А. Ю. Егорова, Задача Коши для неоднородных параболических систем в анизотропных пространствах Зигмунда,
Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ., 2024, том 16, выпуск 1, 5–12

https://www.mathnet.ru/vyurm581

Математика

УДК 517.956.4 **DOI: 10.14529/mmph240101**

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЗИГМУНДА

А.Ю. Егорова
Рязанский государственный университет, г. Рязань, Российская Федерация
E-mail: an_batseva@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача Коши для параболической системы второго порядка, удовлетворяющей условию равномерной параболичности в смысле И.Г. Петровского, с постоянными коэффициентами и ненулевой правой частью. Начальное условие также может быть отличным от нуля. Шкала гладкости решений таких систем строится в анизотропных пространствах Зигмунда, которые являются аналогом параболических пространств Гёльдера в случае целого показателя гладкости. Исследование свойств объемного потенциала для параболической системы проведено с помощью его представления через потенциал Пуассона. Оценки оператора, задаваемого потенциалом Пуассона, позволили установить оценки для объемного потенциала в параболических пространствах Зигмунда с весом. Полученные результаты используются для построения шкалы гладкости ограниченного решения задачи Коши для параболической системы второго порядка в весовых анизотропных пространствах Зигмунда.

Ключевые слова: параболическая система; задача Коши; потенциал Пуассона; объемный потенциал; анизотропные пространства Зигмунда.

Введение

Основополагающие результаты в области исследования задачи Коши для уравнения теплопроводности получил А.Н. Тихонов. В работе [1] им были найдены условия, которые обеспечивают единственность решения задачи Коши в бесконечной области в некоторых классах экспоненциально растущих функций. Идеи этой работы А.Н. Тихонова получили развитие в трудах ряда математиков (О.А. Ладыженская [2], И.М. Гельфанд [3], Г.Н. Золотарёв [4] и другие). Е.А. Бадерко и С.И. Сахаров [5] установили существование классического решения задачи Коши для неоднородной параболической системы и ненулевого начального условия в полуограниченной области на плоскости. С.Г. Пятков [6] доказал существование и единственность решений задачи Коши для одномерного параболического уравнения в пространстве Соболева.

И.Г. Петровским в фундаментальной работе [7] был определен широкий класс параболических систем, которые являются обобщением уравнения теплопроводности. Им были установлены условия параболичности и получены точные оценки фундаментальных матриц решений таких систем. Для параболических систем произвольного порядка С.Д. Эйдельманом были установлены оценки в нормах анизотропных пространств Гёльдера [8]. В работе [9] Е.А. Бадерко и С.И. Сахаровым были доказаны теоремы о единственности классического решения задачи Коши для параболической по И.Г. Петровскому системы второго порядка с коэффициентами, удовлетворяющими условию Дини.

Для параболического уравнения второго порядка в анизотропных пространствах Зигмунда, в том числе весовых, А.Н. Конёнковым в работах [10, 11] была построена шкала гладкости решения задачи Коши и установлено существование обобщенного решения. В настоящей работе для параболической системы второго порядка с постоянными коэффициентами получены оценки объемного потенциала в анизотропных пространствах Зигмунда с весом $H_m^{(-l)}(D)$, которые используются для построения шкалы гладкости решений задачи Коши. Данная шкала гладкости решений задачи Коши аналогична шкале, полученной В.А. Солонниковым [12] для параболических систем в анизотропных пространствах Гёльдера с нецелым показателем гладкости. В данной работе результаты В.А. Солонникова обобщаются для параболических пространств Зигмунда в случае целого показателя гладкости. Кроме того, установлено, что, если $l>0$, то в анизотропных пространствах Зигмунда $H_l(D)$ существует обобщенное решение задачи Коши для параболической системы, если от правой части требуется только локальная ограниченность, и при $l>1$ существует классическое решение, если правая часть системы локально удовлетворяет условию Зигмунда.

1. Необходимые обозначения

Введем следующие обозначения:

$$\Delta_x g(x)=g(x+\Delta x)-g(x),\ \ \Delta_x^2 g(x)=g(x+2\Delta x)-2g(x+\Delta x)+g(x).$$

Аналогично определяются первая и вторая разности по аргументу t. Определим для вектор-функции $g=\left(g_1,g_2,...,g_n\right)$ в пространстве Зигмунда $H_0(D)=L_\infty(D)$ норму: $\left|g\right|_{0,D}=\underset{D}{vrai}\sup\left|g\right|$.

Обозначим $\left[g\right]_{1,D}=\sup\limits_D\dfrac{\left|\Delta_x^2 g(x,t)\right|}{\left|\Delta x\right|}+\sup\limits_D\dfrac{\left|\Delta_t g(x,t)\right|}{\left|\Delta t\right|^{\frac{1}{2}}}$, и пусть для $\alpha=1,2$ $\left\langle g\right\rangle_{\alpha,D}=\sup\limits_D\dfrac{\left|\Delta_t^\alpha g(x,t)\right|}{\Delta t^{\frac{\alpha}{2}}}$.

В данном случае и далее точная верхняя грань берется по разностям, в которых все точки принадлежат D.

Для целых $a\geq 2$ положим

$$\left[g\right]_{a,D}=\sum_{|k|+2s=a-1}\left|\partial_x^k\partial_t^s g(x,t)\right|_{1,D},\ \ \left\langle g\right\rangle_{a,D}=\sum_{|k|+2s=a-2}\left\langle\partial_x^k\partial_t^s g(x,t)\right\rangle_{2,D}.$$

В случае, когда a – натуральное,

$$\left|g\right|_{a,D}=\sum_{|k|+2s\leq a-1}\sup_D\left|\partial_x^k\partial_t^s g(x,t)\right|+\left[g\right]_{a,D}+\left\langle g\right\rangle_{a,D}.$$

Пространства Зигмунда функций g, которые определены в слое D и имеют в ней все производные $\partial_x^k\partial_t^s g$, причем $|k|+2s<a$, с конечной величиной $\left|g\right|_{a,D}$ обозначим $H_a(\bar{D})$, а в локальном случае – $H_a(D)$.

Определим в слое D пространства Зигмунда с весом $H_a^{(b)}(D)$. Введем следующие обозначения:

$$\left|g\right|_{0,D}^{(b)}=vrai\sup_D t^{\frac{\max(b,0)}{2}}\left|g\right|.$$

Для натуральных a и целых $b\geq -a$ положим

$$\left[g\right]_{a,D}^{b}=\sum_{|k|+2s=a-1}\sup_{(x,t)\in D}t^{\frac{a+b}{2}}\frac{\left|\Delta_x^2\partial_x^k\partial_t^s g(x,t)\right|}{\left|\Delta x\right|}+\sum_{|k|+2s=a-1}\sup_{\substack{(x,t)\in D\\0<\Delta t<T-t}}t^{\frac{a+b}{2}}\frac{\left|\Delta_t\partial_x^k\partial_t^s g(x,t)\right|}{\left|\Delta t\right|^{\frac{1}{2}}},$$

$$\left\langle g\right\rangle_{1,D}^{(b)}=\sup_{\substack{(x,t)\in D\\0<\Delta t<T-t}}t^{\frac{1+b}{2}}\frac{\left|\Delta_t g(x,t)\right|}{\left|\Delta t\right|^{\frac{1}{2}}},$$

$$\left\langle g\right\rangle_{a,D}^{(b)}=\sum_{|k|+2s=a-2}\sup_{\substack{(x,t)\in D\\0<\Delta t<\frac{T-t}{2}}}t^{\frac{a+b}{2}}\frac{\left|\Delta_t^2\partial_x^k\partial_t^s g(x,t)\right|}{\left|\Delta t\right|},\ \text{при } a\geq 2,$$

$$\left|g\right|_{a,D}^{(b)}=\sum_{|k|+2s\leq a-1}\left|\partial_x^k\partial_t^s g\right|_{0,D}^{(|k|+2s+b)}+\left[g\right]_{a,D}^{(b)}+\left\langle g\right\rangle_{a,D}^{(b)},\ \text{при } b\geq 0,$$

$$\left|g\right|_{a,D}^{(b)}=\left|g\right|_{-b,D}+\sum_{-b<|k|+2s\leq a-1}\left|\partial_x^k\partial_t^s g\right|_{0,D}^{(|k|+2s+b)}+\left[g\right]_{a,D}^{(b)}+\left\langle g\right\rangle_{a,D}^{(b)},\ \text{при } b<0.$$

Пространства функций g, определенных в слое D и имеющих в ней все производные $\partial_x^k \partial_t^s g$, где $|k|+2s<a$, для которых величина $|g|_{a,D}^{(-b)}$ конечна, обозначим $H_a^{(b)}(D)$ в случае целых $a \ge 0,\ b \ge -a$. Нижний индекс a в этом обозначении указывает локальную гладкость, а величина $(-b)$ – гладкость в шкале Зигмунда в замыкании слоя $\bar{D}$.

2. Оценки объемного потенциала

Для параболической системы второго порядка с постоянными коэффициентами в слое $D = R^n \times (0,T),\ 0<T<\infty,$ рассмотрим задачу Коши:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k,r=1}^{n} a_{ijkr} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_r} - \frac{\partial u_i}{\partial t} = f_i,\ u_i\big|_{t=0} = \psi_i,\ i=\overline{1,m}. \tag{1}$$

В слое D система (1) удовлетворяет условиям равномерной параболичности в смысле И.Г. Петровского.

Пусть $Z(x,t)$ – фундаментальная матрица решений системы (1) [13, гл. 1]. Элементы матрицы $Z(x,t)$ определены и непрерывны в слое D и бесконечно дифференцируемы при $t>0$ и их производные по x и t удовлетворяют условию Гёльдера.

Для плотности $\varphi(x,t) \in H_0(R^n)$ рассмотрим потенциал Пуассона вида

$$\Pi\varphi(x,t) = \int_{R^n} Z(x-y,t)\varphi(y)dy. \tag{2}$$

Потенциал Пуассона (2) обладает следующим свойством: отображение $\Pi : \varphi \to \Pi\varphi$ является ограниченным оператором из пространства $H_l(R^n)$ в $H_m^l(D)$, где m и l – целые неотрицательные числа и $m \ge l$ [14].

Для функции $f \in H_0^{(1)}(D)$ рассмотрим объемный потенциал

$$Vf(M) = \int_D Z(x-y;t-\tau) f(y,\tau)dyd\tau,\ (x,t) \in \bar{D}.$$

Введем следующие обозначения: $u(x,t,\tau) = \Pi\left[f(\cdot,\tau)\right]\left(x,t-\tau\right)$. Тогда объемный потенциал примет вид $Vf(x,t) = \int_0^t u(x,t,\tau)d\tau$. Это позволяет применить установленные ранее свойства потенциала Пуассона [14] для исследования объемного потенциала.

Теорема 1. Пусть $m,l \in N$ и $m \ge 2$, $l \le m$. Тогда отображение $V : f \to Vf$ является ограниченным оператором из пространства $H_{m-2}^{(2-l)}(D)$ в $H_m^{(-l)}(D)$.

Доказательство. Пусть $m=2$. Тогда $l=1$ или $l=2$ и функция $f(\cdot,\tau) \in L_\infty(R)$ для почти всех $\tau \in \left(0,T\right)$ и справедлива оценка $\left|f\left(\cdot,\tau\right)\right|_{0,R^n} \le C\tau^{\frac{l-2}{2}}$ [10]. Используя оценки из теоремы 1 [10] в случае $|k| \le 1$, получим

$$\left|\partial_x^k Vf(x,t)\right| \le \int_0^t \left|\partial_x^k u(x,t,\tau)\right| d\tau \le C\int_0^t \left(t-\tau\right)^{-\frac{|k|}{2}} \tau^{\frac{l-2}{2}} d\tau = Ct^{\frac{l-|k|}{2}}. \tag{3}$$

Для упрощения записи оценок норма f входит в константу C. Далее для случая $m=2$ докажем оценки

$$\left|\Delta_x^2 \partial_x^k Vf(x,t)\right| \le C|\Delta x| t^{\frac{l-2}{2}},\quad |k|=1, \tag{4}$$

$$\left|\Delta_t \partial_x^k Vf(x,t)\right| \le C|\Delta t|^{\frac{1}{2}} t^{\frac{l-2}{2}},\quad |k|=1, \tag{5}$$

$$\left|\Delta_t^2 Vf(x,t)\right| \le C\left|\Delta t\right| t^{\frac{l-2}{2}}. \qquad (6)$$

Установим оценку (4). Если $\left|\Delta x\right|^2 \ge \frac{t}{2}$, то, используя (3), получим неравенство (4). При $\left|\Delta x\right|^2 \le \frac{t}{2}$

$$\Delta_x^2 \partial_x^k Vf(x,t) = \int_0^{t-|\Delta x|^2} \Delta_x^2 \partial_x^k u(x,t,\tau)d\tau + \int_{t-|\Delta x|^2}^{t} \Delta_x^2 \partial_x^k u(x,t,\tau)d\tau = I_1 + I_2.$$

Для оценки обоих слагаемых воспользуемся оценками потенциала Пуассона с плотностью f из соответствующего пространства Зигмунда [14].

Положим $\xi = \frac{\Delta x}{|\Delta x|}$, тогда получим оценку интеграла I_1

$$|I_1| = \left|\int_0^{t-|\Delta x|^2} \Delta_x^2 \partial_x^k u(x,t,\tau)d\tau\right| = \left|\int_0^{t-|\Delta x|^2} |\Delta x|^2 \int_0^1\int_0^1 \partial_\xi^2 \partial_x^k u(x+\alpha\Delta x+\beta\Delta x,t,\tau)d\alpha d\beta d\tau\right| \le$$

$$\le C|\Delta x|^2 \left[\int_0^{\frac{t}{2}} (t-\tau)^{-\frac{3}{2}} \tau^{\frac{l-2}{2}} d\tau + \int_{\frac{t}{2}}^{t-|\Delta x|^2} (t-\tau)^{-\frac{3}{2}} \tau^{\frac{l-2}{2}} d\tau\right] \le C|\Delta x| t^{\frac{l-2}{2}}.$$

Оценим интеграл I_2:

$$|I_2| = \int_{t-|\Delta x|^2}^{t} \Delta_x^2 \partial_x^k u(x,t,\tau)d\tau \le C \int_{t-|\Delta x|^2}^{t} (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \tau^{\frac{l-2}{2}} d\tau \le C t^{\frac{l-2}{2}} \int_{t-|\Delta x|^2}^{t} (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau = C|\Delta x| t^{\frac{l-2}{2}}.$$

Оценка (4) доказана.

Установим оценку (5). Пусть $\Delta t > 0$. При $\Delta t \ge \frac{t}{2}$ неравенство (5) вытекает из (3). Если $\Delta t < \frac{t}{2}$, то

$$\Delta_t \partial_x^k Vf(x,t) = \int_0^t \int_0^{\Delta t} \partial_t \partial_x^k u(x,t+\alpha,\tau)d\alpha d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \partial_x^k u(x,t+\Delta t,\tau)d\tau = K_1 + K_2.$$

Установим оценки для обоих получившихся интегралов:

$$|K_1| = \int_0^t \int_0^{\Delta t} \left|\partial_t \partial_x^k u(x,t+\alpha,\tau)\right| d\alpha d\tau \le C \int_0^{\Delta t} \int_0^t (t+\alpha-\tau)^{-\frac{3}{2}} \tau^{\frac{l-2}{2}} d\tau \le$$

$$\le C \int_0^{\Delta t} \left[\left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} \tau^{\frac{l-2}{2}} d\tau + t^{\frac{l-2}{2}} \int_{\frac{t}{2}}^{t} (t+\alpha-\tau)^{-\frac{3}{2}} d\tau\right] d\alpha \le C|\Delta t|^{\frac{1}{2}} t^{\frac{l-2}{2}}.$$

$$|K_2| = \int_t^{t+\Delta t} \partial_x^k u(x,t+\Delta t,\tau)d\tau \le C \int_t^{t+\Delta t} (t+\Delta t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \tau^{\frac{l-2}{2}} d\tau \le C|\Delta t|^{\frac{1}{2}} t^{\frac{l-2}{2}}.$$

Неравенство (5) доказано.

Для доказательства оценки (6) рассмотрим следующие случаи. При $\Delta t \ge \frac{t}{2}$ неравенство (6) следует из (2):

$$\left|\Delta_t^2 Vf(x,t)\right| = \int_0^t \left|\Delta_t^2 \partial_x^k u(x,t,\tau)\right| d\tau \le Ct^{\frac{l}{2}} \le C\left|\Delta t\right| t^{\frac{l-2}{2}}.$$

Если $\Delta t < \dfrac{t}{2}$, то

$$\Delta_t^2 Vf(x,t) = \int_0^t \Delta_t^2 u(x,t,\tau)d\tau = \left[\int_0^{\frac{t}{2}} \Delta_t^2 u(x,t,\tau)d\tau + \int_{\frac{t}{2}}^{t} \Delta_t^2 u(x,t,\tau)d\tau\right] +$$

$$+\int_t^{t+2\Delta t} u(x,t+2\Delta t,\tau)d\tau - 2\int_t^{t+\Delta t} u(x,t+\Delta t,\tau)d\tau = J_1 + J_2 + J_3 + J_4.$$

Для оценки первого и второго интегралов воспользуемся следующим фактом: функция $p(x) = x\ln x,\ x\in(0,+\infty)$ не удовлетворяет условию Липшица, но удовлетворяет условию Зигмунда и для $h>0$ справедливо неравенство [11]

$$\Delta_h^2 p(x) = \int_0^h\int_0^h (x+\alpha+\beta)^{-1} d\alpha d\beta \le \int_0^h\int_0^h (\alpha+\beta)^{-1} d\alpha d\beta = 2h\ln 2,$$

тогда

$$\left|J_1\right| = \left|\int_0^{\frac{t}{2}} \Delta_t^2 u(x,t,\tau)d\tau\right| = \left|\int_0^{\frac{t}{2}}\int_0^{\Delta t}\int_0^{\Delta t} \partial_t^2 u(x,t+\alpha+\beta,\tau)d\alpha d\beta d\tau\right| \le$$

$$\le C\int_0^{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\int_0^{\frac{t}{2}} \left(t+\alpha+\beta-\tau\right)^{-2} \tau^{\frac{l-2}{2}} d\tau d\alpha d\beta \le C\left(\frac{t}{2}\right)^{-2} \left|\Delta t\right|^2 \int_0^{\Delta t}\int_0^{\Delta t} d\alpha d\beta \int_0^{\frac{t}{2}} \tau^{\frac{l-2}{2}} d\tau \le C\left|\Delta t\right| t^{\frac{l-2}{2}}.$$

$$\left|J_2\right| = \left|\int_{\frac{t}{2}}^{t} \Delta_t^2 u(x,t,\tau)d\tau\right| = \left|\int_{\frac{t}{2}}^{t}\int_0^{\Delta t}\int_0^{\Delta t} \partial_t^2 u(x,t+\alpha+\beta,\tau)d\alpha d\beta d\tau\right| \le$$

$$\le C\int_0^{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\int_{\frac{t}{2}}^{t} \left(t+\alpha+\beta-\tau\right)^{-2} \tau^{\frac{l-2}{2}} d\tau d\alpha d\beta \le Ct^{\frac{l-2}{2}} \int_0^{\Delta t}\int_0^{\Delta t} \left[\left(\alpha+\beta\right)^{-1} - \left(\frac{t}{2}+\alpha+\beta\right)^{-1}\right] d\tau d\alpha d\beta \le$$

$$\le Ct^{\frac{l-2}{2}} \int_0^{\Delta t}\int_0^{\Delta t} \left(\alpha+\beta\right)^{-1} d\alpha d\beta \le C\left|\Delta t\right| t^{\frac{l-2}{2}}.$$

Слагаемые J_3 и J_4 имеют следующие оценки:

$$\left|J_3\right| \le C\int_t^{t+2\Delta t} \tau^{\frac{l-2}{2}} d\tau \le C\left|\Delta t\right| t^{\frac{l-2}{2}},\quad \left|J_4\right| \le C\int_t^{t+\Delta t} \tau^{\frac{l-2}{2}} d\tau \le C\left|\Delta t\right| t^{\frac{l-2}{2}}.$$

Для $m=2$ теорема доказана.

Пусть $m\ge 3$. Заметим, что при $\left|k\right| \le l-1$ справедливо неравенство $\left|\partial_x^k Vf(x,t)\right| = \left|V\left[\partial_x^k f\right](x,t)\right| \le C$, то достаточно доказать утверждение теоремы для $l=1$, то есть для $f\in H_{m-2}^{(1)}(D)$, которое в данном случае сводится к оценкам:

$$\left|\partial_x^k Vf(x,t)\right| \le Ct^{-\frac{|k|-1}{2}},\quad \left|k\right| \le m-1, \tag{7}$$

$$\left|\Delta_x^2 \partial_x^k Vf(x,t)\right| \le C\left|\Delta x\right| t^{-\frac{m-1}{2}}, \; |k| = m-1, \tag{8}$$

$$\left|\Delta_t \partial_x^k Vf(x,t)\right| \le C\left|\Delta t\right|^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{m-1}{2}}, \; |k| = m-1, \tag{9}$$

$$\left|\Delta_t^2 \partial_x^k Vf(x,t)\right| \le C\left|\Delta t\right| t^{-\frac{m-1}{2}}, \; |k| = m-2. \tag{10}$$

Доказательство оценок (7)–(10) строятся на рассуждениях, аналогичных доказательству неравенств (3)–(6). При этом используются оценки производных $\partial_x^k u(x,t,\tau)$ из леммы 1 [10] для доказательства неравенств (7), (8), а для (9) и (10) – из леммы 2 [10]. Теорема доказана.

Объемный потенциал с плотностью $f \in H_{m-2}^{(2-l)}(D)$ при $m \ge 3,\ 0 < l \le m$ удовлетворяет системе (1) в слое D, так как такие функции локально непрерывны по Гёльдеру. Следовательно, $u = \Pi\psi + Vf \in C\left(\overline{D}\right) \bigcap C_{x,t}^{2,1}\left(D\right)$ является классическим решением задачи Коши (1). Тогда из свойств потенциала Пуассона и теоремы 1 следует:

Теорема 2. Пусть $m \ge 3,\ 0 < l \le m,\ f \in H_{m-2}^{(2-l)}(D)$ и $\psi \in H_l(R^n)$. Тогда существует единственное классическое решение u задачи Коши (1) из пространства $H_m^{(-l)}(D)$ и справедлива оценка

$$|u|_{m;D}^{(-l)} \le C\left(|f|_{m-2;D}^{(2-l)} + |\psi|_{l;R^n}\right).$$

Из теоремы 2 следует, что любое решение системы (1), где $f \in H_l(D),\ l \ge 1$, в слое D будет принадлежать пространству $H_{l+2}(D)$.

Любое обобщенное решение в слое D системы $Lu = f \in L_\infty(D)$ совпадает в D с функцией из пространства $H_2(D)$ и справедлива

Теорема 3. Пусть $l = 1$ или $l = 2$, $f \in H_0^{(2-l)}(D)$ и $\psi \in H_l(R^n)$. Тогда существует обобщенное решение u задачи Коши (1) в пространстве $L_\infty(D)$, причем

$$|u|_{2;D}^{(-l)} \le C\left(|f|_{0;D}^{(2-l)} + |\psi|_{l;R^n}\right).$$

Для случая $f \in L_\infty(R^n), \psi \in L_\infty(R^n)$ существование обобщенного решения задачи Коши из пространства $L_\infty(D^T)$ для любого $T > 0$ и представление $u = \Pi\psi + Vf$ для уравнения теплопроводности установлены в [15, гл. 3]. Доказательство аналогично и в случае $l = 1$, когда почти всюду в слое D вектор-функция f удовлетворяет неравенству $\left|f\left(x,t\right)\right| \le Ct^{-1/2}$. Требуемая гладкость обобщенных решений задачи Коши (1) вытекает из свойств потенциала Пуассона [14] и теоремы 2.

Заключение

Таким образом, для объемного потенциала доказано, что отображение $V : f \to Vf$ является ограниченным оператором из пространства $H_{m-2}^{(2-l)}(D)$ в $H_m^{(-l)}(D)$. Установлено, что ограниченное в слое D классическое решение задачи Коши параболической системы (1) и начальной плотности $\psi \in H_l(R^n)$ принадлежит весовому пространству Зигмунда $H_m^{(-l)}(D)$ при $0 < l \le m,\ m \ge 3$. Полученные оценки можно применить для построения шкалы гладкости решений задачи Коши для параболической системы с переменными коэффициентами.

Литература

1. Tychonoff, A. Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur / A. Tychonoff // Матем. сб. – 1935. – № 42 (2). – С. 199–216.

2. Ладыженская, О.А. О единственности решения задачи Коши для линейного параболического уравнения / О.А. Ладыженская // Матем. сб. – 1950. – Т. 27 (69), № 2. – С. 175–184.

3. Гельфанд, И.М. О новом методе в теоремах единственности решения задачи Коши / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов // ДАН. – 1955. – № 102(6). – С. 1065–1068.

4. Золотарев, Г.Н. О единственности решения задачи Коши для систем, параболических в смысле И.Г. Петровского / Г.Н. Золотарев // Изв. вузов. Матем. – 1958. – № 2. – С. 118–135.

5. Бадерко, Е.А. Потенциал Пуассона в первой начально-краевой задаче для параболической системы в полуограниченной области на плоскости / Е.А. Бадерко, С.И. Сахаров // Дифференциальные уравнения. – 2022. – Т. 58, № 10. – С. 1333–1343.

6. Пятков, С.Г. О разрешимости задачи Коши с данными на боковой поверхности прямоугольника для одномерного параболического уравнения / С.Г. Пятков // Успехи кибернетики. – 2022. – Т. 3, № 2. – С. 40–46.

7. Петровский, И.Г. О задаче Коши в области неаналитических функций / И.Г. Петровский // УМН. – 1937. – № 3. – С. 234–238.

8. Эйдельман, С.Д. О задаче Коши для параболических систем / С.Д. Эйдельман // ДАН СССР. – 1954. – Т. 98, № 6. – С. 913–915.

9. Бадерко, Е.А. Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в плоских областях / Е.А. Бадерко, С.И. Сахаров // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. – 2022. – Т. 503, № 1. – С. 26–29.

10. Конёнков, А.Н. Задача Коши для уравнения теплопроводности в пространствах Зигмунда / А.Н. Конёнков // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41, № 6. – С. 820–831.

11. Конёнков, А.Н. Задача Коши для параболических уравнений в пространствах Зигмунда / А.Н. Конёнков // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 6. – С. 814–819

12. Солонников, В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида / В.А. Солонников // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. – 1965. – Т. 83. – С. 3–163.

13. Эйдельман, С.Д. Параболические системы / С.Д. Эйдельман. – М.: Наука, 1964. – 443 с.

14. Егорова, А.Ю. Задача Коши для системы параболических уравнений в анизотропных пространствах Зигмунда / А.Ю. Егорова // Вестник БГУ. Математика, информатика. – 2023. – № 3. – С. 14–22.

15. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

Поступила в редакцию 7 ноября 2023 г.

Сведения об авторе

Егорова Анастасия Юрьевна – аспирант, кафедра математики, Рязанский государственный университет им С.А. Есенина, г. Рязань, Российская Федерация, e-mail: an_batseva@mail.ru.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2024, vol. 16, no. 1, pp. 5–12

DOI: 10.14529/mmph240101

THE CAUCHY PROBLEM FOR INHOMOGENEOUS PARABOLIC SYSTEMS IN ANISOTROPIC ZYGMUND SPACES

A.Yu. Egorova
Ryazan State University named for S. A. Esenin, Ryazan, Russian Federation
E-mail: an_batseva@mail.ru

Abstract. This article deals with the Cauchy problem for a second-order parabolic system with constant coefficients and a non-zero right hand side which satisfy the condition of uniform parabolicity in the sense of Petrovsky. The initial condition can also be non-zero. Anisotropic Zygmund spaces which are analogous to parabolic Hölder spaces in the case of an integer smoothness index are used to construct a smoothness scale for solutions to such systems. The properties of the volume potential for a parabolic system were studied using their representation through the Poisson potential. Estimates of the operator given by the Poisson potential established estimates for the volume potential in weighted parabolic Zygmund spaces. The results are used to construct a smoothness scale for a bounded solution to the Cauchy problem for a second-order parabolic system in weighted anisotropic Zygmund spaces.

Keywords: parabolic system; the Cauchy problem; Poisson potential; volume potential; anisotropic Zygmund spaces.

References

1. Tychonoff A. Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur. *Math. col.*, 1935, no. 42 (2), pp. 199–216.

2. Ladyzhenskaya O.A. On the Uniqueness of the Solution of Cauchy's Problem for a Linear Parabolic Equation. *Mat. Sb. (N.S.)*, 1950, Vol. 27(69), no. 2, pp. 175–184.

3. Gel'fand I.M., Shilov G.E. O novom metode v teoremakh edinstvennosti resheniya zadachi Koshi (On a New Method in the Uniqueness Theorems for Solving the Cauchy Problem). *DAN*, 1955, no. 102(6), pp. 1065–1068. (in Russ.).

4. Zolotarev G.N. O edinstvennosti resheniya zadachi Koshi dlya sistem, parabolicheskikh v smysle I.G. Petrovskogo (On the Uniqueness of the Solution of the Cauchy Problem for Systems Parabolic in the Sense of I.G. Petrovsky). *Izv. vuzov. Matem.*, 1958, no. 2, pp. 118–135. (in Russ.).

5. Baderko E.A. Poisson Potential in the First Initial Boundary Value Problem for a Parabolic System in a Semi-Bounded Domain on a Plane. *Differential Equations*, 2022, Vol. 58, no. 10. pp. 1327–1337. DOI: 10.1134/S00122661220100044

6. Pyatkov S.G. Cauchy Problem Solvability with the Data Specified on the Rectangle Boundary for a One-Dimensional Parabolic Equation. *Russian Journal of Cybernetics*, 2022, Vol. 3, no. 2, pp. 40–46. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-6

7. Petrovskii I.G. On the Cauchy Problem in a Domain of Non-Analytic Functions. *Uspekhi mat. nauk*, 1937, no. 3, pp. 234–238. (in Russ.).

8. Eidelman S.D. The Cauchy Problem for Parabolic Systems. *DAN USSR*, 1954, Vol. 98, no. 6, pp. 913–915. (in Russ.).

9. Baderko E.A., Sakharov S.I. Uniqueness of Solutions of Initial-Boundary Value Problems for Parabolic Systems with Dini-Continuous Coefficients in Domains on the Plane. *Dokl. Math.*, 2022, Vol. 105, pp. 71–74. DOI: 10.1134/S1064562422020065

10. Konenkov A.N. The Cauchy Problem for the Heat Equation in Zygmund Spaces. *Differential Equations*, 2005, Vol. 41, no. 6, pp. 860–872. DOI: 10.1007/s10625-005-0225-z

11. Konenkov A.N. The Cauchy Problem for Parabolic Equations in Zygmund Spaces. *Differential Equations*, 2006, Vol. 42, no. 6, pp. 867–873. DOI: 10.1134/S0012266106060103

12. Solonnikov V.A. On Boundary Value Problems for Linear Parabolic Systems of Differential Equations of General Form. *Trudy Matematicheskogo instituta imeni V.A. Steklova*, 1965, Vol. 83, pp. 3–163. (in Russ.).

13. Eidelman S.D. *Parabolicheskie sistemy* (Parabolic systems). Moscow, Nauka Publ., 1964, 443 p. (in Russ.).

14. Egorova A.Yu. The Cauchy Problem for Systems of Parabolic Equations in Anisotropic Zygmund Spaces. *Bulletin of BSU. Mathematics, computer science*, 2023, no. 3, pp. 14–22. DOI: 10.18101/2304-5728-2023-3-14-22

15. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (Equations of Mathematical Physics). Moscow, Nauka Publ., 1988, 512 p. (in Russ.).

Received November 7, 2023

Information about the author

Egorova Anastasia Yurievna is a Post-Graduate Student, Department of Mathematics, Ryazan State University named after S.A. Esenin, Ryazan, Russian Federation, e-mail: an_batseva@mail.ru.