A. A. Goncharenko, V. F. Kravchenko, V. I. Ponomarev, The inverse scattering problem for wave beams in an inhomogeneous layer,
Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1986, Volume 291, Number 2, 320–322

https://www.mathnet.ru/eng/dan8377

$$-4rpv^k\left[\left(\frac{\nu_i}{\nu_n v^n}-\frac{v_i}{v_n v^n}\right)_{;k}-\left(\frac{\nu_k}{\nu_n v^n}-\frac{v_k}{v_n v^n}\right)_{;i}\right]-$$

$$-4\overset{*}{\rho}\left(\frac{\nu_i}{\nu_n v^n}-\frac{v_i}{v_n v^n}\right)\frac{d(rp/\overset{*}{\rho})}{ds}=0,$$

$$\left[\overset{*}{\rho}\left(\frac{\nu_k v^k}{\sqrt{v_k v^k}}\right)^{4r} v^n\right]_{;n}=0, \tag{16}$$

причем свертка (15) с v^i тождественно равна нулю.

Для пылевидной материи $p=0$ и (15) сводятся к уравнениям геодезического движения [9], записанным в ковариантной форме. В предельном случае $r\to 0$, (15) и (16) переходят в известные уравнения ОТО.

Научно-исследовательский институт ядерной физики
Московского государственного университета
им. М.В. Ломоносова

Поступило
10 XII 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л.И.* – Природа, 1984, № 11, с. 3–10. 2. *Седов Л.И.* Труды VII Междунар. совещ. по пробл. квантовой теории поля. Дубна, 1984, с. 368–381. 3. *Христиансен Г.Б.* Космические лучи сверхвысоких энергий. М.: Изд-во МГУ, 1974. 268 с. 4. *Bogoslovsky G.Yu.* – Nuovo Cimento B, 1977, vol. 40, № 1, p. 99–115, 116–134. 5. *Bogoslovsky G.Yu.* – Hadronic J., 1984, vol. 7, № 6, p. 1361–1408. 6. *Рунд Х.* Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука, 1981. 504 с. 7. *Bogoslovsky G.Yu.* The proper time, spatial distances, and clock synchronization in the locally anisotropic space–time. Dubna, 1982. 4 p. 8. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: ГИТТЛ, 1955. 504 с. 9. *Богословский Г.Ю.* – Укр. физ. журн., 1984, т. 29, № 1, с. 17–24.

УДК 517.9 + 550.3 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А.А. ГОНЧАРЕНКО, В.Ф. КРАВЧЕНКО, В.И. ПОНОМАРЕВ

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ В НЕОДНОРОДНОМ СЛОЕ

(Представлено академиком Ю.А. Митропольским 21 X 1985)

1. Известные обратные задачи определения свойств рассеивающего слоя по известному в некоторой плоскости решению волнового уравнения предполагают, что пространственная размерность потенциала, описывающего электрические характеристики неоднородной среды, меньше размерности рассеянной монохроматической волны (см. [1], где имеется обширная библиография). В то же время в различных областях (радиофизика, гидроакустика) возникает задача определения потенциала в случае совпадения размерностей последнего и рассеянной волны. В этой ситуации потенциал можно трактовать как нестационарный.

В данной работе рассматривается задача восстановления трехмерного потенциала дифференциального уравнения типа Шредингера, которое описывает распространение электромагнитных волн в малоугловом приближении в случайно-неоднородных средах [2, 3], а потенциал характеризует флуктуации диэлектрической проницаемости среды. Задача исследуется на реализациях среды, обладающих некоторыми аналитическими свойствами, адекватными физике процесса распространения.

2. Обратная задача формулируется следующим образом:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &2iku_x + \Delta u + k^2\epsilon(x,\rho)u = 0,\\ &u(0,\rho) = \varphi(\rho,\gamma), \quad u(l,\rho) = f(\rho,\gamma), \quad \rho,\gamma \in R^2, \end{aligned}$$

где $\rho = (y, z)$, Δ – оператор Лапласа по ρ, k – среднее волновое число, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ – заданный параметр. Она является некорректной [1, 4]. Здесь корректная постановка достигается введением параметра γ в падающую волну. При решении обратной задачи перейдем к эквивалентному интегральному уравнению, записав его для фурье-образов по переменной ρ. Обозначим $\kappa = (\theta, \omega)$ вектор пространственных частот, причем θ соответствует координате x, а ω – переменной ρ. Функции и их образы Фурье будем различать указанием аргументов. Конечный результат – определение спектра функции $\epsilon(x, \rho)$. Предварительно приведем необходимые сведения по исследованию прямой задачи, имеющие самостоятельный интерес. В качестве падающих волн рассматриваем двупараметрическое семейство функций, спектр которых имеет вид

$$(2)\qquad \varphi(\omega,\gamma) = \eta(\gamma)\psi(\omega)\exp(i\gamma\xi(\omega)),$$

где $\gamma\xi(\omega) = \gamma_1\xi_1(\omega) + \gamma_2\xi_2(\omega)$, $\eta(\gamma)$ – функция степенного роста, непрерывная $\psi(\omega) \in L^2(R^2)$, $\xi_{1,2}(\omega) \in C^\infty(R^2)$. Разнообразными примерами таких волн являются ограниченные волновые пучки.

3. Изучение прямой задачи проведем при условии $|\epsilon(x, \rho)| \leqslant C$. Обозначим $J(\omega)$ якобиан системы функций $\xi_{1,2}(\omega)$.

Т е о р е м а 1. *Пусть непрерывная функция* $\epsilon(x, \omega) \in L^2(R^2)$, *падающая волна имеет вид* (2), $|J(\omega)| \neq 0$, *тогда*

a) $u(x,\omega,\gamma) \in L^2(R^2)$ *для всех* x, γ;

b) *если* $u = w(x,\omega,\gamma)\eta(\gamma)$, *то* $w(x,\omega,\gamma)$ *удовлетворяет уравнению*

$$w = w_0\exp(-ix\mu) + Aw,$$

$$k' = k(2\pi)^{-1}, \quad w_0 = \psi(\omega)\exp(i\gamma\xi(\omega)), \quad Aw = k'i(2)^{-1}\int_0^x\int_{R^2} g(x-\tau,\omega)\times$$

$$\times\,\epsilon(\tau,\omega-\omega')w(\tau,\omega',\gamma)d\omega'd\tau, \quad g(x,\omega) = \exp(-ix|\omega|^2(2k)^{-1});$$

c) *для рассеянного поля* $V = w(x,\omega,\gamma) - w_0(\omega,\gamma)\exp(-ix\mu)$, *где* $\mu = |\omega|^2(2k)^{-1}$, *имеет место представление его спектра*

$$V(x,\omega) = k'i(2)^{-1}\exp(-ix\chi(\kappa))\psi(\kappa)|J(\kappa)|v(x,\kappa),$$

где $\chi(\kappa) = (1+2\theta)|\omega|^2(2k)^{-1}$, *а* $v(x,\kappa)$ *является функцией ослабления спектра рассеянного поля*;

d) $v(x,\kappa) \in L^2(R^3)$ *для любого конечного* x, *непрерывна по совокупности аргументов и удовлетворяет уравнению*

$$(3)\qquad v = v_0 + Bv,$$

$$v_0(x,\kappa) = \int_0^x \epsilon(\tau,\omega)\exp(-i\tau,\omega)d\tau,$$

$$Bv = k'i(2)^{-1}\int_0^x\int_{R^2}\exp(-i\tau\chi(\kappa,\omega'))\epsilon(\tau,\omega-\omega')v(\tau,\theta,\omega')d\omega'd\tau.$$

Следствие 1. $|v(x,\rho)| \leqslant C$.

Следствие 2. Обратная задача редуцируется к уравнению

$$\epsilon = \epsilon_0 - B_v \epsilon, \tag{4}$$

где оператор B_v из (3) и имеет в качестве ядра функцию $v(x, \kappa)$, $\epsilon_0(x, \kappa)$ – решение обратной задачи в линейной постановке, т.е. без учета второго слагаемого из (3).

4. Теорема 2. *Задача определения $\epsilon(\kappa)$ корректна в классе непрерывных функций $\epsilon(\kappa) \in L^2(R^3)$ таких, что $|\epsilon(x,\rho)| \leqslant C$.*

Доказательство проводится методом последовательных приближений для системы (4), (3). Сходимость имеет место для произвольных длин трасс и падающих волн, для которых приемлема модель распространения (1).

5. С прикладной точки зрения представляет интерес устойчивое восстановление $\epsilon(\kappa)$, когда исходные данные, т.е. $\epsilon_0(\kappa)$, задаются с аддитивным шумом $n(\kappa)$. Известно [4], что при широкополосном характере $n(\kappa)$ обратная задача неустойчива в среднеквадратичном смысле и необходима регуляризация для получения приемлемого решения. В работе в качестве регуляризаторов использовались линейные фильтры [5] с передаточной функцией $H(\kappa)$. Предположим, что шум моделируется случайным полем с математическим ожиданием $Mn = 0$ и спектральной плотностью $K_n(\kappa)$, а неоднородности в линейном приближении являются полем с $M\epsilon_0 = 0$ и спектральной плотностью $K_{\epsilon_0}(\kappa)$. Возмущенное решение обратной задачи находится последовательными приближениями по (4) с начальным элементом

$$q_0(\kappa) = H(\kappa)[\epsilon_0(\kappa) + n(\kappa)] = \epsilon_0'(\kappa) + n'(\kappa).$$

Теорема 3. *Оптимальное фильтрованное решение задачи* (4) *имеет вид*

$$q(\kappa) = \epsilon_k'(\kappa) + N'(\kappa),$$

где $M|N'(\kappa)|^2 < \infty$ и передаточная функция оптимального фильтра является решением интегрального уравнения второго рода типа Фредгольма

$$H(\kappa)M|n|^2 + M[B_v N'(B_v N)^*] + M[(\epsilon_k' - \epsilon_k)\epsilon^*] - 2K_\epsilon(\kappa) = 0.$$

В случае нормальности всех полей передаточная функция дается выражением

$$H(\kappa) = K_{\epsilon_0}(\kappa)\,[K_n(\kappa) + K_{\epsilon_0}(\kappa)]^{-1}$$

и определяет известный фильтр Винера.

В теореме число k означает k-ю итерацию к точному решению и определяется через длины падающей волны, трассы распространения и величину $\sigma^2_{\epsilon_0'}(\sigma^2_{n'})^{-1} = \delta$. При $\delta > 1$ и моделировании турбулентной атмосферы спектром Колмогорова–Обухова [2, 3] в СВЧ-диапазоне $k = 3$ и метод применим на трассах длиной порядка 10^2 км.

Харьковский авиационный институт
им. Н.Е. Жуковского

Поступило
12 XII 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с. 2. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1978, т. 2. 463 с. 3. *Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.: Мир, 1981, т. 2. 317 с. 4. *Тихонов А.И., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 224 с. 5. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов. М.: Наука, 1971, т. 1. 664 с.