразии коразмерности 2 в почти контактном многообразии. МГУ., М., 1982, 28 с., библиогр. 11 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 12 марта 1982 г., № 000—82 Деп.) (РЖМат, 1982, 00 000)
13. —, Дифференциально-геометрические структуры на почти контактном многообразии. В сб. «Пробл. геометрии. Т. *8* (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1977, 113—137 (РЖМат, 1978, 1А639)
14. —, Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. III. $N(\sigma^l)$-антиинвариантные подмногообразия в многообразии почти контактной структуры. В сб. «Пробл. геометрии. Т. *13* (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1982, 77—117
15. *Blair D. E.,* Contact manifolds in Riemannian geometry. Lect. Notes Math., 1976, 509, 146 pp (РЖМат, 1976, 9А640)
16. *Goldberg S. I.,* Infariant submanifolds of codimention 2 of almost contact manifolds. «Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat.», 1971, 25, № 3, 377—388 (РЖМат, 1972, 6А664)
17. *Hit R.* Almost contact submanifolds. Tensor, N. S. Vol. 28 (1974), № 2, 169—172 (РЖМат, 1975, 6А810)
18. *Kanemaki S.,* Noninvariant submanifolds of codimension 2 in almost contact manofolds. Tensor, 1972, *23*, № 2, 233—239
19. —, On submanifolds of codimension 2 of almost contact metric manifolds. I. «Tensor», 1973, *27*, № 3, 281—286 (РЖМат, 1974, 10А573)
20. —, On submanifolds of codimension 2 of almost contact metric manifolds. II. «Tensor», 1978, *32*, № 3, 323—331 (РЖМат, 1979, 7А723)
21. *Kenmotsu Katsuci,* Local classification of invariant η-Einstein submanifolds of codimension 2 in Sasakian manifold with constant φ-sectional curvature. Tohoku Math. J., 1970, *22*, № 2, 270—272 (РЖМат, 1971, 4А710)
22. *Ludden G. D.,* Submanifolds of cosymplectic manifolds. J. Different. Geom., 1940, *4*, № 2, 237—244 (РЖМат, 1971, 4А709)
23. *Mishra R. S.,* Almost complex and almost contact submanifolds. Tensor, 1972, *25*, 419—433 (РЖМат, 1974, 2А621)
24. *Okumura M.,* On contact metric immersion. Ködai Math. Sem. Rep., 1968, *20*, № 4, 389—409 (РЖМат, 1969, 8А514)
25. *Watanabe Y.,* Totally umbilical surfaces in normal contact Riemannian manifolds. Kodai Math. Semin. Repts., 1967, *19*, № 4, 474—487 (РЖМат, 1968, 9А503)
26. *Yanamoto H.,* Surfaces of codimension 2 in an almost contact manifold. Res. Repts. Nagaoka Techn. Coll., 1971, 7, № 4, 271—277 (РЖМат, 1972, 6А659)
27. *Yano K., Ishihara S.,* On a problem of Nomizu — Smyth on a normal contact Riemannian manifold. J. Differental Geometry, 1969, *3*, № 1, 45—58 (РЖМат, 1970, 4А642)
28. —, *Kon M.,* Anti-invariant submanifolds. Lect. Notes Pure and Appl. Math., Vol. *21*, Marcel Dekker. New York — Basel, 1976, viii, 183 pp. (РЖМат, 1977, 7А629К)