

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. S. Buslaev, A. A. Fedotov, The Harper equation:
monodromization without quasiclassics,
Algebra i Analiz, 1996, Volume 8, Issue 2, 65–97

<https://www.mathnet.ru/eng/aa685>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.175

May 22, 2025, 06:44:27



УРАВНЕНИЕ ХАРПЕРА: МОНОДРОМИЗАЦИЯ БЕЗ КВАЗИКЛАССИКИ

© В. С. Буслаев, А. А. Федотов

§1. Введение

1.1. Монодромизация. Перед тем, как перейти к предмету работы, напомним идею метода монодромизации [BF3, BF5]. Исходным является разностное уравнение

$$\psi_0(x + h_1) = M_0(x)\psi_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

где $M_0(x)$ — заданная (2×2) -матрица, причем

$$\det M_0(x) \equiv 1, \quad M_0(x + h_0) = M_0(x). \quad (1.2)$$

Предполагается, что числа h_0, h_1 подчиняются соотношению $0 \leq h_1 < h_0$.

Матрица-функция $\Psi(x) \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$, удовлетворяющая уравнению (1.1), называется *фундаментальным решением*. Всякое векторное решение $\psi \in \mathbb{C}^2$ может быть представлено в виде

$$\psi(x) = \Psi(x)c(x), \quad (1.3)$$

где Ψ — фиксированное фундаментальное решение, а $c(x) \in \mathbb{C}^2$ — некоторая h_1 -периодическая функция.

Любому фундаментальному решению можно сопоставить *матрицу монодромии*, определяемую соотношением

$$\Psi(x + h_0) = \Psi(x)M_1^t(x), \quad (1.4)$$

где t — транспонирование. Функция M_1 обладает свойствами

$$\det M_1(x) \equiv 1, \quad M_1(x + h_1) = M_1(x). \quad (1.5)$$

Часть работы была выполнена, когда авторы пользовались гостеприимством Берлинского технического университета. Авторы благодарны профессорам Фолкеру Баху и Рудольфу Зайлеру за дискуссии. Эта работа поддержана также Российским фондом фундаментальных исследований.

Определим $h_2, 0 \leq h_2 < h_1$, соотношением

$$h_0 = h_1 p_1 + h_2, \quad p_1 \in \mathbb{N}, \quad (1.6)$$

и введем уравнение

$$\psi_1(x + h_2) = M_1(x) \psi_1(x). \quad (1.7)$$

Аналог перехода от уравнения (1.1) к уравнению (1.7) хорошо известен в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Для дифференциального уравнения

$$\psi'(x) = M_0(x) \psi(x) \quad (1.8)$$

матрица монодромии не зависит от x и (1.7) заменяется на

$$M_1 \psi_1 = \lambda \psi_1. \quad (1.9)$$

В этом случае спектральный анализ уравнения (1.8) сводится к спектральному анализу матрицы M_1 .

В случае разностного уравнения с периодическими коэффициентами уравнение (1.7), порожденное матрицей монодромии, имеет тот же характер, что и исходное. Поэтому процесс, начальным шагом которого был переход от M_0 к M_1 , может быть продолжен. Если $h_1/h_0 \in \mathbb{Q}$, то процесс оказывается конечным и спектральный анализ уравнения (1.1) после конечного числа шагов сводится к спектральному анализу матрицы-функции. Если $h_1/h_0 \notin \mathbb{Q}$, то процесс монодромизации будет бесконечным.

Разложим h_1/h_0 в цепную дробь

$$h_1/h_0 = \frac{1}{p_1 + \frac{1}{p_2 + \frac{1}{p_3 + \dots}}}, \quad p_j \in \mathbb{N}, \quad (1.10)$$

и рассмотрим последовательность чисел $h_j, j = 0, 1, \dots$,

$$h_{j-1} = p_j h_j + h_{j+1}, \quad 0 \leq h_{j+1} < h_j. \quad (1.11)$$

Последовательность матриц $M_j(x)$, возникшая в результате процесса монодромизации, обладает свойствами

$$\det M_j(x) \equiv 1, \quad M_j(x + h_j) = M_j(x). \quad (1.12)$$

Свойства этой последовательности матриц тесно связаны со спектральными свойствами уравнения (1.1). Этот факт можно положить в основу программы исследования спектра разностных уравнений Шрёдингера. В серии работ авторов [BF1–BF6] эта программа была проведена для уравнения Харпера

$$\frac{\psi(x+h) + \psi(x-h)}{2} + \cos x \psi(x) = E \psi(x), \quad (1.13)$$

$x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) \in \mathbb{C}$. Оно может быть переписано в виде (1.1) с матрицей

$$M_0(x) = \begin{pmatrix} 2E - 2 \cos x & s \\ -s & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

$s = \pm 1$, $h_0 = 2\pi$, $h_1 = h$. Существенную роль в реализации программы играл выбор подходящего базиса в двумерном модуле решений (т.е. выбор фундаментальных решений) уравнений

$$\psi(x + h_{j+1}) = M_j(x) \psi(x). \quad (1.15)$$

Базисы удалось выбрать так, что все матрицы M_j имеют вид

$$M_j(x) = \mathcal{M}(x_j, w_j), \quad x_j = 2\pi x/h_j, \quad w_j = (s_j, t_j), \quad (1.16)$$

$$\mathcal{M}(x, w) = \begin{pmatrix} a - 2 \cos x & s + it e^{-ix} \\ -s - it e^{ix} & d \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

$$d = ist, \quad ad = 1 - s^2 + t^2. \quad (1.18)$$

Таким образом, цепочка трансформаций $M_{j-1} \rightarrow M_j$ эквивалентна динамической системе

$$w_j = f(w_{j-1}, 2\pi h_j/h_{j-1}), \quad (1.19)$$

фазовым пространством которой является цилиндр

$$C = \{w = (s, t) \in \mathbb{C}^2 : |s| = 1, t \in \mathbb{R}\}.$$

¹Фазовое пространство динамической системы в действительности устроено несколько сложнее: вместо окружности $|s| = 1$, $t = 0$, оно содержит две точки $t = 0$, $s = \pm 1$ с присоединенными к ним одномерными многообразиями.

Доказательству существования указанного базиса посвящены работы [BF1-BF4]. Существенным условием, при котором удалось провести доказательство, было предположение, что все знаменатели p_j из (1.10) удовлетворяют неравенству $p_j \geq \text{const} \gg 1$, иначе говоря, что $h_{j+1}/h_j \leq \epsilon \ll 1$. Для уравнения (1.13) это соответствует условию $h \ll 1$. При выполнении описанных предположений (условия квазиклассичности) спектр характеризуется соотношениями:

$$|E_j| \leq 2 + \alpha(\epsilon); \quad \alpha(\epsilon) \rightarrow 0 \quad \epsilon \rightarrow 0;$$

$$E_j = \mathcal{E}(w_j), \quad \mathcal{E}(w) = \frac{i}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right) \left(t + \frac{1}{t} \right).$$

В конечном счете спектр может быть охарактеризован в терминах множества Жулиа динамической системы. При выполнении условия квазиклассичности динамическая система (1.19) может быть описана простыми асимптотическими формулами, что, в свою очередь, ведет к вполне эффективному описанию спектра.

1.2. Аналитические решения. Выбор подходящего базиса решений уравнения (1.1) с матрицей M_0 вида (1.17) опирается на аналитичность этой матрицы по x . Это дает возможность рассматривать *целые аналитические решения* $\psi(z)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$, и фиксировать их асимптотикой при $y \rightarrow \pm\infty$. С такой точки зрения условие квазиклассичности представляется излишним.

Целью настоящей работы является построение подходящего базиса без использования условия квазиклассичности. В настоящей публикации мы ограничимся построением этого базиса лишь для самого уравнения Харпера. Используемая идея может быть распространена, однако, на общее уравнение (1.1) с матрицей вида (1.17). Мы рассматриваем общее уравнение в следующей публикации.

Таким образом, мы будем изучать целые аналитические решения (1.13), считая, что $0 < h < 2\pi$. Множество таких решений является двумерным модулем X над кольцом A h -периодических целых функций. Два решения ψ_1 и ψ_2 образуют базис тогда и только тогда, когда их *вронскиан*

$$\{\psi_1(z), \psi_2(z)\} = \psi_1(z+h)\psi_2(z) - \psi_1(z)\psi_2(z+h), \quad (1.20)$$

который принадлежит A , не имеет нулей. Базис называется *фундаментальным*, если $\{\psi_1(z), \psi_2(z)\} \equiv 1$. Произвольный базис может быть превращен в фундаментальный за счет подходящей нормировки его элементов. Соответствующая матрица монодромии может быть охарактеризована соотношением

$$\vec{\psi}(z + 2\pi) = M_1(z)\vec{\psi}(z), \quad (1.21)$$

в котором $\vec{\psi}(z) = (\psi_1(z), \psi_2(z)) \in \mathbb{C}^2$.

Благодаря симметриям уравнения Харпера для построения этого базиса достаточно построить только одно его целое решение ψ . Второе решение может быть построено непосредственно в терминах ψ , в этой работе мы выбираем $\psi_1(z) = \psi(z)$ и $\psi_2(z) = \psi(2\pi - z)$. Мы конструируем решение ψ так, что $\{\psi_1(z), \psi_2(z)\}$ не зависит от z . Фактически $\{\psi_1(z), \psi_2(z)\}$ оказывается мероморфным по E .

Выбранное решение ψ является целым по z , мероморфным по E и имеет асимптотические представления

$$\begin{aligned} \psi(z) &= (b + o(1)) e^{-i(z-\pi)^2/2h + iz/2} \\ &\quad + (a + o(1)) e^{i(z-\pi)^2/2h + iz/2}, \quad y \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (1.22)$$

и

$$\begin{aligned} \psi(z) &= (c + o(1)) e^{i(z-\pi)^2/2h - iz/2} \\ &\quad + (d + o(1)) e^{-2\pi iz/h} e^{-i(z-\pi)^2/2h - iz/2}, \quad y \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Коэффициенты b , a , c и d — мероморфные функции E .

Из этих асимптотических формул следует, что

$$\{\psi_1, \psi_2\} = bc. \quad (1.24)$$

Введем в рассмотрение элементы матрицы монодромии, соответствующей решению ψ ,

$$M_1(z) = \begin{pmatrix} m_{11}(z) & m_{12}(z) \\ m_{21}(z) & m_{22}(z) \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $bc \neq 0$. Из асимптотических формул для ψ и определения M_1 следует, что

$$\begin{aligned} m_{11} &= a_0 + a_1 e^{iz_1} + a_{-1} e^{-iz_1}, & m_{12} &= b_0 + b_{-1} e^{-iz_1}, \\ m_{21} &= c_0 + c_1 e^{iz_1}, & m_{22} &= d_0, \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$z_1 = 2\pi z/h,$$

с коэффициентами, не зависящими от z . Для проверки (1.25) нужно выразить элементы M_1 в терминах вронскианов решений $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$, $\psi_1(z+2\pi)$ и $\psi_2(z+2\pi)$. После этого достаточно оценить их при $y \rightarrow \pm\infty$. Например, можно видеть,

что $|m_{11}| \leq \text{const } e^{2\pi|y|/h}$. Но, поскольку m_{11} — целая h -периодическая функция, отсюда вытекает, что она имеет представление (1.25) (подробные рассуждения аналогичны рассуждениям из доказательства предложения 4.5 из [BF2]).

Все коэффициенты в (1.25) могут быть вычислены с помощью асимптотических формул для ψ . Это дает

$$M_1(z) = \mathcal{M}(z_1, w), \quad (1.26)$$

где $w = (s, t)$,

$$s = -\frac{d}{b}, \quad t = i\frac{a}{c}. \quad (1.27)$$

Как в [BF2], можно доказать, что, если $E \in \mathbb{R}$, то $|s| = 1$, $t \in \mathbb{R}$.

Итак, для проверки первого шага монодромизации достаточно доказать существование целого решения ψ с асимптотиками (1.22)–(1.23). Исходным пунктом является тот факт, что уравнение Харпера при $E = 0$,

$$\frac{\psi(x+h) + \psi(x-h)}{2} + \cos z \psi(z) = 0, \quad (1.28)$$

может быть проинтегрировано явно: его решение ψ_0 с асимптотическим поведением (1.22)–(1.23) может быть построено в терминах некоторых контурных интегралов. Вводя вслед за этим базис решений $\psi_0(z)$ и $\phi_0(z) = \psi_0(2\pi - z)$, можно обратить оператор, определяемый левой стороной (1.28), и построить для решения ψ интегральное уравнение вида

$$\psi(z) = \psi_0(z) + E \int_{\gamma} K(z, \zeta) \psi(\zeta) d\zeta, \quad (1.29)$$

где γ — контур, идущий из $-i\infty$ в $+i\infty$. Оператор с ядром K оказывается компактным оператором в подходящем пространстве и, таким образом, уравнение определяет на γ решение ψ , которое является мероморфной функцией E . Функция ψ может быть аналитически продолжена до целой функции z , удовлетворяющей оценкам (1.22)–(1.23).

Спектр соответствующего однородного интегрального уравнения можно охарактеризовать в терминах спектра оператора H_0 , определенного левой стороной уравнения Харпера на мнимой оси $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$,

$$H_0 = \text{ch}(h\hat{p}) + \text{ch } y, \quad \hat{p} = \frac{1}{i} \frac{d}{dy}. \quad (1.30)$$

Этот оператор является самосопряженным на естественной области определения в $L_2(\mathbb{R})$. Функции из его области определения аналитичны в полосе $|y| < h$. Спектр H_0 дискретен, расположен при $E > 2$ и имеет в качестве предельной точки лишь $+\infty$. Пусть t_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, — точки спектра оператора H_0 . Спектр однородного интегрального уравнения (2.13) совпадает с множеством точек $-t_n$.

Помимо этого спектра в описании пары ψ_1 и ψ_2 существенную роль играет спектр резонансов оператора

$$H_\pi = \text{ch}(h\hat{p}) - \text{ch } y, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Выражение H_π не допускает естественного самосопряженного толкования, оно должно быть дополнено подходящими граничными условиями при $y \rightarrow \pm\infty$. Эти условия можно охарактеризовать асимптотическим поведением резонансных собственных функций уравнения $H_\pi \psi = E \psi$,

$$\begin{aligned} \psi &\sim b e^{-y/2} e^{-iy^2/2h}, & y \rightarrow +\infty, \\ \psi &\sim c e^{y/2} e^{-iy^2/2h}, & y \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Соответствующий спектр состоит из изолированных точек $-s_n$, $n = 1, 2, \dots$, имеющих отрицательные мнимые части $\text{Im } s_n > 0$. Оказывается, что решения ψ_1 и ψ_2 линейно зависимы над кольцом h -периодических функций лишь тогда, когда E принадлежит спектру H_π .

Таким образом, решения ψ_1 и ψ_2 существуют и линейно независимы, если E не является одной из точек $-s_n$ и $-t_n$, $n \in \mathbb{N}$. В частности, они существуют и линейно независимы для любого E из интервала $-2 \leq E \leq 2$, который содержит спектр уравнения Харпера.

Заметим, что и спектр H_0 , и спектр H_π совпадают со спектрами компактных интегральных операторов из ядерного класса.

Рассмотрим две целые функции

$$\begin{aligned} \Pi_t(E) &= \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{E}{t_n}\right), \\ \Pi_s(E) &= \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{E}{s_n}\right). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Бесконечные произведения сходятся. Функция

$$\Phi(z, E) = \Pi_t(-E) \psi(z, E) \quad (1.33)$$

(мы явно указали зависимость ψ от E) является целой функцией обеих переменных. Введем далее пару решений

$$\Phi_1(z, E) = \Phi(z, E), \quad \Phi_2(z, E) = \Phi(2\pi - z, E). \quad (1.34)$$

Их вронскиан имеет следующую структуру

$$\{\Phi_1(z, E), \Phi_2(z, E)\} = g(E) \Pi_s(-E) \Pi_t(-E), \quad (1.35)$$

где g — целая функция, не имеющая нулей. В точках $-s_n$,

$$\Phi_2 = S_n \Phi_1,$$

в точках $-t_n$

$$\Phi_2 = T_n e^{2\pi iz/h} \Phi_1,$$

коэффициенты S_n и T_n не зависят от z .

В последующих разделах мы доказываем существование решения ψ ($\psi_1(z) = \psi(z)$, $\psi_2(z) = \psi(2\pi - z)$) и также частично исследуем свойства точек t_n и s_n , $n \in \mathbb{N}$. Детальный анализ спектров операторов H_0 и H_π , зависимости решения ψ от E и детальное исследование аналитических свойств коэффициентов t и s матрицы монодромии откладываются до следующей публикации.

§2. Уравнение Харпера при $E = 0$

Здесь мы рассматриваем уравнение

$$\psi(z+h) + \psi(z-h) + 2 \cos z \psi(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (2.1)$$

в котором h — фиксированное положительное число,

$$0 < h < 2\pi.$$

Основным результатом раздела является

Теорема 2.1. Уравнение (2.1) имеет целое решение $\psi_0(z)$ с асимптотиками:

$$\begin{aligned} \psi_0(z) = & b_0 e^{-i(z-\pi)^2/2h+iz/2+o(1)} \\ & + a_0 e^{i(z-\pi)^2/2h+iz/2+o(1)}, \quad y \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (2.2)$$

и

$$\begin{aligned} \psi_0(z) = & c_0 e^{i(z-\pi)^2/2h-iz/2+o(1)} \\ & + d_0 e^{-2\pi iz/h} e^{-i(z-\pi)^2/2h-iz/2+o(1)}, \quad y \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (2.3)$$

при каждом фиксированном x . Здесь x и y — вещественная и мнимая части z , а b_0 , a_0 , c_0 и d_0 — ненулевые комплексные числа. Если значения x ограничены, то оценка погрешностей равномерна по x . Асимптотические представления для ψ' могут быть получены дифференцированием (2.2)–(2.3).

Замечание. Из доказательства теоремы можно видеть, что постоянные коэффициенты из (2.2)–(2.3) могут быть описаны в терминах некоторых контурных интегралов. Хотя эти интегралы не могут быть вычислены явно, это позволяет увидеть, что

$$d_0/b_0 = ie^{\pi^2/h}, \quad a_0/c_0 = -i. \quad (2.4)$$

Мы не контролируем явно равномерность оценок погрешности, но читатель сам может легко восполнить этот пробел, читая доказательство.

Доказательство. Сначала мы сконструируем решение ψ_0 в терминах контурных интегралов. Положив

$$\psi_0(z) = e^{-iz^2/2h} \int_{e^{-i\pi/4}\mathbb{R}} e^{-izp/h - ip^2/4h + \pi ip/2h} v(p) dp, \quad (2.5)$$

мы приходим к разностному уравнению первого порядка

$$v(p+h) = \rho(p)v(p-h), \quad (2.6)$$

где

$$\rho(p) = \frac{e^{ih/2} + e^{ip}}{1 + e^{ih/2+ip}}.$$

В дальнейшем будем использовать обозначения: $\xi = \operatorname{Re} p$, $\eta = \operatorname{Im} p$.

Заметим, что ρ — мероморфна, ее нули находятся в точках $h/2 + \pi + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, а ее полюса — в точках $-h/2 + \pi + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$. И нули, и полюса — простые.

Построим функцию v . Разрежем комплексную плоскость вдоль вещественной оси от $-\infty$ до $-\pi + h/2$ и от $\pi - h/2$ до $+\infty$. Рассмотрим ветвь функции

$$l(p) = \ln \rho(p),$$

аналитическую на этой разрезанной плоскости и фиксированную условием $l(0) = 0$. Легко видеть, что

$$l(p) = \pm ih/2 + O(e^{-|\eta|}), \quad \eta \rightarrow \pm\infty. \quad (2.7)$$

Пусть

$$\lambda(p) = \frac{\pi}{8ih^2} \int_{\gamma_p} \frac{J(p')}{\cos^2\left(\frac{\pi(p-p')}{2h}\right)} dp', \quad J(p) = \int_0^p l(s) ds, \quad (2.8)$$

где γ_p — кривая, лежащая на разрезанной плоскости, проходящая через точку интервала $(p-h, p+h)$ и являющаяся вертикальной, т.е. пересекающая линии $\operatorname{Re} p = \text{const}$ только под ненулевыми углами. Интеграл в (2.8) сходится и аналитичен по p на комплексной плоскости, разрезанной вдоль вещественной оси от $-\infty$ до $-\pi$ и от π до $+\infty$. Обозначим разрезанную плоскость через \mathbb{C}_π . С помощью теоремы о вычетах проверяется, что λ удовлетворяет уравнению

$$\lambda(p+h) - \lambda(p-h) = l(p), \quad (2.9)$$

если $p-h$ и $p+h$ находятся в \mathbb{C}_π . Фиксируем δ так, что $0 < \delta < \pi/2$. Пусть

$$S_\delta^+ = \{p : \delta < \arg p < \pi - \delta\}, \quad S_\delta^- = \{p : -\pi + \delta < \arg p < -\delta\}.$$

Используя (2.7) и (2.8), можно проверить, что при $p \rightarrow \infty$, $p \in S_\delta^\pm$,

$$\lambda(p) = \pm ip/4 + \lambda_\pm + g_\pm(p), \quad |g_\pm(p)| \leq \text{const } c(\xi), \quad (2.10)$$

где λ_\pm — некоторые постоянные, а

$$c(\xi) = \begin{cases} e^{-|\xi|}, & h < \pi, \\ e^{-|\xi|(1+|\xi|)}, & h = \pi, \\ e^{-\pi/h|\xi|}, & h > \pi. \end{cases} \quad (2.11)$$

Пусть теперь

$$v(p) = e^{\lambda(p)}.$$

Эта функция, очевидно, является аналитической в \mathbb{C}_π и благодаря (2.9) удовлетворяет (2.6) при $p-h, p+h \in \mathbb{C}_\pi$. Посредством (2.6) $v(p)$ мероморфно продолжается на всю комплексную плоскость. Выполнив это продолжение, видим, что полюса v находятся в точках $\pi + h/2 + 2hm + 2\pi l$, $m, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и в точках $-\pi - h/2 - 2hm - 2\pi l$, $m, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Полюса, расположенные в точках $\pi + h/2$ и $-\pi - h/2$, простые. Вычеты v в этих точках не равны нулю. В частности, для первого из них это следует из выкладки:

$$\begin{aligned} & \operatorname{Res}_{\pi+h/2} v(z) \\ &= v(\pi - 3h/2) \operatorname{Res}_{\pi-3h/2} \rho(z) \\ &= \exp(\lambda(\pi - h/2)) \operatorname{Res}_{\pi-h/2} \rho(z) \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

поскольку в точке $\pi - h/2$ функция λ аналитична, а ρ имеет простой полюс.

Подставим построенную функцию v в (2.5). Из оценок (2.10) вытекает, что интеграл (2.5) сходится и дает целую функцию ψ_0 . Поскольку v удовлетворяет (2.6), ψ_0 является решением уравнения (2.2).

Построенное решение ψ_0 является решением, описанным в теореме. Для завершения доказательства мы должны получить асимптотические представления для ψ_0 и ψ'_0 . Мы доказываем только (2.2). Остальные представления доказываются аналогично.

При $x < \pi$ асимптотика ψ_0 может быть описана как вклад точки перевала. При $\pi \leq x$ главный член асимптотики (2.2) содержит вклад полюса в точке $z = -\pi - h/2$ подынтегрального выражения (2.5).

Положим

$$\Phi_{\pm}(p) = -izp/h - ip^2/4h + \pi ip/2h \pm ip/4.$$

Пусть p_s — точка, удовлетворяющая уравнению $\Phi'_{-}(p_s) = 0$. Тогда, очевидно,

$$p_s = -2z + \pi - h/2.$$

Предположим, что y и x фиксированы так, что

$$\operatorname{Re} p_s > -\varepsilon,$$

где ε — положительная постоянная. Мы собираемся продеформировать контур интегрирования γ в (2.4) к новому контуру γ' . Для этого нам придется изучить некоторые семейства кривых на комплексной плоскости \mathbb{C} . На рис. 1 мы показываем характер семейства кривых $\operatorname{Im} \Phi_{-}(p) = \operatorname{const}$ (пунктирные линии) и семейства кривых $\operatorname{Re} \Phi_{-}(p) = \operatorname{const}$ (непрерывные линии). На этом рисунке стрелочки указывают направления убывания функции $|e^{\Phi_{-}(p)}|$. Четыре кривых, проходящих через точку p_s , — прямые линии. Все другие — гиперболы.

Контур γ' показан на рис. 2. Он состоит из отрезков следующих четырех линий. Первая линия, γ_1 , — прямая линия, проходящая через точку p_s и параллельная $e^{-i\pi/4} \mathbb{R}$. Она может быть описана уравнением

$$\operatorname{Im} \Phi_{-}(p) = \operatorname{Im} \Phi_{-}(p_s).$$

Вторая линия, γ_2 , проходит через точку $p = -\varepsilon$ и является верхней ветвью гиперболы

$$\operatorname{Re} \Phi_{-}(p) = \operatorname{Re} \Phi_{-}(-\varepsilon).$$

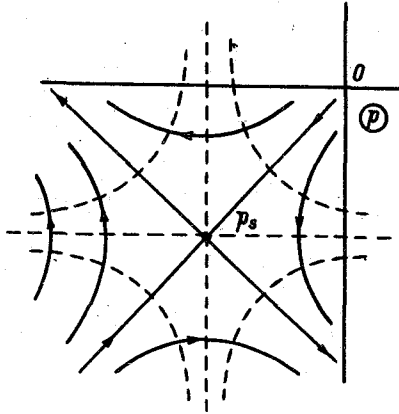


Рис. 1.

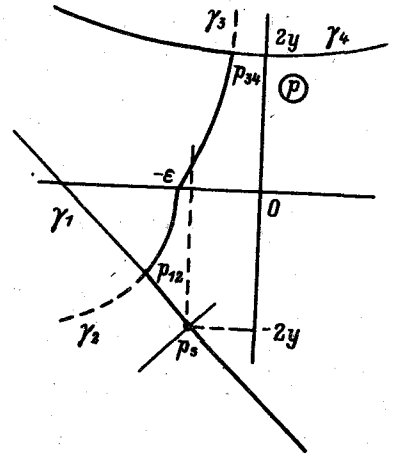


Рис. 2.

Третья линия, γ_3 , также проходит через $p = -\epsilon$ и описывается уравнением

$$\operatorname{Re} \Phi_+(p) = \operatorname{Re} \Phi_+(-\epsilon).$$

Последняя линия, γ_4 , является верхней ветвью гиперболы

$$\operatorname{Im} \Phi_+(p) = \operatorname{const},$$

пересекающей γ_3 в точке с $\operatorname{Im} p = 2y$.

Контур γ' идет вдоль γ_1 из $-i\infty$ в точку пересечения γ_1 и γ_2 , затем вдоль γ_2 в точку $p = -\epsilon$, затем вдоль γ_3 к точке пересечения γ_3 и γ_4 , а затем вдоль γ_4 налево. Обозначим соответствующие части контура γ' через γ'_1 , γ'_2 , γ'_3 и γ'_4 .

В следующих оценках мы обозначаем символом C различные константы, не зависящие от y , а $f(p)$ обозначает подынтегральное выражение в (2.5).

Предположим, что x фиксировано, $x < \pi$, тогда можно выбрать $-\epsilon > -\pi - h/2$, и γ может быть продеформирована к γ' без пересечения полюсов $f(p)$, которые являются полюсами v . Исследуем f на контуре γ' , принимая во внимание (2.10) и (2.11). Имеем

$$f(p) = e^{\Phi_-(p)+\lambda} (1+g(p)), \quad |g(p)| \leq C c(\xi_{12}), \quad p \in \gamma'_1, \quad (2.12)$$

где c определена (2.11), а ξ_{12} — мнимая часть точки пересечения γ_1 и γ_2 . Благодаря выбору кривых $\gamma_2 - \gamma_4$, мы имеем также

$$\begin{aligned} |f(p)| &\leq C |\exp(\Phi_-(p))| = C \exp(-y\varepsilon/h), & p \in \gamma'_2, \\ |f(p)| &\leq C |\exp(\Phi_+(p))| = C \exp(-y\varepsilon/h), & p \in \gamma'_3, \\ |f(p)| &\leq C \exp(-y\varepsilon/h) |\exp(\Phi_+(p) - \Phi_+(p_{34}))|, & p \in \gamma'_4, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где p_{34} — точка пересечения γ_3 и γ_4 .

Заметим, что для достаточно больших y

$$y \leq |p_{12}| \leq C y, \quad |p_{34}| \leq C y, \quad |p_s - p_{12}| \geq C \sqrt{y}. \quad (2.14)$$

Пусть

$$\int_{\gamma'_1} f(p) dp = \phi_0 + \phi_1 - \phi_2,$$

где

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \int_{\gamma_1} \exp(\Phi_-(p) + \lambda_-) dp, \\ \phi_1 &= \int_{\gamma'_1} \exp(\Phi_-(p) + \lambda_-) g(p) dp, \\ \phi_2 &= \int_{\gamma_1 \setminus \gamma'_1} \exp(\Phi_-(p) + \lambda_-) dp, \end{aligned}$$

и g — та же, что и в (2.11). Член ϕ_0 может быть вычислен явно:

$$\phi_0 = \alpha \exp(i(z - \pi/2 + h/4)^2/h),$$

где α — некоторая ненулевая постоянная, не зависящая от z . Заметим, что

$$|\phi_0| = |\alpha| \exp(y \xi_s/h), \quad \xi_s = \text{Im } p_s.$$

Член ϕ_1 допускает оценку

$$|\phi_1| \leq C \exp(y \xi_s/h) c(y).$$

С учетом третьей оценки из (2.14) член ϕ_2 может быть оценен интегрированием по частям:

$$|\phi_2| \leq C \exp(-y\epsilon/h)/\sqrt{y}.$$

Более того, посредством (2.13) и (2.14) получается

$$\left| \int_{\gamma'_2 \cup \gamma'_3} f(p) dp \right| \leq C y \exp(-y\epsilon/h), \quad \left| \int_{\gamma'_4} f(p) dp \right| \leq C \exp(-y\epsilon/h)/y.$$

Комбинируя эти две оценки с оценками для ϕ_1, ϕ_2 , получаем окончательно

$$\int_{\gamma'} f(p) dp = \tilde{b} \exp(i(z - \pi/2 + h/4)^2/h)(1 + o(1)), \quad y \rightarrow +\infty, \quad (2.15)$$

где \tilde{b} — коэффициент, не зависящий от z . Это вместе с (2.4) влечет (2.2) в случае $x < \pi$.

Теперь предположим, что $x \geq \pi$. В этом случае, выберем ϵ так, чтобы точка $p = -\epsilon$ находилась между полюсами v . Деформируя контур γ к γ' , нам придется пересекать часть полюсов подынтегрального выражения f , и

$$\int_{\gamma} f(p) dp = \int_{\gamma'} f(p) dp + R, \quad (2.16)$$

где

$$R = 2\pi i \sum_{l=1}^L \text{Res}_{p=p_l < 0} f(p),$$

p_l — l -й слева от нуля полюс f , а L — натуральное число, зависящее от выбора ϵ . Первый член в (2.16) может быть, как и раньше, описан асимптотической формулой (2.15). Обсудим второй член. Начнем с вычисления вклада полюса $p = p_1 = -\pi - h/2$. Он имеет вид $f_0 e^{iz\pi/h + iz/2}$. Поскольку полюс v при $p = -\pi - h/2$ — простой, то f_0 не зависит от z ,

$$f_0 = 2\pi i \exp(-ip^2/4h + \pi ip/2h) \Big|_{p=-\pi-h/2} \text{Res}_{-\pi-h/2} v(p),$$

а поскольку $\text{Res}_{-\pi-h/2} v(p) \neq 0$, то $f_0 \neq 0$. Легко видеть, что вклад от всех остальных полюсов убывает при $y \rightarrow +\infty$ быстрее, чем вклад от первого. Отсюда вытекает асимптотика

$$R = f_0 e^{iz\pi/h + iz/2} (1 + o(1)), \quad y \rightarrow +\infty. \quad (2.17)$$

Подставляя эту формулу и формулу (2.15) в (2.16), а (2.16) в (2.5), мы опять приходим к (2.2). •

В дальнейшем нам потребуются два линейно независимых решения (2.1). Выберем в качестве второго решения функцию $\phi_0(z) = \psi_0(2\pi - z)$.

Лемма 2.2. Вронскиан решений ψ_0 и ϕ_0 — константа, в обозначениях (2.2)–(2.3)

$$\{\psi_0(z), \phi_0(z)\} = b_0 c_0. \quad (2.18)$$

Доказательство. Докажем сначала, что вронскиан — постоянная. Используя (2.2)–(2.3) для оценки вронскиана,

$$w(z) = \psi_0(z+h)\phi_0(z) - \psi_0(z)\phi_0(z+h), \quad (2.19)$$

можно видеть, что

$$|w(z)| \leq C \exp(2\pi y/h - y), \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad y > 0.$$

Так как w — h -периодическая целая функция, и $0 < h < 2\pi$, это означает, что ряд Фурье w имеет вид $w(z) = \sum_{l=0}^{+\infty} w_l \exp(2\pi ilz/h)$. Далее, поскольку $\phi_0(z) = \psi_0(2\pi - z)$, то $w(2\pi - z) = w(z)$, и, фактически, $w(z) = w_0$, т.е. вронскиан постоянен.

Вычисление w слегка зависит от величины h . Сначала рассмотрим случай, когда $0 < h < \pi$. Выберем z так, чтобы $y > 0$, и $\pi < x < x + h < 2\pi$. Тогда при помощи (2.2)–(2.3) получаем

$$w = b_0 c_0 + o(1), \quad y \rightarrow +\infty,$$

а поскольку мы уже видели, что w — константа, отсюда вытекает (2.18).

В случае $\pi \leq h < 2\pi$, положим $0 < x < \pi < x + h < 2\pi$, и $y > 0$. При таком выборе z , устремляя y к бесконечности, мы опять приходим к (2.19). •

Два построенных решения ψ_0 и ϕ_0 образуют фундаментальный базис в пространстве решений уравнения Харпера при $E = 0$. Для $E = 0$ решения ψ_1 и ψ_2 уравнения Харпера, обсуждавшиеся во Введении, в точности являются этими ψ_0 и ϕ_0 . Формулы (2.4) и (1.27) позволяют вычислить коэффициенты s и t матрицы монодромии (1.26) при $E = 0$:

$$s(0) = -ie^{\pi^2 i/h}, \quad t(0) = 1.$$

Поделив решения ψ_0 и ϕ_0 на $\sqrt{b_0 c_0}$, получим два новых решения уравнения (2.1). Сохраняя для них старые обозначения, видим, что

$$\{\psi_0(z), \phi_0(z)\} = 1, \quad (2.20)$$

и что, как раньше,

$$\phi_0(z) = \psi_0(2\pi - z), \quad (2.21)$$

а ψ_0 имеет асимптотические представления вида (2.2)–(2.3) с ненулевыми константами b_0 , a_0 , c_0 и d_0 .

В дальнейшем нам потребуется

Следствие 2.3. Пусть X — фиксированное положительное число. Решение ψ_0 удовлетворяет оценкам:

$$|\psi_0(z)| \leq \text{const } e^{|x-\pi|y/h-|y|/2}, \quad |x-\pi| \leq X, \quad y > 0, \quad (2.22)$$

$$|\psi_0'(z)| \leq \text{const } (1 + |y|) e^{|x-\pi|y/h-|y|/2}, \quad |x-\pi| \leq X, \quad y > 0, \quad (2.23)$$

$$|\psi_0(z)| \leq \text{const } e^{(|x|-\pi)|y|/h-|y|/2}, \quad |x| \leq X, \quad y < 0, \quad (2.24)$$

$$|\psi_0'(z)| \leq \text{const } (1 + |y|) e^{(|x|-\pi)|y|/h-|y|/2}, \quad |x| \leq X, \quad y < 0. \quad (2.25)$$

§3. Уравнение Харпера для произвольного E

В этом разделе мы доказываем аналог теоремы 2.1 для уравнения Харпера (1.13).

Теорема 3.1. Для E , находящегося вне счетного множества τ точек $-t_l, l \in \mathbb{N}$, расположенных при $E < -2$, имеющего единственную точку накопления на $-\infty$, существует целое по z решение (1.13) с асимптотикой:

$$\begin{aligned} \psi(z) = & (b(E) + o(1)) e^{-i(z-\pi)^2/2h+iz/2} \\ & + (a(E) + o(1)) e^{i(z-\pi)^2/2h+iz/2}, \quad y \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (3.1)$$

и

$$\begin{aligned} \psi(z) = & (c(E) + o(1)) e^{i(z-\pi)^2/2h-iz/2} \\ & + (d(E) + o(1)) e^{-2\pi iz/h} e^{-i(z-\pi)^2/2h-iz/2}, \quad y \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (3.2)$$

при каждом фиксированном x . И ψ , u , b , a , d аналитичны по E , $E \notin \tau$, причем

$$\begin{aligned} b = b_0 \left(1 + \frac{E}{h} \int_{\gamma} \phi_0(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta \right), \quad a = \frac{a_0}{b_0} b - c_0 \frac{E}{h} \int_{\gamma} \psi_0(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta, \\ c = c_0, \quad d = d_0 - b_0 \frac{E}{h} \int_{\gamma} e^{2\pi i \zeta/h} \phi_0(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta, \end{aligned}$$

где b_0, a_0, c_0 и d_0 — те же самые, что и в (2.2)–(2.3), а контур γ — кривая, начинающаяся в $-i\infty$ и заканчивающаяся в $\pi + i\infty$.

Замечания. Более детально мы опишем множество τ в разделе 3.4.

Основная часть этого раздела посвящена доказательству теоремы. В дальнейшем для $z, \zeta \in \mathbb{C}$ мы используем обозначения $x = \text{Re } z, y = \text{Im } z, \xi = \text{Re } \zeta, \eta = \text{Im } \zeta$. Так же, мы используем букву C как символ, обозначающий положительные постоянные, не зависящие от z .

3.1. Компактный оператор. Рассмотрим гладкую кривую $\gamma \subset \mathbb{C}$, идущую вдоль мнимой оси из $-i\infty$ в точку $-i\alpha$, $\alpha > 0$, затем из $-i\alpha$ в точку $i\beta + \pi$, $\beta > 0$, затем вдоль линии $\operatorname{Re} z = \pi$ на $+i\infty$. Предположим, что γ — вертикальная, в том смысле, что существует постоянная ε , $0 < \varepsilon < \pi/2$, такая, что в любой точке γ угол φ между γ и горизонтальной линией $\operatorname{Re} z = \operatorname{const}$ удовлетворяет неравенству

$$\varepsilon < \varphi \leq \pi - \varepsilon. \tag{3.3}$$

Пусть

$$K(z, \zeta) = \frac{1}{2ih} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - z)}{h} + i \right] (\psi_0(z)\phi_0(\zeta) - \psi_0(\zeta)\phi_0(z)), \tag{3.4}$$

где ψ_0 и ϕ_0 — решения уравнения (2.1), сконструированные в разделе 2. Одним из наших главных объектов является оператор \mathcal{K} , действующий по формуле

$$(\mathcal{K}f)(z) = \int_{\gamma} K(z, \zeta) f(\zeta) d\zeta, \quad z \in \gamma, \tag{3.5}$$

в пространстве $L_2(\gamma, \rho)$, где ρ — вес,

$$\rho(z) = \begin{cases} 1, & y \geq 0, \\ e^{2\pi|y|/h}, & y < 0, \end{cases} \quad z \in \gamma.$$

Докажем

Предложение 3.2. *Оператор \mathcal{K} является оператором Гильберта-Шмидта в пространстве $L_2(\gamma, \rho)$.*

Доказательство. Ввиду следствия 2.3

$$|\psi_0(z)| \leq C \rho^{-1/2}(z) e^{-|y|}, \tag{3.6}$$

$$|\phi_0(z)| \leq C \rho^{1/2}(z) e^{-|y|}, \quad z \in \gamma,$$

$$|\psi'_0(z)| \leq C(1 + |z|) \rho^{-1/2}(z) e^{-|y|}, \tag{3.7}$$

$$|\phi'_0(z)| \leq C(1 + |z|) \rho^{1/2}(z) e^{-|y|}, \quad z \in \gamma.$$

Предположим, что $|y - \eta| > 1$. В этом случае

$$\left| \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - z)}{h} + i \right| \leq C \begin{cases} e^{-\frac{2\pi(y-\eta)}{h}}, & y < \eta, \\ 1, & y > \eta, \end{cases} \quad z, \zeta \in \gamma. \tag{3.8}$$

С помощью (3.6) и этого неравенства можно проверить, что

$$|K(z, \zeta)| \rho^{1/2}(z) \rho^{-1/2}(\zeta) \leq C e^{-|y|/2 - |\eta|/2}, \quad z, \zeta \in \gamma. \quad (3.9)$$

Если $|y - \eta| \leq 1$, то

$$\left| \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - z)}{h} + i \right| \leq \frac{C}{|z - \zeta|}, \quad z, \zeta \in \gamma, \quad (3.10)$$

где C — положительная постоянная, зависящая от ϵ из (3.3), и таким образом,

$$|K(z, \zeta)| \leq C \left| \frac{\psi_0(z) \phi_0(\zeta) - \psi_0(\zeta) \phi_0(z)}{z - \zeta} \right|.$$

Теперь при помощи (3.6)–(3.7) легко убедиться, что

$$|K(z, \zeta)| \rho^{1/2}(z) \rho^{-1/2}(\zeta) \leq C(1 + |\eta|) e^{-|y|/2 - |\eta|/2}. \quad (3.11)$$

Из оценок (3.9), (3.11) и условия вертикальности (3.3) вытекает, что \mathcal{K} — оператор Гильберта–Шмидта. •

Пусть

$$\tau = \{ E \in \mathbb{C} : 1/E \in \operatorname{spectrum}(\mathcal{K}) \}. \quad (3.12)$$

Так как \mathcal{K} — компактный, то τ — счетное множество точек $-t_l$, $l \in \mathbb{N}$, которые могут накапливаться лишь на бесконечности. Мы увидим позднее, что это τ и есть множество, упомянутое в теореме 3.1.

Замечание. Используя аналитичность ядра K и его быстрое убывание при $z, \zeta \rightarrow \infty$, стандартным образом можно показать, что \mathcal{K} — ядерный оператор.

3.2. Целое решение уравнения Харпера при $E \notin \tau$. Заметим, что $\psi_0 \in L_2(\gamma, \rho)$. Пусть $E \notin \tau$. Тогда в $L_2(\gamma, \rho)$ имеется единственное решение уравнения

$$\psi = \psi_0 + EK\psi. \quad (3.13)$$

В этом разделе мы показываем, что ψ может быть аналитически продолжено на всю комплексную плоскость, и что после продолжения, оно удовлетворяет уравнению Харпера. В дальнейшем для краткости мы не будем различать ψ и его аналитическое продолжение.

Предложение 3.3. *Решение ψ является целой функцией и удовлетворяет соотношению*

$$\psi(z) = \psi_0(z) + \int_{\gamma_z} K(z, \zeta) \psi(\zeta) d\zeta, \quad (3.14)$$

в котором контур интегрирования идет из $-i\infty$ вдоль мнимой оси, проходит между точками $z - h$ и $z + h$ и уходит на $+i\infty$ вдоль линии $\operatorname{Re} z = \pi$.

Доказательство. Сначала предположим, что γ_z — кривая γ из определения оператора \mathcal{K} . Для любого z , находящегося в полосе

$$S_h = \{z \in \mathbb{C} : \exists \zeta \in \gamma, |x - \xi| < h\},$$

ядро $K(z, \zeta)$ не имеет сингулярностей вдоль γ . Отсюда вытекает, что функции

$$f_R(z) = \int_{\gamma, |\zeta| \leq R} K(z, \zeta) \psi(\zeta) d\zeta, \quad R > 0,$$

аналитичны в S_h . Включение $\psi \in L_2(\gamma, \rho)$ и оценка (2.22) гарантируют, что последовательность f_R сходится при $R \rightarrow \infty$ к функции, аналитической в S_h . Таким образом, правая часть (3.14), а значит, и сама функция ψ аналитичны в этой полосе.

Теперь можно показать, что ψ аналитически продолжается на всю комплексную плоскость. Пусть γ' — вертикальная кривая, которая, как и кривая γ , приходит из $-i\infty$ вдоль мнимой оси и уходит на $+i\infty$ вдоль линии $\operatorname{Re} z = \pi$. Если $\gamma' \subset S_h$, то благодаря аналитичности ψ

$$\psi(z) = \psi_0(z) + E \int_{\gamma'} K(z, \zeta) \psi(\zeta) d\zeta, \quad z \in \gamma', \quad (3.15)$$

откуда вытекает, что ψ аналитична в $S'_h = \{z \in \mathbb{C} : \exists \zeta \in \gamma', |x - \xi| < h\}$, а значит, ψ аналитична в $S_h \cup S'_h$. Деформируя контур γ' , мы видим, что на самом деле ψ аналитична в полосе $S_{2h} = \{z \in \mathbb{C} : \exists \zeta \in \gamma, |x - \xi| < 2h\}$, и что кривая γ' из (3.15) может быть проведена внутри нее. Повторяя эти рассуждения, можно продолжить ψ на всю комплексную плоскость. •

Закончим этот раздел следующим утверждением:

Предложение 3.4. Решение ψ удовлетворяет уравнению Харпера (1.13).

Доказательство. Пусть $(\mathcal{H}_0 f)(z) = f(z+h) + f(z-h) + 2 \cos f(z)$. Согласно (3.5) $\mathcal{H}_0 \psi = E \mathcal{H}_0 \mathcal{K} \psi$. Для вычисления $\mathcal{H}_0 \mathcal{K} \psi$ воспользуемся представлением $\mathcal{K} \psi$, описанным в предложении 3.3. В этом представлении выберем кривую γ_z так, чтобы она проходила между точками $z-h$ и z . Это позволяет написать

$$(\mathcal{K} \psi)(z) = \frac{1}{ih} \psi_0(z) \int_{\gamma_z} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta-z)}{h} + i \right] \phi_0(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta - \frac{1}{ih} \phi_0(z) \int_{\gamma_z} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta-z)}{h} + i \right] \psi_0(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta.$$

Теперь, применяя теорему о вычетах, чтобы деформировать γ_{z+h} и γ_{z-h} к γ_z , можно получить

$$E(\mathcal{H}_0 \mathcal{K} \psi)(z) = 2E(\psi_0(z+h)\phi_0(z) - \psi_0(z)\phi_0(z+h))\psi(z).$$

В правой части этой формулы присутствует вронскиан ψ_0 и ϕ_0 . Но, согласно (2.20), он равняется единице, что и доказывает предложение. •

3.3. Асимптотические представления решений. Цель этого раздела — доказать, что решение ψ имеет асимптотические представления (3.1) и (3.2) при $z \rightarrow \pm i\infty$.

1. Начнем с рассмотрения случая, когда $y \geq 0$. Прежде, чем перейти к формальному доказательству, опишем его мотивировку.

Благодаря быстрой сходимости интегралов

$$\int_{\gamma} \psi_0(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta, \quad \int_{\gamma} \phi_0(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta$$

при $\zeta \rightarrow \pi + i\infty$, асимптотику $\mathcal{K} \psi(z)$ можно получить, заменяя в формуле (3.14) $\operatorname{ctg}(\dots) + i$ на 2. Это приводит к следующему ответу:

$$\psi(z) = \psi_0(z)(A + o(1)) + \phi_0(z)(B + o(1)),$$

где

$$A = 1 + \frac{E}{h} \int_{\gamma} \phi_0(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta, \quad B = -\frac{E}{h} \int_{\gamma} \psi_0(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta.$$

Асимптотические формулы для ψ_0 и ϕ_0 известны. Подставляя их в выписанную формулу для ψ , приходим к утверждению теоремы.

Теперь перейдем к подробному доказательству. Мы проведем асимптотический анализ ψ в два шага. Сначала, используя интегральное уравнение, докажем (3.1) для z , находящегося в окрестности контура γ . Потом мы распространим асимптотические формулы на всю комплексную плоскость уже без использования интегрального уравнения.

Докажем вспомогательную лемму. Ее значение состоит, в частности, в том, что она позволяет продеформировать контур интегрирования в интегральном уравнении при $z \rightarrow \infty$, что упрощает анализ.

Лемма 3.5. *Фиксируем ϵ , $0 < \epsilon < h/2$. В области*

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \pi - h/2 + \epsilon \leq x \leq \pi + h/2 - \epsilon, y > 0\},$$

$$|\psi(z)| \leq C e^{y|\pi-x|/h-y/2}.$$

Доказательство. Достаточно доказать лемму для $y > \beta$ (множество $\{z \in \gamma : y > \beta\}$ является частью линии $\operatorname{Re} z = \pi$). Для этого можно воспользоваться (3.14). Перепишем его в виде

$$\psi(z) = \psi_0(z) + I_1(z) + I_2(z),$$

где

$$I_j(z) = \frac{E}{2ih} \int_{\gamma_j} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - z)}{h} + i \right] (\psi_0(z)\phi_0(\zeta) - \psi_0(\zeta)\phi_0(z)) \psi(\zeta) d\zeta,$$

$j = 1, 2$, и $\gamma_1 = \{\zeta \in \gamma_z : |\eta - y| \geq 1\}$, $\gamma_2 = \{\zeta \in \gamma_z : |\eta - y| \leq 1\}$. Оценим I_1 и I_2 .

Заметим, что для $z \in D$, $y > b$, все особенности функции $\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - z)}{h}$, кроме $z = \zeta$, находятся на расстоянии h от γ . Поэтому

$$|I_1| \leq C \int_{\gamma} (|\psi_0(z)\phi_0(\zeta)| + |\phi_0(z)\psi_0(\zeta)|) |\psi(\zeta)| d\eta.$$

Теперь включение $\psi \in L_2(\gamma, \rho)$ и оценка следствия 2.3 влекут неравенство

$$|I_1| \leq C e^{y|\pi-x|/h-y/2}. \tag{3.16}$$

Далее,

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq C \int_{\gamma_2} \left| \frac{\psi_0(z)\phi_0(\zeta) - \psi_0(\zeta)\phi_0(z)}{z - \zeta} \right| |\psi(\zeta)| d\eta \\ &\leq C \max_{\substack{\zeta : |y-\eta| \leq 1, \\ \zeta \in [x, \pi]}} |\psi_0(z)\phi_0'(\zeta) - \psi_0'(\zeta)\phi_0(z)|, \end{aligned}$$

и, опять используя оценки следствия 2.3, получаем

$$|I_2| \leq C y e^{-y+2y|\pi-x|/h}. \quad (3.17)$$

Поскольку для $z \in D$, $y e^{-y/2+y|\pi-x|/h} \leq \text{const}$, из (3.16) и (3.17) вытекает утверждение леммы. •

Лемма 3.6. *Фиксируем ϵ и ϵ_1 так, чтобы $0 < \epsilon_1 < \epsilon < h/2$. В области $\pi - 3h/2 + \epsilon \leq x \leq \pi + 3h/2 - \epsilon$, решение ψ допускает асимптотическое представление*

$$\psi(z) = \psi_0(z)(A + A_1(z)) + \phi_0(z)(B + B_1(z)), \quad (3.18)$$

где

$$A = 1 + \frac{E}{h} \int_{\gamma} \phi_0(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta, \quad B = -\frac{E}{h} \int_{\gamma} \psi_0(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta,$$

γ — кривая из определения K , а функции A_1 и B_1 удовлетворяют оценкам:

$$|A_1(z)| \leq C e^{-2\epsilon_1 y/h}, \quad |B_1(z)| \leq C e^{-2\epsilon_1 y/h}. \quad (3.19)$$

Доказательство. Пусть γ_0 — гладкая вертикальная кривая, приходящая из $-i\infty$ вдоль мнимой оси и уходящая на $+i\infty$ вдоль линии $\text{Re } z = x_0$.

Выберем два положительных числа ϵ_1 и ϵ_2 так, чтобы

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon. \quad (3.20)$$

Сначала рассмотрим случай, где

$$0 \leq x \leq \pi + 3h/2 - \epsilon. \quad (3.21)$$

Выберем x_0 так, чтобы

$$\pi - h/2 + \epsilon_1 \leq x_0 \leq \pi + h/2 - \epsilon_1 \quad (3.22)$$

и

$$\epsilon_2 \leq x - x_0 \leq h - \epsilon_2. \quad (3.23)$$

Это всегда возможно благодаря (3.20).

Ввиду (3.22), оценка (2.22) и оценка леммы 3.5 позволяют деформировать контур интегрирования в (3.14) к кривой γ_0 . Важно подчеркнуть, что из-за

(3.23) можно осуществить эту деформацию так, что полюса подынтегрального выражения из (3.14) находились на расстоянии большем, чем $\epsilon_2 > 0$ от контура интегрирования. Так как вдоль выбранного контура $|z - \zeta| \geq \epsilon_2$, получаем

$$\left| \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - z)}{h} - i \right| \leq C \begin{cases} 1, & y \leq \eta, \\ e^{-2\pi(y-\eta)/h}, & y \geq \eta, \end{cases} \quad \zeta \in \gamma_0. \quad (3.24)$$

Мы провели кривую γ_0 так, что, начиная с некоторой точки, она уходит на $+i\infty$ вдоль линии $\operatorname{Re} z = x_0$. Предполагая, что z находится выше этой точки, можно переписать (3.14) в виде (3.18) с

$$A_1(z) = \frac{E}{2ih} \int_{\gamma_0} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - z)}{h} - i \right] \phi_0(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta,$$

$$B_1(z) = \frac{E}{2ih} \int_{\gamma_0} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - z)}{h} - i \right] \psi_0(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta.$$

Используя (3.24), оценку для ψ из леммы 3.5 и оценку (2.22) для ψ_0 , проверяем (3.19).

Если $x \leq \pi$, то доказательство почти не изменяется, но вместо (3.23) следует потребовать, чтобы $\epsilon_2 \leq x_0 - x \leq h - \epsilon_2$. •

Формула (3.18) и асимптотика (2.22) для ψ_0 показывают, что при $\pi - 3h/2 + \epsilon \leq x \leq \pi + 3h/2 - \epsilon$ решение ψ имеет представление (3.1). Используя формулы для A и B , легко вычислить коэффициенты в этом представлении,

$$b = b_0 \operatorname{Big} \left(1 + \frac{E}{h} \int_{\gamma} \phi_0(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta \operatorname{Big} \right), \quad a = \frac{a_0}{b_0} b - c_0 \frac{E}{h} \int_{\gamma} \psi_0(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta, \quad (3.25)$$

где b_0 , a_0 и c_0 — те же, что и в (2.2).

2. Теперь распространим (3.1) за пределы окрестности линии $\operatorname{Re} z = \pi$. Рассмотрим в деталях случай, когда $x \geq \pi + \epsilon$, $0 < \epsilon < h/2$. Заметим, что если $b \neq 0$, то (3.1) является асимптотическим представлением, а если $b = 0$, то (3.1) дает лишь оценку для ψ . Поэтому приходится разделять случаи, где $b \neq 0$ и где $b = 0$. Сначала предположим, что $b \neq 0$. Воспользуемся следующим утверждением, основывающемся эвристический принцип: „асимптотика может быть расширена на область, при продолжении в которую она возрастает“.

Лемма 3.7. Если решение (1.13) имеет асимптоту

$$f(z) = f_0 e^{-i(z-\pi)^2/2h + iz/2 + o(1)}, \quad y \rightarrow +\infty, \quad (3.26)$$

в области $\alpha \leq x \leq \beta$, $\beta - \alpha > 2h$, то оно имеет ту же асимптотику и в области $\alpha \leq x \leq \beta + h$.

Если оценка погрешности равномерна по x при $\alpha \leq x \leq \beta$, то она равномерна и в расширенной области.

Доказательство. Из уравнения Харпера следует, что

$$\psi(z+h) = -\psi(z) e^{-iz} (1 - 2E e^{iz} + e^{2iz} + e^{iz} \psi(z-h)/\psi(z)). \quad (3.27)$$

Но в виду (3.26)

$$|\psi(z-h)/\psi(z)| = e^{-y+o(1)}, \quad \alpha \leq x-h < x \leq \beta.$$

Это вместе с (3.27) доказывает первое утверждение. Замечание о равномерности погрешности очевидно. •

Теперь мы можем обработать случай, где $b \neq 0$. Фиксируем ϵ , $0 < \epsilon < h/2$. Достаточно показать, что (3.1) выполняется в области

$$\pi + \epsilon \leq x \leq \pi + 2h + \epsilon.$$

После этого асимптотическое представление обосновывается для любого x применением леммы 3.7 конечное число раз. Мы уже обосновали (3.1) для $x \leq \pi + h + \epsilon$. Пусть $\pi + h + \epsilon \leq x \leq \pi + 2h + \epsilon$. Тогда

$$\psi(z-h) = b e^{-i(z-h-\pi)^2/2h+iz+o(1)}$$

и

$$|\psi(z-2h)| \leq C e^{y|\pi-x+2h|/h-y/2}.$$

Эти две формулы и (3.27) доказывают (3.1) для $\pi + h + \epsilon \leq x \leq \pi + 2h + \epsilon$. А, значит, (3.1) справедливо для любого $x \geq \pi + \epsilon$.

Если коэффициент b равен нулю, то вместо леммы 3.7 мы воспользуемся леммой:

Лемма 3.8. Пусть α, β и δ — три константы. Если некоторое решение (1.13) удовлетворяет оценке

$$|f(z)| \leq C e^{-\delta y} e^{(x-\pi)y/h-y/2+o(1)}, \quad \delta > 0, \quad (3.28)$$

в области $y \geq 0, \alpha \leq x \leq \beta$, и если $\beta - \alpha > 2h$, то f удовлетворяет оценке того же вида и в области $\alpha \leq x \leq \beta + h$ (с новой константой C).

Доказательство. Пусть $\alpha \leq x - h < x \leq \beta$. Из оценки (3.28) и уравнения (1.13) следует, что

$$\begin{aligned} |f(z+h)| &\leq |f(z)| e^y + |f(z)|(2|E| + e^{-y}) + |f(z-h)| \\ &\leq C e^{(x+h-\pi)y/h-y/2-\delta y} (1 + e^{-y} + e^{-2y}), \end{aligned}$$

откуда вытекает лемма. •

Достаточно доказать теперь, что для некоторого положительного $\epsilon, 0 < \epsilon < h/2$,

$$|\psi(z)| \leq C e^{-2\epsilon y/h} e^{(x-\pi)y/h-y/2} \quad (3.29)$$

при $x \geq \epsilon + \pi, y \geq 0$. Лемма 3.5 и асимптотические представления для ψ_0 и ϕ_0 показывают, что

$$\begin{aligned} |\psi(x)| &\leq C (e^{-2\epsilon y/h} e^{|x-\pi|y/h-y/2} + e^{(\pi-x)y/h-y/2}), \\ |x-\pi| &\leq h + \epsilon, \quad y \geq 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Это обосновывает (3.29) для $\pi + \epsilon \leq x \leq \pi + h + \epsilon$. Пусть $\pi + h + \epsilon \leq x \leq \pi + 2h + \epsilon$. При помощи уравнения Харпера и (3.30) получаем

$$\begin{aligned} |\psi(x)| &\leq C e^y |\psi(x-h)| + |\psi(x-2h)| \\ &\leq C e^{-2\epsilon y/h} e^{(x-\pi)y/h-y/2} (1 + e^{-2y(x-\pi-h-\epsilon)/h}), \end{aligned}$$

что доказывает (3.29) для $\pi + \epsilon \leq x \leq \pi + \epsilon + 2h$. Применяя лемму 3.8 конечное число раз, мы завершаем доказательство для любого $x \geq \pi + \epsilon$.

Мы проверили (3.1) для $x \geq \pi$. Так же обрабатывается случай, где $x \leq \pi$.

3. Чтобы закончить этот раздел, мы должны убедиться, что ψ имеет асимптотическое представление (3.2) при $y \rightarrow -\infty$. Схема доказательства в существенном остается таким же, как и в случае, где $y \rightarrow +\infty$. Ее реализация требует, однако, некоторой перестройки интегрального уравнения. В случае $y \rightarrow +\infty$ мы представляли $\psi(z)$ в окрестности линии $\operatorname{Re} z = \pi$ в виде комбинации решений ψ_0 и ϕ_0 . Это было эффективным, поскольку вдоль линии $\operatorname{Re} z = \pi$ все три функции

имеют одинаковый порядок. Вдоль мнимой оси решение ϕ_0 отличается от ψ_0 экспоненциально большим множителем $e^{2\pi|y|/h}$,

$$|\psi_0(iy)| \leq C e^{-\pi|y|/h - |y|/2}, \quad y \leq 0,$$

и

$$|\phi_0(iy)| = |b_0| e^{\pi|y|/h - |y|/2 + o(1)}, \quad y \rightarrow -\infty,$$

а ψ , по построению, имеет тот же порядок, что и ψ_0 . Поэтому мы перепишем уравнение для ψ в терминах решений $\psi_0(z)$ и $\tilde{\phi}_0(z) = e^{-2\pi iz/h} \phi_0(z)$. Используя соотношение

$$(\operatorname{ctg} s + i) e^{-2is} = \operatorname{ctg} s - i,$$

мы преобразуем (3.14) к виду:

$$\psi(z) = \psi_0(z) \left(1 + \frac{E}{h} \int_{\gamma} \phi_0(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta \right) + E \int_{\gamma} \tilde{K}(z, \zeta) \psi(\zeta) d\zeta,$$

где

$$\tilde{K}(z, \zeta) = \frac{1}{2ih} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - z)}{h} - i \right] (\psi_0(z) \phi_0(\zeta) - \tilde{\phi}_0(z) e^{+2\pi i \zeta} \psi_0(\zeta)).$$

Теперь вместо (3.18) получается, что

$$\psi(z) = (1 + C_1(z)) \psi_0(z) + (D + D_1(z)) \tilde{\phi}_0(z), \quad -3h/2 + \epsilon \leq x \leq \pi + 3h/2 - \epsilon \quad (3.31)$$

при $y \rightarrow -\infty$, где

$$D = -\frac{E}{h} \int_{\gamma} e^{+2\pi i \zeta} \psi_0(\zeta) d\zeta,$$

а C_1 и D_1 удовлетворяют оценкам вида (3.19). Используя асимптотики для ψ_0 и ϕ_0 , получаем отсюда, что

$$c = c_0, \quad d = d_0 - b_0 \frac{E}{h} \int_{\gamma} e^{2\pi i \zeta/h} \phi_0(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta, \quad (3.32)$$

где b_0 , c_0 и d_0 — те же, что и в (2.2)–(2.3). Все обоснования проводятся параллельно случаю $y \rightarrow +\infty$.

3.4. Собственные функции и собственные значения оператора \mathcal{K} . В этом разделе мы исследуем уравнение

$$\psi = E\mathcal{K}\psi, \quad \psi \in L_2(\gamma, \rho). \quad (3.33)$$

Мы изучаем свойства его собственных значений (значений E , для которых оно имеет нетривиальные решения) и его собственных функций. Следующее утверждение описывает их подробнее, чем теорема 3.1.

Предложение 3.9. Пусть ψ — решение (3.33). Тогда

- (i) ψ является целым решением уравнения Харпера;
- (ii) ψ удовлетворяет оценке

$$|\psi(\pi + iy)| \leq C e^{|\operatorname{Re} \pi - |\operatorname{Im} \pi||y|/2} \begin{cases} 1, & y \geq 0, \\ e^{-2\pi|y|/h}, & y \leq 0; \end{cases} \quad (3.34)$$

(iii) функция $f(y) = e^{-\pi y/h} \psi(\pi + iy)$, $y \in \mathbb{R}$, является собственной функцией самосопряженного оператора $H_0 = \operatorname{ch}\left(\frac{h}{i} \frac{d}{dy}\right) + \operatorname{ch} y$, заданного на естественной области определения в $L_2(\mathbb{R})$.

Множество τ собственных значений уравнения (3.33) имеет следующие свойства:

- (iv) τ состоит из изолированных собственных значений, $-t_n$, $n \in \mathbb{N}$, которые могут накапливаться лишь на бесконечности;
- (v) собственные значения $-t_n$ расположены слева от $E = -2$, $t_n > 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- (vi) точки t_n , $n \in \mathbb{N}$, принадлежат точечному спектру оператора H_0 .

Можно показать, что собственные значения $-t_n$ просты, действительно накапливаются к $-\infty$ и, более того, что множество собственных значений совпадает со спектром оператора H_0 , но мы не будем здесь этого обсуждать.

Доказательство. Анализ уравнения (3.33) частично совпадает с анализом неоднородного уравнения (3.13). Используя рассуждения раздела 3.2, можно показать, что если ψ удовлетворяет (3.33), то оно может быть аналитически продолжено на всю комплексную плоскость, и что после этого продолжения оно удовлетворяет уравнению Харпера (1.13).

Буквально повторяя построения раздела 3.3, можно убедиться, что ψ имеет асимптотическое представление вида (3.1)–(3.2) с новыми коэффициентами

$$b = b_0 \frac{E}{h} \int_{\gamma} \phi_0(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta, \quad a = \frac{a_0}{b_0} b - c_0 \frac{E}{h} \int_{\gamma} \psi_0(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta,$$

$$c = 0, \quad d = -b_0 \frac{E}{h} \int_{\gamma} e^{2\pi i \zeta / h} \phi_0(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta.$$

Отсутствие свободного члена в (3.33) ничего не меняет в обоснованиях. Отсюда вытекает (3.34) для $y \geq 0$.

Так же как в разделе 3.3, равенство $b = 0$ приводило к (3.29), равенство $c = 0$ приводит к оценке

$$|\psi(z)| \leq C e^{-2\epsilon|y|/h} e^{(x-\pi)|y|/h - |y|/2}, \quad x \geq \epsilon, \quad y \leq 0. \quad (3.35)$$

с положительной постоянной ϵ , $\epsilon < h/2$. Цель ближайших рассмотрений состоит в том, чтобы показать, что она может существенно усилена.

Лемма 3.10. Пусть ψ удовлетворяет (3.33). Тогда

$$|\psi(z)| \leq C e^{-|y|/2} e^{-2\pi|y|/h}, \quad z = \pi + iy, \quad y \leq 0.$$

Доказательство. Оценка (3.35) позволяет переписать уравнение (3.33) в виде

$$\psi(z) = E \int_{\pi + i\mathbb{R}} K(z, \zeta) \psi(\zeta) d\zeta, \quad z \in \pi + i\mathbb{R}. \quad (3.36)$$

Предположим, что уже доказано неравенство

$$|\psi(z)| \leq C e^{-|y|/2} e^{-\alpha|y|/h}, \quad z = \pi + iy, \quad y \leq 0, \quad (3.37)$$

где α — некоторое положительное число. Оценим правую часть в (3.36) при

$y \leq -1$. Используя (3.34) для $y \geq 0$, (3.37) и оценки для ψ_0 и ϕ_0 , получаем

$$\begin{aligned}
 & |\psi(\pi + iy)| \\
 & \leq C \int_{-\infty}^{y-1} |\psi(\pi + i\eta)| (|\psi_0(\pi + iy)\phi_0(\pi + i\eta)| + |\psi_0(\pi + i\eta)\phi_0(\pi + iy)|) d\eta \\
 & \quad + C \int_{y-1}^{y+1} |\psi(\pi + i\eta)| \left| \frac{\psi_0(\pi + iy)\phi_0(\pi + i\eta) - \psi_0(\pi + i\eta)\phi_0(\pi + iy)}{y - \eta} \right| d\eta \\
 & \quad + C \int_{y+1}^{\infty} e^{-2\pi(\eta-y)/h} |\psi(\pi + i\eta)| \\
 & \quad \quad \times (|\psi_0(\pi + iy)\phi_0(\pi + i\eta)| + |\psi_0(\pi + i\eta)\phi_0(\pi + iy)|) d\eta \\
 & \leq C e^{-|y|/2} \int_{-\infty}^{y-1} e^{-(\alpha+1)|\eta|} d\eta + C(1+|y|) e^{-|y|} \int_{y-1}^{y+1} e^{-(\alpha+1/2)|\eta|} d\eta \\
 & \quad + C e^{-|y|/2} \int_{y+1}^0 e^{-2\pi(\eta-y)/h} e^{-(\alpha+1)|\eta|} d\eta \\
 & \quad + C e^{-|y|/2} \int_0^{\infty} e^{-2\pi(\eta-y)/h} e^{-\eta} d\eta \\
 & \leq C e^{-|y|/2} \begin{cases} (1+|y|) e^{-(\alpha+1)|y|}, & \alpha+1 \leq 2\pi/h, \\ e^{-2\pi|y|/h}, & \alpha+1 > 2\pi/h. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Пусть Δ — фиксированное число, $0 < \Delta < 1$. Поскольку $(1+|y|)e^{-(\alpha+1)|y|} \leq C(\Delta)e^{-(\alpha+\Delta)|y|}$, то на самом деле (3.37) заменяется на

$$|\psi(\pi + iy)| \leq C e^{-|y|/2} \begin{cases} e^{-(\alpha+\Delta)|y|/h}, & \alpha+1 \leq 2\pi/h, \\ e^{-2\pi|y|/h}, & \alpha+1 > 2\pi/h. \end{cases}$$

Повторяя описанные рассуждения конечное число раз, мы доказываем лемму. •

Используя эту лемму, с помощью техники раздела 3.3 можно установить, что из (3.36) вытекает оценка

$$|\psi(z)| \leq C e^{-2\pi|y|/h} e^{|x-\pi||y|-|y|/2}, \quad y < 0.$$

Это доказывает пункт (ii) предложения.

Проверим утверждение (iii) предложения. Рассмотрим функцию

$$f(z) = e^{i\pi z/h} \psi(\pi + iz).$$

Она является целой по z и удовлетворяет оценке

$$|f(z)| \leq C e^{|xy|/h - \pi|x|/h - |x|/2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Обозначим h -преобразование Фурье f через \widehat{f} . Выражение

$$a(f) = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{ch} p |\widehat{f}(p)|^2 dp + \int_{\mathbb{R}} \operatorname{ch} x |f(x)|^2 dx \quad (3.38)$$

конечно, и поэтому f принадлежит области определения H_0 . Так как f удовлетворяет уравнению

$$\frac{f(z+ih) + f(z-ih)}{2} + \operatorname{ch} z f(z) = -E f(z), \quad (3.39)$$

она является собственной функцией H_0 .

Утверждение (iv) предложения следует из компактности оператора \mathcal{K} , а последние два утверждения следуют из (iii). Отметим также, что (v) может быть проверено прямой выкладкой:

$$-E \|f\|_{L_2(\mathbb{R})} = a(f) \geq 2 \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}. \quad \bullet$$

§4. Базис решений уравнения Харпера

В терминах решения ψ , построенного в предыдущих разделах, определим решения ψ_1 и ψ_2 уравнения Харпера формулами $\psi_1(z) = \psi(z)$, $\psi_2(z) = \psi(2\pi - z)$.

Повторяя рассуждения из доказательства леммы 2.2, убеждаемся, что

$$\{\psi_1(z), \psi_2(z)\} = b(E) c(E), \quad (4.1)$$

где b и c — коэффициенты из асимптотических представлений (3.1) и (3.2).

Обозначим через σ множество значений E , для которых вронскиан ψ_1 и ψ_2 равняется нулю. Вне σ ψ_1 и ψ_2 образуют фундаментальный базис во множестве решений уравнения Харпера.

В этом разделе мы докажем

Предложение 4.1. Множество σ имеет следующие свойства:

(i) оно состоит из изолированных точек $-s_n$, $n = 1, 2, \dots$, которые могут накапливаться лишь на ∞ ;

(ii) точки σ имеют отрицательные мнимые части, $\text{Im } s_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$;

(iii) в точках σ $\psi_1 = \pm\psi_2$;

(iv) множество σ содержится в спектре резонансов оператора H_π с граничными условиями (1.31).

Можно показать, что точки $-s_n$, $n = 1, 2, \dots$, являются чисто мнимыми, что они накапливаются на $-i\infty$ и что в действительности множество σ совпадает со спектром резонансов оператора H_π с упомянутыми граничными условиями, причем этот спектр является простым. Однако мы не доказываем этого здесь.

Доказательство. Поскольку коэффициенты b и c мероморфны по E (аналитичны вне τ), то вронскиан ψ_1 и ψ_2 имеет счетное множество нулей $-s_n$, $n \in \mathbb{N}$, которые могут накапливаться лишь на бесконечности. Отсюда вытекает (i).

Утверждение (iii) с легкостью следует из более общего результата. Рассмотрим функции

$$\psi_3(z) = \overline{\psi(\bar{z}, \bar{E})}, \quad \psi_4(z) = \overline{\psi(2\pi - \bar{z}, \bar{E})}. \quad (4.2)$$

Обе они являются целыми решениями уравнения Харпера.

Предложение 4.2. Если $E \notin \tau$, то

$$\begin{pmatrix} \psi_2(z) \\ \psi_3(z) \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} \psi_4(z) \\ \psi_1(z) \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

где J — матрица, не зависящая от z и имеющая вид

$$J = \begin{pmatrix} \alpha(E) & \beta(E) \\ -\beta(E) & \alpha(\bar{E}) \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\alpha(E) \overline{\alpha(\bar{E})} + \beta^2(E) \equiv 1, \quad (4.5)$$

$$\overline{\beta(\bar{E})} = -\beta(E). \quad (4.6)$$

В существенном доказательство этого предложения аналогично доказательству леммы 5.5 из [BF2].

Используя асимптотики ψ , можно получить

$$\alpha = b(E)/c_0, \quad \beta(E) = -a(E)/c_0,$$

$$\{\psi_4(z), \psi_1(z)\} = \{\psi_2(z), \psi_3(z)\} = -|c_0|^2, \quad (4.7)$$

где b , a и c_0 — коэффициенты из (3.1)–(3.2).

Если $E \in \sigma$, то решения ψ_1 и ψ_2 линейно независимы над кольцом h -периодических функций. Ввиду предложения 4.2 и формулы (4.7), это возможно лишь при $\alpha(E) = 0$. Но, согласно (4.5), последнее означает, что $\beta^2(E) = 1$. Теперь соотношение (4.3) доказывает (iii).

Из утверждения (iii) и асимптотического представления (3.2) для ψ вытекает, что точки σ являются резонансами оператора H_π с граничными условиями (1.31): для $E \in \sigma$ можно построить резонансную собственную функцию H_π по формуле $f(y) = \psi(\pi + iy)$. Она удовлетворяет уравнению $H_\pi f = E f$ и граничным условиям (1.31).

Докажем утверждение (ii). Пусть $\phi(z) = \overline{\psi(2\pi - \bar{z})}$, и $y > 0$. Ввиду уравнения Харпера

$$\begin{aligned} & \int_{\pi-iy}^{\pi+iy} \frac{\psi(\zeta+h) - 2\psi(\zeta) + \psi(\zeta-h)}{2} \phi(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{\pi-iy}^{\pi+iy} (E - 1 - \cos \zeta) |\psi(\zeta)|^2 d\zeta. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} 2i \operatorname{Im} E \int_{\pi-iy}^{\pi+iy} |\psi(\zeta)|^2 d\zeta &= \operatorname{Re} \int_{\pi-iy}^{\pi+iy} (\psi(\zeta+h) - 2\psi(\zeta) + \psi(\zeta-h)) \phi(\zeta) d\zeta \\ &= \operatorname{Re} G - \operatorname{Re} \int_{\pi-iy-h}^{\pi-iy} (\psi(\zeta+h) - \psi(\zeta)) \phi(\zeta+h) d\zeta \\ &\quad - \operatorname{Re} \int_{\pi+iy}^{\pi+iy-h} (\psi(\zeta+h) - \psi(\zeta)) \phi(\zeta+h) d\zeta, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где

$$G = - \int_{\pi-iy}^{\pi+iy} (\psi(\zeta+h) - \psi(\zeta)) (\phi(\zeta+h) - \phi(\zeta)) d\zeta.$$

Пусть $E \in \sigma$. Проверим, что $\operatorname{Re} G = 0$. Поскольку на линии $\operatorname{Re} \zeta = \pi$, $2\pi - \bar{\zeta} = \zeta$, то

$$G = - \int_{\pi - iy}^{\pi + iy} (\psi(\zeta + h) - \psi(\zeta)) \overline{(\psi(\zeta - h) - \psi(\zeta))} d\zeta.$$

Теперь при помощи замены переменных $\zeta' = 2\pi - \zeta$ и (iii), легко видеть, что $\bar{G} = -G$, и $\operatorname{Re} G = 0$.

Учитывая это, устремим в (4.8) $y \rightarrow +\infty$. Используя асимптотику ψ , получаем

$$2 \operatorname{Im} E \int_{\pi - i\infty}^{\pi + i\infty} |\psi(\zeta)|^2 d\zeta = -|c_0|^2.$$

Это завершает доказательство. •

Список литературы

- [BF1] Buslaev V., Fedotov A., *Complex WKB method for Harper's equation*, Report no. 11, Inst. Mittag-Leffler, Djursholm, 1992/93.
- [BF2] Buslaev V., Fedotov A., *The functional structure of a monodromy matrix for Harper's equation*, *Mathematical Results in Quantum Mechanics* (Blossin (Germany), 1993), *Oper. Theory Adv. Appl.*, 70, Birkhäuser, Basel, 1994, pp. 321–342.
- [BF3] Buslaev V., Fedotov A., *On a class of matrices related to Harper's equation*, Report no. 19, Inst. Mittag-Leffler, Djursholm, 1992/93.
- [BF4] Буслаев В. С., Федотов А. А., *Комплексный метод ВКБ для уравнения Харпера. I*, *Алгебра и анализ* 6 (1994), № 3, 59–83.
- [BF5] Buslaev V., Fedotov A., *Monodromization and Harper's equation*, *Equations aux Dérivées Partielles, Séminaire 1993–1994*, Ecole Polytech., Centre Math., Paris, 1994, pp. XXI-1–XXI-21.
- [BF6] Буслаев В. С., Федотов А. А., *Блоховские решения разностных уравнений*, *Алгебра и анализ* 7 (1995), № 4, 74–122.

С.-Петербургский
государственный университет
Отдел математической физики
198904, Санкт-Петербург, Петродворец
Ульяновская ул., 1

Поступило 13 сентября 1995 г.

E-mail: buslaev@snoopy.niif.spb.su fedotov@snoopy.niif.spb.su