Р. Р. Ашуров, О биортогональных разложениях одного несамосопряженного оператора Шредингера, *Дифференц. уравнения*, 1991, том 27, номер 1, 156–158

ЯНВАРЬ 1991 г., ТОМ 27, № 1

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.927.25

Р. Р. АШУРОВ

О БИОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ ОДНОГО НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

В работе Б. Б. Лидского [1] построена такая комплекснозначная функция q двух переменных, что если возмущать этой функцией самосопряженный оператор Лапласа с периодическими условиями на плоскости, то поведение резольвенты оператора Шредингера $H=-\Delta+q$ в окрестностях полюсов существенно отличается от резольвенты $-\Delta$. А именно порядок полюса оператора $(-\Delta+q-z)^{-1}$ в точках $z=k$ не меньше, чем $r_k/4$, где r_k — число точек плоскости с целочисленными координатами (n, m), для которых $n^2+m^2=k$. Другими словами, в каждом корневом подпространстве $\mathfrak{L}_\lambda$, $\lambda=k$, оператора H существует такая собственная функция, что число присоединенных к ней функций растет по крайней мере как $r_k/4$.

В настоящей работе показано, что, несмотря на это обстоятельство, последовательность корневых подпространств оператора H образует базис пространства L_2, эквивалентный ортогональному.

Пусть $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система собственных и присоединенных функций несамосопряженной задачи [1]

$$\begin{gathered} -\Delta u+q(x)u=\lambda u,\quad x\in G=(0, 2\pi)^N, \\ u|_{x_j=0}=u|_{x_j=2\pi},\quad j=1, 2, \dots, N. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь

$$q(x)=\sum_{l>0}\varepsilon^{[l]}e^{-\varepsilon|l|^2}e^{ilx},$$

где $|\varepsilon|<1$, $\operatorname{Re}\varepsilon>0$ и для вектора $l\in\mathbf{Z}^N$ приняты обозначения $|l|^2=l_1^2+\dots+l_N^2$, $[l]=l_1+\dots+l_N$, $lx=l_1x_1+\dots+l_Nx_N$, $\{l>0\}=\{l\in\mathbf{Z}^N,\ l_j\geqslant 1,\ j=1, 2, \dots, N\}$.

Пусть λ_k — собственные числа, взятые в порядке возрастания (заметим, что спектр задачи (1) совпадает со спектром той же задачи с $q\equiv 0$ [1]), и пусть

$$E_\lambda f(x)=\sum_{\lambda_k<\lambda}(v_k, f)u_k(x)$$

— биортогональное разложение функций $f\in L_2(G)$.

Теорема 1. *Последовательность корневых подпространств задачи (1) образует базис пространства $l_2(G)$, эквивалентный ортогональному. В частности, если $f\in L_2(G)$, то*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|E_\lambda f-f\|_{L_2(G)}=0.$$

Заметим, что при $N=2$ оператор (1) удовлетворяет всем условиям теоремы 3.1 работы [2], в силу которой можно утверждать, что система корневых векторов задачи (1) образует базис Рисса со скобками. Если же $N>2$, то за счет медленного роста собственных чисел она становится неприменимой к задаче (1).

Пусть

$$\sigma_\lambda f(x)=\sum_{|n|^2<\lambda}f_ne^{inx}$$

— кратный тригонометрический ряд Фурье функции $f\in L_2(G)$, f_n — коэффициент Фурье. Для формулировки следующего результата напомним определение классов Лиувилля $L_2^a(G)$, $a\geqslant 0$.

Говорят, что периодическая функция $f\in L_2(G)$ принадлежит классу $L_2^a(G)$, если конечна норма

$$\|f\|_{L_2^a}=\Big(\sum_n(|n|^2+1)^a|f_n|^2\Big)^{1/2}.$$

Теорема 2. *Пусть* $2|\varepsilon|^Ne^{-N\operatorname{Re}\varepsilon}<1$ *и* $f\in L_2^a(G)$, $a>N/2-2$. *Тогда равномерно по* $x\in\bar G$ *справедлива оценка*

$$|E_\lambda f(x)-\sigma_\lambda f(x)|\leqslant C\,[\lambda^{N/2-1-a}+\lambda^{-1}\ln\lambda]\,\|f\|_{L_2^a},\quad\lambda>1. \tag{2}$$

Из этой оценки следует, что необходимые и достаточные условия равномерной сходимости и локализации в классах L_p^a для $E_\lambda f$ являются такими же, как и для $\sigma_\lambda f$ (см. [3, 4]). Если $N=2$, то, взяв $a=0$ в оценке (2), можно получить оценку в $L_2(G)$ для спектральной функции оператора (1).

Переходим к доказательству сформулированных теорем. Пусть R_λ^0 — резольвента оператора (1) при $q\equiv 0$, т. е.

$$R_\lambda^0 f(x)=\sum_n \frac{f_n e^{inx}}{|n|^2-\lambda}.$$

Если λ не принадлежит спектру, то резольвенту R_λ оператора (1) можно представить в виде

$$R_\lambda f=\sum_{p=0}^{\infty} R_\lambda^0(-qR_\lambda^0)^p f$$

(по крайней мере формально). Используя вид функции q, будем иметь

$$R_\lambda f(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_n\sum_{m_1>0}\dots\sum_{m_p>0}(-1)^p\times$$

$$\times\frac{e^{inx}f_{n+m_1+\dots+m_p}\varepsilon^{[m_1+\dots+m_p]}e^{-\varepsilon|m_1+\dots+m_p|^2}}{(|n|^2-\lambda)(|n+m_1|^2-\lambda)\dots(|n+m_1+\dots+m_p|^2-\lambda)},\qquad(3)$$

где $m_j\in\mathbf{Z}^N$. Сходимость вне спектра этого ряда в норме $L_2(G)$ вытекает из равенства Парсеваля.

Пусть $F(\lambda)$ — знаменатель в (3). Обозначим $F_s(\lambda)=F(\lambda)(|n+m_0+m_1+\dots+m_s|-\lambda)^{-1}$, $s=0, 1, \dots, p$, где для удобства положено $m_0=0\in\mathbf{Z}^N$. Пусть, далее, Γ_j — окружность радиуса $1/2$ с центром в точке μ_j, причем число μ_j представимо для некоторого $n\in\mathbf{Z}^N$ в виде $\mu_j=|n|^2$ ($\mu_j\neq\mu_i$ при $i\neq j$). Тогда для любого $k\geqslant 1$ имеем ($f, g\in L_2(G)$)

$$\Big|\sum_{j=1}^{k}\int_{\Gamma_j}(R_\lambda f, g)\,d\lambda\Big|=\Big|\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{m_1>0}\dots\sum_{m_p>0}(-1)^p\times$$

$$\times\sum_{s=0}^{p}\Big[\sum_{j=1}^{k}\sum_{|n+m_0+m_1+\dots+m_s|^2=\mu_j}\frac{\bar g_n f_{n+m_1+\dots+m_p}}{F_s(\mu_j)}\Big]\varepsilon^{[m_1+\dots+m_p]}e^{-\varepsilon|m_1+\dots+m_p|^2}\Big|.$$

Применяя к сумме в квадратной скобке сначала неравенство Коши — Буняковского (заметим, что при этом $|F_s(\mu_j)|>1$), а затем равенство Парсеваля, получим равномерную по k оценку

$$\Big|\sum_{j=1}^{k}\int_{\Gamma_j}(R_\lambda f, g)\,d\lambda\Big|\leqslant C\|f\|_{L_2(G)}\|g\|_{L_2(G)}\sum_{p=0}^{\infty}|\varepsilon|^p(p+1).$$

Поскольку $|\varepsilon|<1$, то ряд в этой оценке сходится. Следовательно, норма проекторов на корневые подпространства $\bigcup_{j=1}^{k}\mathfrak{L}_{\mu_j}$ ограничена равномерно по k, а это в свою очередь означает справедливость утверждения теоремы 1 (см. [5]).

Пусть Γ_t — граница квадрата на комплексной плоскости с центром в начале координат и сторонами $2t$, $t=k+1/2$, $k\geqslant 1$ целое. Тогда при $p\geqslant 1$ и $\lambda\in\Gamma_t$ имеем оценку $|F_p(\lambda)|\geqslant 2^{-p}(|\mathrm{Im}\,\lambda|+1)$. Поэтому для всех $\lambda\in\Gamma_t$

$$|R_\lambda f(x)-R_\lambda^0 f(x)|\leqslant(|\mathrm{Im}\,\lambda|+1)^{-1}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{m_1>0}\dots\sum_{m_p>0}2^p|\varepsilon|^{[m_1+\dots+m_p]}\times$$

$$\times e^{-\mathrm{Re}\,\varepsilon|m_1+\dots+m_p|^2}\sum_n\frac{|f_{n+m_1+\dots+m_p}|}{||n+m_1+\dots+m_p|^2-\lambda|}\leqslant$$

$$\leqslant(|\mathrm{Im}\,\lambda|+1)^{-1}\|f\|_{L_2^a}\sum_{p=1}^{\infty}(2|\varepsilon|^N e^{-N\,\mathrm{Re}\,\varepsilon})^p\Big(\sum_n\frac{1}{||n|^2-\lambda|(|n|^2+1)^a}\Big)^{1/2}$$

Оценив при $a>N/2-2$ второй ряд с помощью сравнения с соответствующим кратным интегралом (первый ряд сходится в силу условий теоремы 2), будем иметь

$$|R_\lambda f(x)-R_\lambda^0 f(x)|\leqslant\frac{C\|f\|_{L_2^a}}{|\mathrm{Im}\,\lambda|+1}\Big(\frac{1}{|\lambda|}+\frac{|\lambda|^{N/2-1-a}}{(|\mathrm{Im}\,\lambda|+1)^{1/2}}\Big),\quad\lambda\in\Gamma_t.$$

Используя это неравенство, оцениваем интеграл $\int\limits_{\Gamma_t}(R_\lambda f(x)-R_\lambda^0 f(x))\,d\lambda$. Полученная при этом оценка совпадает с (2). Теорема 2 доказана.

На выяснение вопроса базисности систем корневых векторов задачи Лидского обратил внимание автора В. А. Ильин, за что автор выражает ему глубокую благодарность.

Литература

1. Лидский Б. В. // Функц. анализ. 1976. Т. 10, № 4. С. 89—90.
2. Кацнельцон В. Э. // Функц. анализ. 1967. Т. 1, № 2. С. 39—51.
3. Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. М. // Успехи мат. наук. 1976. Т. 31, № 6. С. 29—83.
4. Алимов Ш. А., Ашуров Р. Р., Пулатов А. К. // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1989. Т. 42. С. 5—105.
5. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., 1965.

Ташкентский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию 8 августа 1990 г.

УДК 517.927.25

Б. Т. БИЛАЛОВ

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ПОЛНОТЫ НЕКОТОРОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

В работе рассматривается полнота системы функций

$$\{A(t)\,[\varphi(t)]^n-B(t)\,[\overline{\varphi(t)}]^n\}_{n=0}^{\infty} \tag{1}$$

в пространстве $L_p(a, b)$, $1<p<+\infty$, где $A(t)$, $B(t)$ и $\varphi(t)$ — комплекснозначные функции на отрезке $[a, b]$. Полнота системы (1) рассматривалась многими авторами при разных предположениях относительно функций $A(t)$, $B(t)$ и $\varphi(t)$ (см. [1—7]). Например, в работе [1] А. Н. Барменков получил необходимое и достаточное условие полноты системы (1), когда $\arg A(t)$ и $\arg B(t)$ — гёльдеровы функции на отрезке $[a, b]$, а функция $\varphi(t)$ такова, что $\Gamma=\varphi([a, b])$ — простая разомкнутая кривая Ляпунова, не касается вещественной оси Ox и не имеет с Ox иных общих точек, кроме $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$. В работе [5] рассмотрена базисность системы (1) в случае, когда $\varphi=e^{it}$; $\arg A(t)$ и $\arg B(t)$ — кусочно-непрерывные функции на отрезке $[0, \pi]$.

Прежде чем сформулировать теорему, сделаем некоторые предположения относительно комплекснозначных функций $A=|A|e^{i\alpha}$, $B=|B|e^{i\beta}$ и $\varphi(t)$.

1) $|A(t)|$, $|B(t)|$ и $|\varphi'(t)|$ — измеримые функции на (a, b) и удовлетворяют условию

$$\operatorname*{supvrai}_{t\in(a,b)}\{|A(t)|^{\pm1};\ |B(t)|^{\pm1};\ |\varphi'(t)|^{\pm1}\}\leqslant M<+\infty.$$

2) $\Gamma=\varphi\{[a, b]\}$ — спрямляемая, простая кривая Жордана, которая с действительной осью Ox не имеет иных общих точек, кроме $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$ ($\operatorname{Im}\varphi(a)=\operatorname{Im}\varphi(b)=0$, $\varphi(a)>\varphi(b)$); Γ есть либо кривая Радона (т. е. угол $\theta(\varphi(t))$ между касательной в точке $\varphi=\varphi(t)$ к кривой Γ и действительной осью — функция ограниченной вариации на отрезке $[a, b]$), либо кривая Ляпунова. Обозначим через $\{\varphi_k\}$ точки разрыва функции $\arg\varphi'(t)$ на интервале (a, b).

3) $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — кусочно-непрерывные функции на отрезке $[a, b]$, причем они могут иметь бесконечное число точек разрыва первого рода. Обозначим через $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$ точки разрыва соответственно этих функций на интервале (a, b).

4) Обозначим $\{\tilde{s}_k\}=\{\alpha_k\}\cup\{\beta_k\}\cup\{\varphi_k\}$. Множество $\{\tilde{s}_k\}$ имеет единственную предельную точку $s_0\in(a, b)$. Функция $\tilde{\theta}(t)=\beta(t)-\alpha(t)+\dfrac{2}{p}\arg\varphi'(t)$ в точке s_0 имеет справа и слева конечные пределы, где $p\in(1, +\infty)$ — некоторое число.

Под функцией $\arg\varphi'(t)$ на $(\tilde{s}_k, \tilde{s}_{k+1})$ понимается следующее: будем определять в каждой начальной точке $\tilde{s}_k$ ветвь $\arg\varphi'(\tilde{s}_k+0)$ произвольно; в конечной же точке $\tilde{s}_{k+1}$ значение $\arg\varphi'(\tilde{s}_{k+1}-0)$ будем получать из выбранной ветви $\arg\varphi'(\tilde{s}_k+0)$ путем непрерывного изменения.

5) Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\tilde{h}_i$ абсолютно сходится, где $\tilde{h}_i=\tilde{\theta}(\tilde{s}_i-0)-\tilde{\theta}(\tilde{s}_i+0)$.

Сначала определим некоторые величины. Обозначим через r номер, после которого выполняется условие

$$-2\pi/p<\tilde{h}_k<2\pi/q, \tag{2}$$

где $1/p+1/q=1$, $k=\overline{r, \infty}$.