

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Белишев, Я. В. Курылев, Обратная задача акустического рассеяния в пространстве с локальной неоднородностью, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1986, том 156, 24–34

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.87

24 января 2025 г., 19:15:13



ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА АКУСТИЧЕСКОГО РАССЕЯНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ
С ЛОКАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

В однородном пространстве содержится включение конечных размеров, в котором скорость распространения волн переменна. Оно облучается плоскими волнами, распространяющимися во всевозможных направлениях. Регистрируется амплитуда рассеяния, определяемая через асимптотику рассеянных волн при больших $|x|$. В работе описывается процедура восстановления скорости по заданной амплитуде и приводится теорема единственности.

1. Постановка задачи. Спектральное представление. Примем обозначения: $x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$; $B_R = \{x: |x| < R\}$;

$$S_R = \partial B_R = \{x: |x| = R\}; \quad x = |x| \hat{x}; \quad \kappa = (\kappa^1, \kappa^2, \kappa^3) \in \tilde{\mathbb{R}}^3 -$$

- экземпляру \mathbb{R}^3 ; $\kappa = \omega \hat{\kappa}$; $\omega = |\kappa|$; $(\kappa, x) = \sum_{i=1}^3 \kappa^i x^i$. Пусть $w(x, \kappa) = (2\pi)^{-3/2} \exp i(\kappa, x) + w_*(x, \kappa)$ - решения прямой

задачи рассеяния:

$$\left[\Delta + \frac{\omega^2}{c^2(x)} \right] w(x, \kappa) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (I.1)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial |x|} - i\omega \right] w_*(x, \kappa) = O(|x|^{-1}); \quad w_*(x, \kappa) = O(|x|^{-1}) \quad (I.2)$$

($\kappa \in \tilde{\mathbb{R}}^3$). Всюду ниже на скорость $c(x)$ накладываются условия:

$$\text{supp} [1 - c(x)] \subset B_R \quad (I.3)$$

$$0 < c_1 \leq c(x) \leq c_2 < \infty; \quad \|c(x)\|_{C^2(\mathbb{R}^3)} \leq c_3 < \infty. \quad (I.4)$$

Для рассеянной волны известно асимптотическое представление:

$$w_*(x, \kappa) = \frac{e^{i\omega|x|}}{|x|} f(\omega, \hat{\kappa}, \hat{x}) + O(|x|^{-1}) \quad (I.5)$$

справедливое не только при условии локальности (I.3), но и при достаточно быстрой стабилизации $c(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$ (см.

[1] или [2], § 10). Обратная задача состоит в восстановлении $c(x)$ по амплитуде рассеяния $f(\omega, \hat{\kappa}, \hat{x})$; Дополнительно считаются известными постоянные R, c_1, c_2, c_3 *) Сразу отметим

*) Оценку "радиуса неоднородности" R в ряде случаев удается извлечь из оценок экспоненциального роста $f(\omega, \hat{\kappa}, \hat{x})$ по в комплексной области [4].

переопределенность постановки: функция на \mathbb{R}^3 восстанавливается по функции, заданной на $\mathbb{R}_+^1 \times S_1 \times S_1$. Характеристические условия на $f(\omega, \hat{k}, \hat{x})$, обеспечивающие разрешимость обратной задачи неизвестны. В случае потенциального рассеяния (для уравнения Шредингера $[-\Delta + q(x) - \omega^2] w = 0$) вопрос решен в [3].

Мы считаем *a priori* известным, что заданная функция $f(\omega, \hat{k}, \hat{x})$ является амплитудой рассеяния для некоторой задачи (I.1), (I.2) и предлагаем однозначную процедуру восстановления $c(x)$. Используемый метод предложен в работе Белишева М.И. "Об одном подходе к многомерным обратным задачам для волнового уравнения" (ДАН СССР; в печати); сравнительно подробное изложение его спектрального варианта имеется в работе Белишева М.И., Курылева Я.В. "Обратная спектральная задача рассеяния плоских волн в полупространстве с локальной неоднородностью" (Журнал вычислит. матем. и матем. физика; в печати).

Задаче (I.1), (I.2) сопоставим оператор $A = -c^2(x)\Delta$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} : (a, b)_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}^3} dx c^{-2}(x) a(x) \overline{b(x)}$ с областью определения $\mathcal{D}(A) = W_2^2(\mathbb{R}^3)$. Оператор A самосопряжен, спектр его абсолютно непрерывен и заполняет полуось $[0, \infty)$ (см. [1, 2, 5]). Решения $\{w(x, k) : k \in \tilde{\mathbb{R}}^3\} \subset W_{2, loc}^2(\mathbb{R}^3)$ образуют полный набор собственных функций непрерывного спектра A и удовлетворяют условиям ортогональности:

$$\int_{\mathbb{R}^3} dx c^{-2}(x) w(x, k) \overline{w(x, k')} = \delta(k - k') \quad k, k' \in \tilde{\mathbb{R}}^3$$

и полноты:

$$\int_{\mathbb{R}^3} dk w(x, k) \overline{w(x', k)} = \delta(x - x') \quad x, x' \in \mathbb{R}^3,$$

а преобразование $F : \mathcal{H} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}} = L_2(\tilde{\mathbb{R}}^3)$

$$\tilde{a}(k) = (Fa)(k) = \int_{\mathbb{R}^3} dx c^{-2}(x) a(x) \overline{w(x, k)}$$

является изометрией \mathcal{H} на $\tilde{\mathcal{H}}$:

$$(a, b)_{\mathcal{H}} = (Fa, Fb)_{\tilde{\mathcal{H}}} \quad (I.6)$$

Преобразование F диагонализует оператор A : его образ $\tilde{A} = FAF^{-1}$ в пространстве спектрального представления $\tilde{\mathcal{H}}$ есть оператор умножения на $|k|^2$ на естественной области определения.

2. Восстановление $w(x, \kappa)$ в $\mathcal{E}x \uparrow B_R$. В обратной задаче $w(x, \kappa)$ неизвестны, однако, следующее вычисление показывает, что по $f(\omega, \hat{k}, \hat{x})$ можно найти значения $w_*(x, \kappa)$ (а с ними и $w(x, \kappa)$) в области $\mathcal{E}x \uparrow B_R$, где $\varepsilon(x) \equiv 1$. В сферических координатах $|x|, \theta, \varphi: |x| \in [R, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ уравнение (I.1) принимает вид:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial |x|^2} + \frac{2}{|x|} \frac{\partial}{\partial |x|} + \frac{1}{|x|^2} \Delta_{\theta, \varphi} + \omega^2 \right] w_*(x, \kappa) = 0 \quad x \in \mathcal{E}x \uparrow B_R,$$

где $\Delta_{\theta, \varphi}$ - оператор Бельтрами. Проведем разделение переменных. Пусть

$$w_*(x, \kappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm}(|x|, \kappa) Y_{nm}(\theta, \varphi),$$

где

$$\left[\Delta_{\theta, \varphi} + n(n+1) \right] Y_{nm}(\theta, \varphi) = 0.$$

Коэффициенты a_{nm} удовлетворяют уравнениям:

$$\left[\frac{d^2}{d|x|^2} + \frac{2}{|x|} \frac{d}{d|x|} + \left(\omega^2 - \frac{n(n+1)}{|x|^2} \right) \right] a_{nm}(|x|, \kappa) = 0.$$

Их решениями, удовлетворяющими условиям излучения (I.4) являются функции $\sqrt{\frac{\omega}{|x|}} H_{n+1/2}^{(1)}(\omega|x|)$, где $H_\ell^{(1)}(\dots)$ - функции Ханкеля. Итак, при $x \in \mathcal{E}x \uparrow B_R$ рассеянная волна $w_*(x, \kappa)$ имеет вид:

$$w_*(x, \kappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{nm}(\kappa) \sqrt{\frac{\omega}{|x|}} H_{n+1/2}^{(1)}(\omega|x|) Y_{nm}(\theta, \varphi). \quad (2.1)$$

Для определения $c_{nm}(\kappa)$ воспользуемся представлением (I.5). Разложим $f(\omega, \hat{k}, \hat{x})$ в ряд по сферическим функциям:

$$f(\omega, \hat{k}, \hat{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n f_{nm}(\omega, \hat{k}) Y_{nm}(\theta, \varphi) \quad (2.2)$$

Сопоставляя (I.5), (2.1), (2.2) и используя асимптотику

$H_{n+1/2}^{(1)}(\omega|x|)$ при $|x| \rightarrow \infty$, можно вывести:

$$c_{nm} = e^{i \frac{\pi}{2}(n+1)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} f_{nm}(\omega, \hat{k}). \quad (2.3)$$

Формулы (2.1), (2.3) дают возможность определить $\{w(x, k) : k \in \mathbb{R}^3\}$ при $x \in \text{int } B_R$ по амплитуде рассеяния $f(\omega, \hat{k}, \hat{x})$. С этого момента значения $w(x, k)$ при $|x| \geq R$ в нашем распоряжении. Вместе с ними считаем определенными и производные $\left. \frac{\partial w(x, k)}{\partial |x|} \right|_{x \in S_R}$. Это позволяет уточнить спектральное представление в двух случаях:

1) пусть $P_{\mathcal{D}}$ - оператор, срезающий функции на область $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$:

$$P_{\mathcal{D}} a(x) = \begin{cases} a(x) & x \in \mathcal{D} \\ 0 & x \notin \mathcal{D} \end{cases}.$$

Отметим, что $P_{\mathcal{D}}$ - ортогональный проектор в \mathcal{H} на подпространство $\mathcal{H}(\mathcal{D}) = \{a(x) \in \mathcal{H} : \text{supp } a \subset \mathcal{D}\}$. Если функция $g(x)$ гармонична в $\mathcal{D}' \supset \mathcal{D}$, $\text{diam } \mathcal{D} < \infty$, $\partial \mathcal{D} \in C^2$, то $P_{\mathcal{D}} g \in \mathcal{H}$ и

$$\begin{aligned} (P_{\mathcal{D}} g)(k) &= (FP_{\mathcal{D}} g)(k) = \int_{\mathcal{D}} dx c^{-2}(x) g(x) \overline{w(x, k)} = \\ &= -\frac{1}{|k|^2} \int_{\mathcal{D}} dx g(x) \Delta \overline{w(x, k)} = \frac{1}{|k|^2} \int_{\partial \mathcal{D}} dy \left[\partial_{\nu} g(y) \overline{w(y, k)} - g(y) \partial_{\nu} \overline{w(y, k)} \right]. \end{aligned}$$

Здесь $y \in \partial \mathcal{D}$; $\nu = \nu(y)$ - внешняя нормаль к $\partial \mathcal{D}$ в точке y ;
 $\partial_{\nu} \equiv \frac{\partial}{\partial \nu}$. В частности, если $\mathcal{D} = B_R$, $\partial \mathcal{D} = S_R$, $g(x) \equiv 1$,
 то

$$(P_{B_R} 1)(k) = -\frac{1}{|k|^2} \int_{S_R} dy \partial_{|x|} \overline{w(y, k)}; \quad (2.4)$$

если $g(x) = \pi^i(x)$ - координатные функции: $\pi^i(x) = x^i$ ($i = 1, 2, 3$), то

$$(P_{B_R} \pi^i)(k) = \frac{1}{|k|^2} \int_{S_R} dy \left[\partial_{|x|} \pi^i(y) \overline{w(y, k)} - \pi^i(y) \partial_{|x|} \overline{w(y, k)} \right]; \quad (2.5)$$

2) пусть $u = u^{\pm}(x, t)$ - решение задачи

$$u_{tt} - c^2(x) \Delta u = f \quad x \in \mathbb{R}^3; t \in (0, T) \quad (2.6)$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$$

с источником $f(x, t) \in L_2(\mathcal{D} \times [0, T]) = \{f \in L_2(\mathbb{R}^3 \times [0, T]) : \text{supp } f \subset \mathcal{D} \times [0, T]\}$. Тогда

и

$$\begin{aligned} \tilde{u}^f(\kappa, t) &= (Fu^f)(\kappa, t) = \int_0^t ds \frac{\sin|\kappa|(t-s)}{|\kappa|} \tilde{f}(\kappa, s) = \\ &= \int_{\mathcal{D} \times [0, t]} ds dx c^{-2}(x) \frac{\sin|\kappa|(t-s)}{|\kappa|} f(x, s) \overline{w(x, \kappa)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

(всюду в дальнейшем $\text{diam } \mathcal{D} < \infty$).

ЗАМЕЧАНИЕ I: если \mathcal{D} располагается в области, где $c(x)$ и $w(x, \kappa)$ известны (в частности, при $\mathcal{D} \subset \{x \in B_R\}$), то представление (2.7) позволяет находить F -образы волн $u^f(x, t)$.

3. Полнота системы волн $\{u^f(x, t)\}$. С задачей (2.6) связан результат, лежащий в основе нашего подхода к обратной задаче.

Введем обозначения: $\tau(x, y)$ - геодезическое расстояние между $x, y \in \mathbb{R}^3$ в метрике $ds = c^{-1}(x)|dx|$; $\mathcal{D}^t = \{x \in \mathbb{R}^3 : \tau(x, \mathcal{D}) < t\}$ ($\mathcal{D}_0 \equiv \mathcal{D}$); $\mathcal{H}(\mathcal{D}^t) = \{a(x) \in \mathcal{H} : \text{supp } a \subset \mathcal{D}^t\} \subset \mathcal{H}$;

$\mathcal{U}(\mathcal{D}^t) = \text{cl} \{u^f(x, t) : f \in L_2(\mathcal{D} \times [0, t])\} \subset \mathcal{H}$ (cl -

- замыкание в норме \mathcal{H} и отметим очевидное включение: $\mathcal{U}(\mathcal{D}^t) \subset \mathcal{H}(\mathcal{D}^t)$. Справедлива

ТЕОРЕМА. $\mathcal{U}(\mathcal{D}^t) = \mathcal{H}(\mathcal{D}^t)$

Не приводя доказательства, отметим, что оно существенно использует теорему единственности в задаче Коши с данными на временноподобной поверхности:

ТЕОРЕМА ХОЛЬМГРЕНА-ЙОНА: пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$; $\Gamma = \partial\Omega \in C^2$; $\Gamma' \subset \Gamma$, $\text{mes } \Gamma' > 0$. Если решение задачи

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2(x)\Delta v = 0 & x \in \Omega; t \in (0, T) \\ v|_{\Gamma' \times [0, T]} = 0 \end{cases}$$

удовлетворяет условию $\partial_\nu v|_{\Gamma' \times [0, T]} = 0$, то $v(x, t) \equiv 0$ в области влияния части границы Γ' , т.е. при $\{(x, t) \in \Omega \times [0, T] : \tau(x, \Gamma') < \min(t, T - t)\}$.

Доказательство этой теоремы для вещественно-аналитических $c(x)$ имеется в работе [6]; в обзоре [7] приведено, со ссылкой на результаты Л.Хермандера, обобщение на случай $c(x) \in C^2(\Omega)$. Из совпадения подпространств $\mathcal{U}(\mathcal{D}^t)$ и $\mathcal{H}(\mathcal{D}^t)$ вытекают:

СЛЕДСТВИЕ I. $\forall a(x) \in \mathcal{H}(\mathcal{D}^T)$ и $\forall \varepsilon > 0 \exists f(x, t) \in L_2(\mathcal{D} \times [0, T]) : \|a - u^f(\cdot, T)\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon$ (функции из $\mathcal{H}(\mathcal{D}^T)$ ап-

проксимируются волнами от источников, распределенных в \mathcal{D} ;

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\alpha = \{f_j(x, t)\}_{j=1}^{\infty}$ - полная в $L_2(\mathcal{D} \times [0, T])$ система источников; тогда $\mathcal{L} \Delta \{u^f(x, T) : f \in \alpha\} = \mathcal{H}(\mathcal{D}^T)$

(Δ - линейная оболочка);

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть U^T - проектор в \mathcal{H} на $\mathcal{U}(\mathcal{D}^T)$; тогда $U^T = P_{\mathcal{D}^T}$, т.е. U^T срезает функции из \mathcal{H} на область \mathcal{D}^T , заполненную волнами от \mathcal{D} к моменту времени T .

В ходе решения обратной задачи потребуется спектральное представление проектора $P_{\mathcal{D}^T}$ в случае, когда \mathcal{D} находится в области с известной $c(x)$ (в частности, на первом шаге, $\mathcal{D} \subset \text{ext } B_R$). Для построения $\tilde{P}_{\mathcal{D}^T}$ выберем в $L_2(\mathcal{D} \times [0, T])$

какую-либо полную систему источников $\alpha = \{f_j(x, t)\}_{j=1}^{\infty}$, найдем

(см. (2.7) и Замечание I) систему Γ - образов иницированных ими волн $\{\tilde{u}^f(k, T) : f \in \alpha\}$ и ортогонализуем ее по Шмидту в

$\tilde{\mathcal{H}}$. Заметим, что процедура фактически равносильна замене системы источников α на новую систему β , полученную из исходной ортогонализацией по форме $\langle f_j, f_k \rangle \equiv (\tilde{u}^{f_j}(\cdot, T), \tilde{u}^{f_k}(\cdot, T))_{\tilde{\mathcal{H}}}$.

По построению система $\{\tilde{u}^f(k, T) : f \in \beta\}$ образует ортонормированный базис в $\tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{D}^T) = F\mathcal{U}(\mathcal{D}^T) = F\mathcal{H}(\mathcal{D}^T) = \tilde{\mathcal{H}}(\mathcal{D}^T)$.

По следствиям 2, 3

$$\tilde{P}_{\mathcal{D}^T} = \sum_{f \in \beta} (\cdot, \tilde{u}^f(\cdot, T))_{\tilde{\mathcal{H}}} \tilde{u}^f(k, T) \quad (3.1)$$

4. Спектральное представление индикаторов. Пусть $\mathcal{D} \subset \text{ext } B_R$, а $T > 0$ таково, что $\mathcal{D}^T \cap B_R \neq \emptyset$, т.е. волны от \mathcal{D} захватывают часть шара B_R . Функция

$$P_{\mathcal{D}^T} P_{B_R} 1 = P_{\mathcal{D}^T \cap B_R} 1 = \begin{cases} 1 & x \in \mathcal{D}^T \cap B_R \\ 0 & x \notin \mathcal{D}^T \cap B_R \end{cases}$$

является индикатором "захваченной" части B_R . Представления (2.4) и (3.1) позволяют найти его спектральный образ:

$$(FP_{\mathcal{D}^T \cap B_R} 1)(k) = \tilde{P}_{\mathcal{D}^T} \tilde{P}_{B_R} 1(k) . \quad (4.1)$$

Пусть $\Delta \mathcal{D}^T = \mathcal{D}^{T+\Delta T} \setminus \mathcal{D}^T$ - слой, заключенный между волновыми фронтами $\Sigma^{T+\Delta T}(\mathcal{D})$ и $\Sigma^T(\mathcal{D})$ ($\Sigma^t(\mathcal{D}) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \tau(x, \mathcal{D}) = t\}$).

Пусть далее, $\Delta P^T = P_{\mathcal{D}^{T+\Delta T}} - P_{\mathcal{D}^T}$ - проектор, срезающий функции

на $\Delta \mathcal{D}^T$. Тогда

$$(\mathbb{F} P_{\Delta \mathcal{D}^T \cap B_R} 1)(\kappa) = \widetilde{\Delta} P^T \widetilde{P}_{B_R} 1(\kappa) \quad (4.2)$$

есть спектральное представление индикатора области $\Delta \mathcal{D}^T \cap B_R$ - общей части слоя и шара B_R . Предположим, что $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3 \subset \mathcal{E} \cap B_R$ таковы, что части слоев, лежащие в B_R пересекаются: $\prod_{i=1}^{T, \Delta T} \bigcap_{i=1}^3 [B_R \cap \Delta \mathcal{D}_i^T] \neq \emptyset$. Индикатор пересечения представим в виде: $P_{\prod_{i=1}^{T, \Delta T} 1} = \Delta P_1^T \Delta P_2^T \Delta P_3^T 1$, где $\Delta P_i^T = P_{\mathcal{D}_i^{T+\Delta T}} - P_{\mathcal{D}_i^T}$. Отсюда

$$(\mathbb{F} P_{\prod_{i=1}^{T, \Delta T} 1})(\kappa) = \widetilde{\Delta} P_1^T \widetilde{\Delta} P_2^T \widetilde{\Delta} P_3^T \widetilde{P}_{B_R} 1(\kappa). \quad (4.3)$$

Подчеркнем важное обстоятельство: представление (4.3) позволяет выразить \mathbb{F} -образ индикатора пересечения $\prod_{i=1}^{T, \Delta T}$, лежащего в области с неизвестной $c(x)$ через данные обратной задачи благодаря тому, что \mathcal{D}_i расположена в области с известной $c(x)$. В то же время о расположении и виде $\prod_{i=1}^{T, \Delta T}$ ничего определенного сказать нельзя, т.к. вследствие неоднородности среды волновые фронты $\Sigma^{\dagger}(\mathcal{D}_i)$, ограничивающие $\prod_{i=1}^{T, \Delta T}$ могут иметь весьма сложную форму. Однако, при малых временах форма фронтов, близка к сферической и картина упрощается. Этот факт используется в следующем пункте.

5. \mathcal{G} -образная последовательность. Ход дальнейших построений иллюстрируется рисунком I.

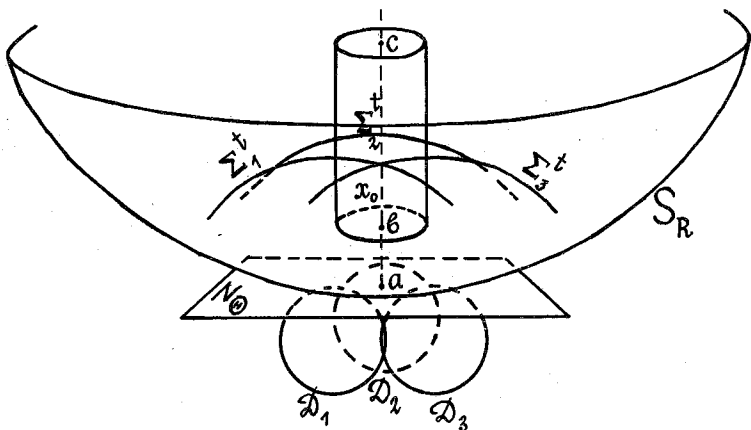


Рис. I

На нем: $\ominus = \{ \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3 \}$ - тройка попарно касающихся шаров оди-

накового радиуса r ; N_{\oplus} - (опорная) плоскость, касающаяся всех \mathcal{A}_i ; $\Sigma_i^t = \{x \in \mathbb{R}^3: \tau(x, \mathcal{A}_i) = t\}$ - фронты волн от \mathcal{A}_i ;

$x_0 = x_0(\oplus, t)$ - точка пересечения фронтов, отделенная от \oplus опорной плоскостью; ac - ось симметрии \oplus и цилиндра Q_{\oplus} радиуса r ; т. $a \in N_{\oplus}$, $|ab| = r$, $|ac| = \frac{c_2}{c_1} r$

(c_1, c_2 - постоянные из (I.4)). Если вся система - тройка \oplus и цилиндр Q_{\oplus} - располагается в однородной части пространства с $c(x) = 1$, то при всех временах t из некоторого интервала $[T_1, T_2]$ картина волновых фронтов имеет регулярный характер: а) фронты Σ_i^t пересекаются в единственной точке $x_0(\oplus, t) \in Q_{\oplus}$ и б) нормали к Σ_i^t в точке пересечения составляют пространственный базис. С ростом t т. $x_0(\oplus, t)$ движется вдоль оси ac . Неоднородность приводит к деформации Σ_i^t и смещению $x_0(\oplus, t)$ с оси, однако, при малых r и $t \sim r$ оно имеет порядок r^2 , вследствие чего регулярный характер пересечения фронтов сохраняется. В точной формулировке: можно указать такие постоянные r_*, σ_1, σ_2 , что при любом положении тройки $\oplus = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3\}$ шаров радиуса $r < r_*$ для всех $t \in [\sigma_1 r, \sigma_2 r]$ будут выполнены условия а) и б).

ЗАМЕЧАНИЕ 2: возможные значения r_*, σ_1, σ_2 можно привести в виде явных комбинаций оценочных постоянных c_1, c_2, c_3 из (I.4), которые в обратной задаче предполагаются заданными. Всюду ниже считаем, что конкретный выбор r_*, σ_1, σ_2 произведен так, что условия а), б) выполнены.

Если $T, \Delta T$ таковы, что $T, T + \Delta T \in [\sigma_1 r, \sigma_2 r]$, то пересечение слоев $\prod_{i=1}^3 \Pi^{T, \Delta T} = \bigcap_{i=1}^3 [\Delta \mathcal{A}_i^T \cap B_R]$ будет невырожденным криволинейным параллелепипедом, стягивающимся к т. $x_0(\oplus, T)$ при $\Delta T \rightarrow 0$ (двумерный аналог этой ситуации показан на рис.2):

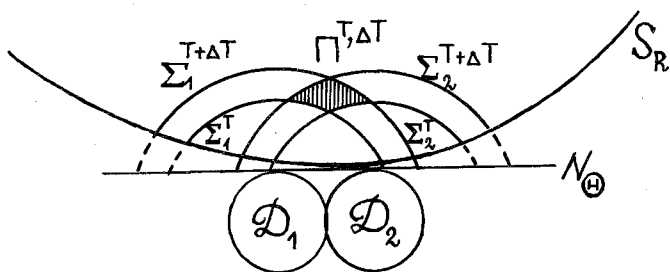


Рис.2

Нормируем индикатор $\Pi^{T, \Delta T}$:

$$\begin{aligned} \delta_{\Delta T}^{x_0}(x) &= (P_{\Pi^{T, \Delta T}} 1, 1)_{\mathcal{H}}^{-1} P_{\Pi^{T, \Delta T}} 1(x) = \\ &= \| P_{\Pi^{T, \Delta T}} 1 \|_{\mathcal{H}}^{-2} P_{\Pi^{T, \Delta T}} 1(x). \end{aligned}$$

В спектральном представлении

$$\widetilde{\delta}_{\Delta T}^{x_0}(k) = \| \widetilde{P}_{\Pi^{T, \Delta T}} 1 \|_{\widetilde{\mathcal{H}}}^{-2} \widetilde{P}_{\Pi^{T, \Delta T}} 1(k). \quad (5.1)$$

Последовательность $\delta_{\Delta T}^{x_0}(x)$ является δ -образной при $\Delta T \rightarrow 0$:

$$\delta_{\Delta T}^{x_0}(x) \rightarrow c^2(x_0) \delta(x - x_0).$$

Отсюда

$$\lim_{\Delta T \rightarrow 0} (\pi^i, \delta_{\Delta T}^{x_0})_{\mathcal{H}} = x_0^i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.2)$$

$$\lim_{\Delta T \rightarrow 0} (w(\cdot, k), \delta_{\Delta T}^{x_0})_{\mathcal{H}} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \overline{\widetilde{\delta}_{\Delta T}^{x_0}(k)} = w(x_0, k). \quad (5.3)$$

Γ -образы функций, входящих в скалярные произведения (5.2), (5.3) находятся из данных обратной задачи (см. (2.5), (5.1)); изометрия (1.6) позволяет вычислять пределы, используя спектральное представление:

$$\lim_{\Delta T \rightarrow 0} (\widetilde{\pi}^i, \widetilde{\delta}_{\Delta T}^{x_0})_{\widetilde{\mathcal{H}}} = x_0^i \quad (i=1, 2, 3); \quad \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \overline{\widetilde{\delta}_{\Delta T}^{x_0}(k)} = w(x_0, k). \quad (5.4)$$

Эти формулы и решают обратную задачу. Дело в том, что $x_0(\Theta, \Gamma)$ находится в области, где $c(x)$ неизвестны. Первый из пределов (5.4) позволяет определить координаты x_0 , а второй - значение $w(x_0, k)$ ($k \in \mathbb{N}^3$).

6. Восстановление $c(x)$. Наши рассуждения сведем в краткую схему решения обратной задачи:

1) подберем постоянные r_* , δ_1 , δ_2 так, чтобы выполнялись условия а), б) п.5 и фиксируем значения $r < r_*$ и $\Gamma, \Gamma + \Delta T \in [\delta_1 r, \delta_2 r]$. Поместим тройку Θ в $\xi x \Gamma B_R$ таким образом, чтобы т. $x_0(\Theta, \Gamma)$ заведомо находилась в B_R . В шарах $\mathcal{D}_i \in \Theta$ выберем по полной в $L_2(\mathcal{D}_i \times [0, \Gamma + \Delta T])$ системе источ-

ников α_i ($i=1,2,3$);

2) для каждого из моментов времени $T_n = T + n^{-1} \Delta T$ ($n \rightarrow \infty$), используя (2.7), найдем Γ -образы волн $\{\tilde{u}^f(k, T_n) : f \in \alpha_i\}$. Их ортогонализация в $\tilde{\mathcal{H}}$ дает семейство ортонормированных базисов в $\tilde{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_i^{T_n})$. По каждому базису построим Γ -образы соответствующих проекторов - срезок $\tilde{P}_{\mathcal{D}_i^{T_n}}$, а затем проекторы $\tilde{\Delta P}_i^{T_n}$ и $\prod_{i=1}^3 \tilde{\Delta P}_i^{T_n}$ (см.(3.1));

3) с помощью (2.4), (4.3) восстановим в $\tilde{\mathcal{H}}$ Γ -образ индикатора параллелепипеда $\prod_{i=1}^3 \tilde{w}^{-1} \Delta T$ и после нормировки (5.1) построим последовательность $\tilde{\delta}_{w^{-1} \Delta T}^{x_0}(k)$. Используя Γ -образы координатных функций (2.5), определим скалярные произведения в (5.4) и найдем пределы: $x_0^i = \lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{\pi}^i, \tilde{\delta}_{w^{-1} \Delta T}^{x_0})_{\tilde{\mathcal{H}}}$, $w(x_0, k) =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\delta}_{w^{-1} \Delta T}^{x_0}}{w^{-1} \Delta T};$$

4) перемещая точку касания a опорной плоскости N_{\odot} по сфере S_R и меняя $\nu < \nu_*$ (см.рис.1), восстановим $w(x, k)$ ($k \in \tilde{\mathbb{R}}^3$) в некоторой приграничной подобласти B_R , содержащей слой $R - \nu_* \leq |x| \leq R$. Там же восстановим скорость:

$$c(x) = |k| \left[-\frac{w(x, k)}{\Delta w(x, k)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Процедура восстановления $c(x)$ в $B_{R-\nu_*}$ вполне аналогична приведенной выше. Число шагов, необходимое для нахождения $c(x)$ всюду в B_R имеет порядок R/ν_* .

ЗАМЕЧАНИЕ 3: сам факт существования однозначной процедуры 1) - 4) приводит к теореме единственности: в классе скоростей (1.3), (1.4) может существовать не более одного решения обратной задачи, отвечающего заданной амплитуде рассеяния $f(\omega, \hat{k}, \hat{x})$.

Эта процедура применима к обратной задаче в пространстве любой размерности.

Авторы глубоко признательны участникам семинара А.С.Благовещенского за ценные советы и обсуждения.

Литература

1. Р е е д М., С и м о н В. The scattering of classical waves from in homogeneous media. Math.Z., 1977, v.155, N 1, p.163-180.
2. Р и д М., С а й м о н Б. Методы современной математической физики. т.3. Теория рассеяния. - М.: Мир, 1982, 443 с.

3. Ф а д д е в Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния. П.-В кн.: Совр. проблемы математики. 1974, т.3, с.93-180.
4. T r u d i n g e r P.L. The inverse scattering problem for perturbed wave equations. Arch.Ration.Mech.Anal., 1983, v.81, N 3, p.245-279.
5. W i l c o x C.H. Scattering theory for d'alambert equation in exterior domains. Lect.Notes Math., v.442, 1975, 117 p.
6. R u s s e l l D.L. Boundary value control theory of the higher dimensional wave equations. SIAM J.Control, 1971, v.9, N 1, p.29-42.
7. R u s s e l l D.L. Controlability and stabilizability theory for linear partial differential equations. SIAM Review, 1978, v.20, N 4, p.639-739.

M.Y.Belishev, Y.V.Kurylev. Inverse problem for acoustical scattering in space with local inhomogeneity.

Homogeneous space contains a compact inclusion where the wave velocity is variable. It is irradiated by plane waves propagating in various directions. The inverse problem is to reconstruct the velocity from the scattering amplitude determined as asymptotics of scattered waves in infinity. A procedure of reconstruction and the uniqueness theorem are described in the article.