



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Н. Дудин, И. И. Липатов, О закритическом режиме гиперзвукового обтекания треугольного крыла,  
*Прикл. мех. техн. физ.*, 1985, том 26, выпуск 3, 100–106

<https://www.mathnet.ru/pmtf5302>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.83

16 мая 2025 г., 14:21:17



## О ЗАКРИТИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ ГИПЕРЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ТРЕУГОЛЬНОГО КРЫЛА

Г. Н. Дудин, И. И. Липатов

(Москва)

Характер течения в пространственном пограничном слое на треугольном крыле в гиперзвуковом потоке даже при нулевом угле атаки может быть весьма разнообразным. Параметрами, определяющими тип течения и его особенности, являются угол стреловидности передней кромки, температура поверхности, величина параметра взаимодействия и другие характеристики.

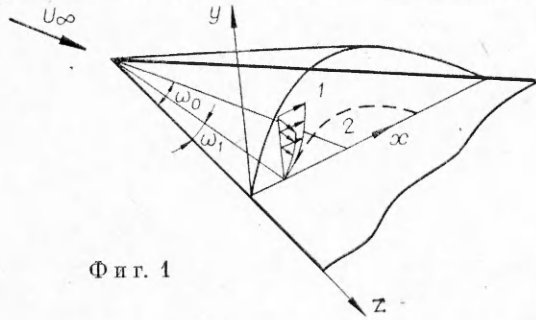
Симметричное обтекание тонкого треугольного крыла на режиме сильного вязкого взаимодействия рассмотрено в [1], однако полученное автомодельное решение не удовлетворяет условию непротекания в плоскости симметрии крыла.

В дальнейших исследованиях [2, 3] для течений на нехолодных телах на режиме сильного вязкого взаимодействия показано, что решение вблизи передней кромки не является единственным, это позволяет удовлетворить граничным условиям на заднем конце тела или в плоскости симметрии треугольного крыла. Значительные трудности, связанные с построением глобального решения, обусловлены необходимостью учета структуры течения вблизи плоскости симметрии крыла. Некоторые частные типы возможных локальных течений указаны и получены в [4, 5].

В [6, 7] получены глобальные решения уравнений трехмерного пограничного слоя на режиме сильного вязкого взаимодействия в предположении, что эти уравнения справедливы на всем нехолодном крыле.

Некоторые вопросы, связанные с передачей возмущений на холодных телах и в следе, рассмотрены в [8]. В данной работе изучены особенности, связанные с распространением возмущений при закритических режимах гиперзвукового обтекания холодных треугольных крыльев, и получены численные решения.

**1.** Рассматривается обтекание треугольного полубесконечного крыла гиперзвуковым потоком вязкого газа (фиг. 1). Вводится декартова система координат с осями  $xl$  и  $zl$ , направленными по нормали к одной из кромок



Фиг. 1

и вдоль оси кромки, ось  $yl$  направлена по нормали к поверхности крыла. Рассматривается режим сильного взаимодействия течения в пограничном слое с внешним невязким гиперзвуковым потоком [9] для случая асимптотически малого отношения температуры поверхности к температуре торможения. Безразмерная толщина пограничного слоя имеет порядок  $\delta^*/l \sim \tau = Re_0^{-1/4}$ , где  $Re_0 = \rho_\infty U_\infty l / \mu_0$  — число Рейнольдса, вычисленное по значениям плотности и скорости газа в невозмущенном потоке, по коэффициенту вязкости при температуре торможения ( $\mu_0 = \mu(T = T_0)$ ) и характерной длине  $l$ , которая для автомодельной задачи выпадает из конечных результатов. Для компонентов вектора скорости в направлениях осей  $x, y, z$ , плотности, давления, энтальпии торможения, коэффициента вязкости вводятся следующие обозначения:

$$U_\infty \bar{u}, \tau U_\infty \bar{v}, U_\infty \bar{w}, \tau^2 \bar{\rho}, \tau^2 \bar{p}, (U_\infty^2/2) \bar{g}, \mu_0 \bar{\mu}.$$

Уравнения пространственного пограничного слоя и граничные условия после замены переменных

$$(1.1) \quad \lambda = x^{-1/4} \int_0^y \bar{\rho} dy, \quad \zeta = \omega_0^{-1} \arctg(x/z), \quad \bar{\delta} = x^{1/4} \int_0^\infty \bar{\rho}^{-1} d\lambda,$$

$$\bar{u} = \frac{\partial f}{\partial \lambda}, \quad \bar{v} = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}, \quad \bar{\rho} = x^{-1/2} \rho, \quad \bar{g} = g, \quad \bar{p} = x^{-1/2} p, \quad \bar{\delta} = x^{3/4} \delta$$

( $\omega_0$  — угол между осью  $z$  и направлением набегающего потока) приводятся к виду

$$\begin{aligned}
 (1.2) \quad (Nf'')' + \frac{1}{4}ff'' + \frac{\gamma-1}{4\gamma} \left(1 - \frac{\dot{\gamma} \sin 2\omega}{p\omega_0}\right) (g - f'^2 - \varphi'^2) = \\
 = \frac{\sin 2\omega}{2\omega_0} (f'\dot{f}' - f''\dot{f}) - \frac{\sin^2 \omega}{\omega_0} (\varphi'\dot{f}' - f''\dot{\varphi}), \\
 (N\varphi'')' + \frac{1}{4}f\varphi'' + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{\dot{p} \sin^2 \omega}{p\omega_0} (g - f'^2 - \varphi'^2) = \\
 = \frac{\sin 2\omega}{2\omega_0} (f'\dot{\varphi}' - \varphi''\dot{f}) - \frac{\sin^2 \omega}{\omega_0} (\varphi'\dot{\varphi}' - \varphi''\dot{\varphi}), \\
 (N\sigma^{-1}g')' + \frac{1}{4}fg' + N \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) (f'^2 + \varphi'^2) = \\
 = \frac{\sin 2\omega}{2\omega_0} (f'\dot{g}' - g'\dot{f}') - \frac{\sin^2 \omega}{\omega_0} (\varphi'\dot{g}' - g'\dot{\varphi}'),
 \end{aligned}$$

$$N = \frac{2\gamma}{\gamma-1} p (g - f'^2 - \varphi'^2)^{n-1}, \quad \omega = \omega_0 \zeta, \quad \delta = \frac{\gamma-1}{2\gamma p} \int_0^\infty (g - f'^2 - \varphi'^2) d\lambda,$$

$$f_w - \varphi_w = f'_w = \varphi'_w = \dot{g}_w = 0, \quad f'_e = \sin \omega_0, \quad \varphi'_e = \cos \omega_0, \quad \dot{g}_e = 1,$$

$$p = \frac{\gamma+1}{2} \left[ \frac{3}{4} \delta \sin \omega_0 + \frac{1}{\omega_0} \frac{d\delta}{d\zeta} \left( \frac{1}{2} \sin(2\omega) \sin \omega_0 - \sin^2 \omega \cos \omega_0 \right) \right]^2.$$

Далее рассмотрен случай линейной зависимости коэффициента вязкости от температуры ( $n = 1$ ) и  $\sigma = 1$ .

Характер течения около холодного треугольного крыла зависит от режима взаимодействия пограничного слоя с внешним гиперзвуковым потоком [8]. При докритическом режиме возмущения могут распространяться вверх по потоку, в рассматриваемом случае — от плоскости симметрии к кромкам. Для отбора единственного решения необходимо учитывать дополнительное краевое условие, например величину давления на некоторой поверхности  $\zeta = \text{const}$ . В области закритического течения возмущения не распространяются вверх по потоку и течение описывается автомодельным решением системы уравнений (1.2). На холодном крыле изменение толщины вытеснения создается основной частью пограничного слоя, причем это изменение линейно зависит от возмущения давления [8]. Режим взаимодействия определяется знаком производной  $d\delta/dp$ , при  $d\delta/dp < 0$  реализуется закритический режим, а при  $d\delta/dp > 0$  — докритический.

При уменьшении угла стреловидности крыла  $\chi = \pi/2 - \omega_0$  величина  $d\delta/dp|_{\zeta=0}$  монотонно уменьшается, обращается в нуль при некотором критическом значении  $\chi^* = \pi/2 - \omega^*$  и остается отрицательной при дальнейшем уменьшении угла стреловидности до нуля [8]. Таким образом, в пограничном слое на треугольном крыле при  $\omega_0 > \omega^*$  существуют области закритического и докритического течения, причем переход от одного типа течения к другому происходит при некотором значении  $\omega^* < \omega_1 < \omega_0$  [8]. Течение в области между передней кромкой и поверхностью  $\omega = \omega_1$  описывается автомодельным решением системы уравнений (1.2). В области между поверхностью  $\omega = \omega_1$  и плоскостью симметрии крыла при построении решения необходимо учитывать влияние передачи возмущений. На возмущенное течение в пограничном слое при  $\lambda = O(1)$  вблизи поверхности  $\omega = \omega_1$  силы вязкости не влияют. Анализ системы уравнения, описывающей такое течение, показывает, что система может быть один раз проинтегрирована по  $\zeta$ , откуда следует, что возмущения функций  $f$  и  $g$  пропорциональны возмущению давления  $p_1(\zeta_1)$ . Решение

справа от поверхности  $\omega = \omega_1$  представим в виде разложений для функций течения:

$$(1.3) \quad p = p_0 + p_1(\zeta_1) + \dots, \quad \delta = \delta_0 + \frac{p_1(\zeta_1)}{p_0} \delta_1 + \dots,$$

$$f = f_0(\lambda) + \frac{p_1(\zeta_1)}{p_0} f_1(\lambda) + \dots, \quad \varphi = \varphi_0(\lambda) + \frac{p_1(\zeta_1)}{p_0} \varphi_1(\lambda) + \dots,$$

$$g = g_0(\lambda) + \frac{p_1(\zeta_1)}{p_0} g_1(\lambda) + \dots, \quad \zeta_1 = \zeta - \frac{\omega_1}{\omega_0},$$

где функции с индексом 0 соответствуют автомодельному решению. Подстановка (1.3) в систему уравнений (1.2) дает линейную систему уравнений для первого приближения, решение которой получено в [8]. Отметим, что при  $\lambda = O(1)$  это решение не зависит от вида функции  $p_1(\zeta_1)$ . Выражение для изменения толщины вытеснения, формируемого в области  $\lambda = O(1)$ , имеет вид

$$(1.4) \quad \delta_1 = \frac{\gamma-1}{2\gamma p_0} \Delta p \left[ \frac{\gamma-1}{2} \int_0^\infty \left( \frac{g_0 - f_0'^2 - \varphi_0'^2}{f_0' \cos \omega_1 - \varphi_0' \sin \omega_1} \right)^2 d\lambda - \int_0^\infty (g_0 - f_0'^2 - \varphi_0'^2) d\lambda \right],$$

где  $\Delta p = p_1/p_0$ .

Производная  $d\delta_1/d\Delta p$  линейно зависит от координаты  $\zeta$ . Дифференцирование (1.4) по  $\zeta$  позволяет получить выражение

$$(1.5) \quad \frac{d\delta_1}{d\Delta p} = \frac{(\gamma-1)^2}{4\gamma p_0} \omega_0 J_1 \zeta_1, \quad J_1 = 2 \int_0^\infty \frac{(g_0 - f_0'^2 - \varphi_0'^2)^2 (f_0' \sin \omega_1 + \varphi_0' \cos \omega_1)}{(f_0' \cos \omega_1 - \varphi_0' \sin \omega_1)^3} d\lambda.$$

Решение для первого приближения не является равномерно точным, так как не учитывает влияния сил вязкости. Для удовлетворения граничных условий, заданных на поверхности крыла, необходимо ввести в рассмотренную область 2, в которой влияние сил вязкости и сил инерции в первом приближении одинаково. Пристеночная область 2 индуцирует изменение толщины вытеснения  $\Delta_1$ . Оценка для толщины области 2 и для масштабов функций в этой области получается в результате приравнивания в системе уравнений порядков членов, учитывающих влияние сил вязкости и сил инерции. Наконец, требование сращивания решений в областях 1 и 2 приводит к равенству порядков градиента давления и инерционных членов, что при известной толщине области 2 позволяет найти масштабы возмущенных функций  $f$ ,  $\varphi$  и  $g$ . Выражение для изменения толщины вытеснения, формируемое в области 2, имеет вид

$$(1.6) \quad \Delta_1 = c_1 p_1 (p_1/p_0)^{1/3} \quad (c_1 - \text{константа}).$$

Для определения функции  $p_1(\zeta_1)$  необходимо использовать условие взаимодействия. Предположение о том, что основной вклад в изменение толщины вытеснения формируется в области 1, приводит с учетом условия взаимодействия к функции вида  $p_1 = c \zeta_1^\alpha$ . Течение в области 2 индуцирует тогда изменение толщины  $\Delta_1 \approx \zeta_1^{1.3} p_1$ , которое больше по порядку величины, чем  $\delta_1$  для всех допустимых значений  $\alpha$ . Предположение о том, что основной вклад в толщину вытеснения формируется в области 2, также не приводит к самосогласованной схеме. В этом случае оказывается, что индуцированное возмущение давления больше, чем исходное возмущение.

Анализ условия взаимодействия показывает, что решение (1.3) существует, если суммарное изменение толщины вытеснения в первом приближении равно нулю:

$$(1.7) \quad \Delta \delta = \delta_1 + \Delta_1 = 0.$$

Аналогичный характер взаимодействия описан в [10], где изучено течение в окрестности задней кромки пластины, и в [11], где исследовано обтека-

ние малых неровностей, находящихся на дне ламинарного пограничного слоя. Выражение для функции  $p_1(\zeta_1)$  вытекает из (1.5) и (1.6) и имеет вид

$$(1.8) \quad p_1(\zeta_1) = c \exp(-\alpha/\zeta_1^2).$$

Суммарное изменение толщины вытеснения может быть получено из (1.2):

$$(1.9) \quad \Delta\delta = \frac{\gamma-1}{2\gamma p_0} \Delta p \left[ \int_0^\infty (g_1 - 2f_0'f_1' - 2\varphi_0'\varphi_1' - g_0 + f_0'^2 + \varphi_0'^2) d\lambda + \right. \\ \left. + \zeta_1 \int_0^\infty (g_2 - g_1(0)) d\eta \right] + O(\zeta_1^2 p_1/p_0), \quad \eta = \frac{\lambda}{\zeta_1^{1/2}}.$$

Первый интеграл в правой части (1.9) представляет собой вклад области 1 и, согласно (1.5), записывается в виде  $\delta_1 = (\gamma-1)^2 \Delta p \omega_0 J_1 \zeta_1 / 4\gamma p_0$ . Второй интеграл в (1.9) представляет собой вклад пристеночной области в изменение толщины вытеснения, для нахождения этого интеграла необходимо получить решение для области 2.

В области 2 вводится представление функций

$$(1.10) \quad f = a\eta^2 \zeta_1 / 2 + \frac{c}{p_0} \zeta_1^{1/2} \exp(-\alpha/\zeta_1^2) f_2(\eta) + \dots, \\ \varphi = b\eta^2 \zeta_1 / 2 + \frac{c}{p_0} \zeta_1^{1/2} \exp(-\alpha/\zeta_1^2) \varphi_2(\eta) + \dots, \\ g = d\eta^2 \zeta_1^{1/2} + \frac{c}{p_0} \exp(-\alpha/\zeta_1^2) g_2(\eta) + \dots, \\ p = p_0 + c \exp(-\alpha/\zeta_1^2) + \dots, \quad \eta = O(1),$$

где  $c$  — произвольная постоянная. Первые члены разложений для функций  $f$ ,  $\varphi$  и  $g$  являются асимптотическими представлениями функций  $f_0$ ,  $\varphi_0$  и  $g_0$  при  $\lambda \rightarrow 0$ . Параметры  $a$ ,  $b$  и  $d$  определяются из автомодельного решения. Подстановка (1.10) в систему уравнений (1.2) после ряда преобразований приводит к следующей системе уравнений для первого приближения:

$$z_1'''' - \eta_1 z_1' = \eta_1 z_1', \quad z_2'''' - \eta_1 z_2' = \eta_1 z_2' - z_2, \quad z_3'' = \eta_1 z_3 - z_2, \\ z_1(0) = z_1'(0) = z_2(0) = z_2'(0) = z_3(0) = 0,$$

$$z_1'(\infty) = -1 + o(1), \quad z_2'(\infty) = -\ln \eta_1 + O(1), \quad z_3'(\infty) = -\ln \eta_1 + O(1),$$

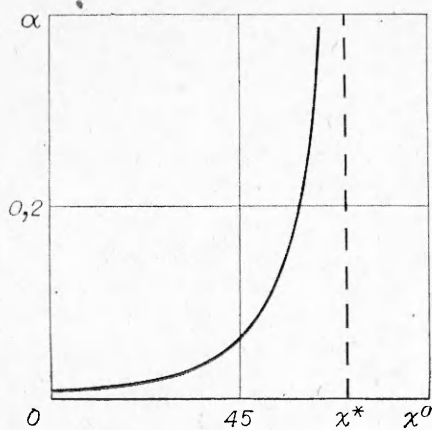
$$\text{где} \quad z_1 = \frac{2^{4/3} \alpha^{1/3} \gamma \omega_0 T^{4/3} (b f_2 - a \varphi_2)}{d(\gamma-1) \sin \omega_1 (b \cos \omega_1 + a \sin \omega_1)}; \\ z_2 = \frac{2^{4/3} \alpha^{1/3} \gamma \omega_0 T^{4/3} (f_2 \cos \omega_1 - \varphi_2 \sin \omega_1)}{d(\gamma-1) \sin \omega_1};$$

$$z_3 = \frac{2\omega_0^2 T^2 \gamma g_2}{d(\gamma-1) \sin^2 \omega_1}; \quad \eta = \eta_1 T^{-1/3} 2^{-1/3} \alpha^{-1/3}; \quad T = \frac{\sin \omega_1}{\omega_0} (a \cos \omega_1 - b \sin \omega_1).$$

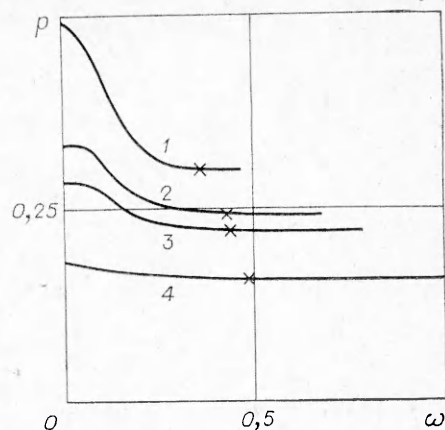
Решение системы уравнений, описывающей течение в области [2], приводит с учетом (1.7) и (1.9) к выражению для собственного числа  $\alpha$

$$\alpha = (d^2 J_2 \sin^2 \omega_1 / \gamma \omega_0^3)^{3/2}, \quad J_2 = \int_0^\infty (z_3(\eta_1) - z_3(\infty)) d\eta.$$

Зависимость  $\alpha(\chi)$  представлена на фиг. 2. Видно, что с ростом угла стреловидности  $\chi = \pi/2 - \omega_0$  собственное значение  $\alpha(\chi)$  монотонно растет и стремится к бесконечности при  $\chi \rightarrow \chi^* = \pi/2 - \omega^*$ . Рост собственного значения  $\alpha$  связан с уменьшением интенсивности передачи возмущений вверх по потоку. Подобное изменение характера передачи возмущений



Ф и г. 2



Ф и г. 3

может объясняться тем, что изменение толщины вытеснения области [2] обратно пропорционально зависит от степеней как собственного числа  $\alpha$ , так и параметра  $\omega_1$ .

Условие (1.7) требует сохранения порядка величины  $\Delta_1$ , поэтому с уменьшением расстояния от передней кромки до плоскости, где начинается возмущенное течение, собственное число  $\alpha$  должно расти.

Физическое объяснение роста интенсивности передачи возмущений (уменьшения  $\alpha$ ) с уменьшением стреловидности крыла  $\chi$  связано с тем, что с ростом  $\omega_0$  увеличивается длина (по  $\xi$ ) области закритического течения, а следовательно, уменьшаются градиенты функций течения, профили скоростей становятся менее наполненными и увеличивается толщина слоя дозвуковых струек тока.

При стремлении  $\omega_0 \rightarrow \omega^*$  функции  $\sin^2 \omega$  и  $\sin 2\omega$ , входящие в систему уравнений (1.2), могут быть аппроксимированы первыми членами разложения в ряд, так как  $\omega = \omega_1 + \omega_0 \xi = o(1)$ . Тогда для оценки толщины области 2 имеем

$$\lambda_2 \sim \left[ \frac{p_1}{(\omega_1 + \omega_0 \xi_1) p_1} \right]^{1/3}.$$

Соответственно изменение толщины вытеснения, формируемое в области 2, определяется следующим образом:

$$(1.11) \quad \Delta_1 = A p_1 \left[ \frac{p_1}{(\omega_1 + \omega_0 \xi_1) p_1} \right]^{1/3}, \quad A = \left( \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right)^2 \frac{d^2 \omega_0^{1/3} J_2}{p_0 a^{7/3}} < 0.$$

Условие (1.7) с учетом выражения для  $\Delta_1$  принимает вид

$$(1.12) \quad B \zeta_1 p_1 + A p_1 \left[ \frac{p_1}{(\omega_1 + \omega_0 \xi_1) p_1} \right]^{1/3} = 0, \quad B = \frac{(\gamma - 1)^2}{4\gamma p_0} \omega_0 J_1.$$

Решением дифференциального уравнения (1.12) является

$$(1.13) \quad p_1 = c \exp \left\{ \frac{A^3}{\omega_0 B^3} \left( \frac{\omega_0}{\omega_1} \right)^3 \left[ \ln \frac{\omega_0 \xi_1}{\omega_1 + \omega_0 \xi_1} + \frac{\omega_1}{\omega_0 \xi_1} - \frac{\omega_1^2}{2\omega_0^2 \xi_1^2} \right] \right\}.$$

При  $\omega_1 = O(1)$  выражение (1.12) в главном члене совпадает с (1.8). При  $\omega_1 \rightarrow 0$  и малом, но фиксированном значении  $\xi_1$ , правая часть (1.13) после разложения в ряд по малому параметру  $\omega_1/(\omega_0 \xi_1)$  приводит к функции

$$(1.14) \quad p_1 = c \exp \left( \frac{A^3}{3B^3 \omega_0 \xi_1^3} \right).$$

При стремлении  $\omega_0 \rightarrow \omega^*$  ( $\omega_0 - \omega^* < 0$ ) изменение толщины вытеснения области  $I$  может быть представлено в виде  $\delta_1 = -B(\xi_1 - 1 + \omega^*/\omega_0)p_1$ . Оценка для изменения толщины слоя  $2$  получается из (1.11), если там положить  $\omega_1 = 0$ . Соответственно условие (1.7) имеет вид

$$(1.15) \quad B\left(\xi_1 - 1 + \frac{\omega^*}{\omega_0}\right)p_1 + Ap_1\left(\frac{p_1}{\omega_0\xi_1 p_1}\right)^{1/3} = 0.$$

Решением (1.15) тогда будет

$$(1.16) \quad p_1 = c \exp\left\{\frac{A^3}{B^3(\omega^* - \omega_0)^3} \left[ \ln \frac{\omega_0 \xi_1}{\omega^* - \omega_0 + \omega_0 \xi_1} + \frac{\omega^* - \omega_0}{\omega^* - \omega_0 + \omega_0 \xi_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega^* - \omega_0}{\omega^* - \omega_0 + \omega_0 \xi_1} \right)^2 \right]\right\}.$$

При конечных значениях параметра  $\omega^* - \omega_0$  получается степенная собственная функция вида  $p = c\xi_1^\alpha$ , что находится в соответствии с результатами [8]. Другой предельный переход  $\omega_0 \rightarrow \omega^*$  приводит к функции (1.14). Таким образом, обеспечен непрерывный переход координатных разложений около кромки при докритическом режиме течения к разложениям, описывающим начало взаимодействия в течении, содержащем области докритического и закритического течений.

2. Численное решение системы уравнений пространственного пограничного слоя на треугольном крыле на режиме сильного вязкого взаимодействия получено с помощью метода, изложенного в [7]. Следует отметить, что в расчетах использовалась система уравнений пограничного слоя в системе координат, связанной с осью симметрии крыла. Для краткости эта система здесь не приведена, а результаты расчетов представлены в переменных (1.4). При численном интегрировании системы уравнений область в окрестности  $\omega = \omega_1$  специально не выделялась и краевая задача решалась от одной передней кромки до другой.

В расчетах предполагалось, что  $\sigma = 1$ ,  $n = 1$ ,  $\gamma = 1,4$ ,  $g_w = 0$ . На фиг. 3 кривыми 1-4 представлено распределение давления по координате  $\omega$  для различных удлинений крыла  $S_0 = \tan \omega_0 = 0,5; 0,8; 1; 2$ . Крестиками обозначены значения координаты  $\omega_1$ , при которых происходит переход от закритического режима к докритическому в соответствии с обращением в нуль выражения для изменения толщины вытеснения (1.4). Как видно из приведенных результатов численного решения краевой задачи, отход от автомодельных решений, т. е. переход от закритического к докритическому течению, происходит в соответствии со значениями  $\omega_1$ , определяемыми (1.4). Таким образом, неучет тонкой структуры для  $\omega = \omega_1$  при решении глобальной задачи не приводит к значительным погрешностям в определении распределения давления.

Изученные в данной работе течения с областями докритического и закритического взаимодействия реализуются при достаточно гладких граничных условиях, заданных ниже по течению. Как указано в [8], возможны и другие типы течений с закритическими и докритическими областями, где переход от одной области к другой происходит на малых расстояниях из-за больших возмущений, заданных ниже по течению. Для анализа таких течений нужны дальнейшие аналитические и расчетные исследования.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ладыженский М. Д. О пространственном гиперзвуковом течении около тонких крыльев. — ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
2. Нейланд В. Я. Распространение возмущений вверх по течению при взаимодействии гиперзвукового потока с пограничным слоем. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 4.
3. Козлова И. Г., Михайлов В. В. О сильном вязком взаимодействии на треугольном и скользящем крыльях. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 6.

4. Нейланд В. Я. К теории взаимодействия гиперзвукового потока с пограничным слоем для отрывных двумерных и пространственных течений. Ч. 2. Двумерные течения и треугольное крыло.— Учен. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 3.
5. Дудин Г. Н. Характеристики пространственного гиперзвукового пограничного слоя в окрестности плоскости симметрии треугольного крыла.— Тр. ЦАГИ, 1983, вып. 2177.
6. Дудин Г. Н. К расчету пограничного слоя на треугольной пластине на режиме сильного вязкого взаимодействия.— Учен. зап. ЦАГИ, 1978, т. 9, № 5.
7. Дудин Г. Н., Лыжин Д. О. Об одном методе расчета режима сильного вязкого взаимодействия на треугольном крыле.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 4.
8. Нейланд В. Я. К теории взаимодействия гиперзвукового потока с пограничным слоем для отрывных двумерных и пространственных течений. Ч. 1. Пространственные течения.— Учен. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 2.
9. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М.: ИЛ, 1962.
10. Stewartson K. On the flow near the trailing edge of a flat plate. II.— *Mathematika*, 1969, v. 16.
11. Боголепов В. В., Нейланд В. Я. Исследование локальных возмущений вязких сверхзвуковых течений.— В кн.: Аэромеханика. М.: Наука, 1976.

Поступила 9/IV 1984 г.

УДК 534.2:532

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ОКОЛОРЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГАЗА В ТРУБЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

А. Л. Ни  
(Черноголовка)

Рассматривается задача о нелинейных околорезонансных колебаниях газа в трубе переменного сечения, один конец которой закрыт, а на другом находится поршень, скорость которого  $u_p = \delta a_0 f(t)$  — периодическая функция времени ( $a_0$  — скорость звука в невозмущенном газе,  $\delta \ll 1$ ). Пространственный характер исходной задачи учитывается в рамках квазидвумерного приближения. Рассмотрение ведется в диапазоне частот, близких к резонансным частотам цилиндрической трубы той же длины. Влиянием вязкости пренебрегается.

Раньше задача в такой постановке исследовалась [1]. В основе ее анализа лежал метод [2, 3], опирающийся на представление решения в виде ряда по степеням малого параметра  $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ . Было приведено решение задачи в частном случае формы трубы, когда уравнение, описывающее колебания газа, сводилось к обыкновенному дифференциальному уравнению [2, 3]. Для более общей ситуации выведено интегродифференциальное уравнение и обсуждены его некоторые качественные свойства. Насколько известно автору, к настоящему времени не получено каких-либо количественных результатов дополнительно к [1].

В данной работе эта задача решается методом [4], суть которого коротко можно сформулировать как представление решения линейной суперпозицией нелинейных волн различных семейств. В [4] предложен эффективный способ решения получающихся нелинейных функциональных уравнений, в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  совпадающих с [2, 3]. В [5] метод обобщен на более широкий класс задач при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , сводящихся к решению интегродифференциальных уравнений.

По-видимому, многие известные задачи о колебаниях газа могут быть решены способом [4] или некоторым его обобщением. К таким задачам можно отнести субгармонический резонанс [6, 7], колебания в трубе с учетом пограничного слоя в приближении [3]. В данной работе иллюстрируются возможности метода на примере задачи об околорезонансных колебаниях газа в трубе переменного сечения.

По аналогии с одномерными течениями будем называть инвариантами Римана величины  $J^\pm = u \pm 2a/(\kappa - 1)$ . Введем безразмерные зависимые и независимые штрихованные переменные формулами [4]

$$(1) \quad \begin{aligned} u &= \varepsilon a_0 u', \quad J^\pm = a_0 [\varepsilon J'^\pm \pm 2/(\kappa - 1)], \\ a &= a_0(1 + \varepsilon a'), \quad t = Tt', \quad x = a_0 T x'. \end{aligned}$$

Здесь  $u$  — скорость;  $a$  — скорость звука;  $t$  — время;  $x$  — декартова координата;  $T$  — характерное время течения;  $a_0$  — невозмущенная скорость звука;  $\kappa$  — показатель адиабаты;  $\varepsilon$  — малый параметр, характеризующий амплитуду возмущений. В соответствии с выводами [4] течение можно считать изэнтропическим. Уравнения, управляющие волновыми движе-