



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. И. Плотников, Существование пространственных волн на поверхности идеальной жидкости, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1979, том 84, 211–219

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.171

23 марта 2025 г., 14:25:59



СУЩЕСТВОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВОЛН  
НА ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

I. Задача о пространственных волнах конечной амплитуды на поверхности слоя идеальной несжимаемой жидкости формулируется следующим образом [1], [2]. Для всех значений параметра  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$  требуется найти в пространстве точек  $x = (x_1, x_2, x_3)$  поверхность  $S$  с графиком

$$x_3 = \varepsilon \cos k_1 x_1 \cos k_2 x_2 + \eta(\varepsilon, x_1, x_2) \equiv Z(\varepsilon, x_1, x_2)$$

и функцию  $\varphi(\varepsilon, x)$ , гармоническую по  $x$  в слое  $\mathcal{D} = \{-h < x_3 < Z\}$ , так чтобы выполнялись соотношения:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad |\nabla \varphi|^2 + 2\lambda x_3 = p \quad \text{на } S,$$

$$\varphi_{x_3} = 0 \quad \text{при } x_3 = -h \quad (1)$$

$$\|\eta\|_{C_3(R^2)} \leq \text{const} \cdot \varepsilon^2, \quad (2)$$

а функции  $\eta, x_1 - \varphi(\varepsilon, x)$  были бы  $2\pi$ -периодическими по переменным  $x_1, x_2$ . Здесь  $k = (k_1, k_2)$  - волновой вектор с целочисленными компонентами,  $n$  - нормаль к  $S$ ,  $\lambda, p$  - неизвестные постоянные.

В настоящее время отсутствуют какие-либо точные результаты, относящиеся к задаче о трехмерных волнах. Ряд приближенных решений задачи (1)-(2) построен в [1], [3].

Пусть  $\Lambda$  - множество пар положительных чисел  $(\lambda_0, h)$  обладающих следующими свойствами:  $\lambda_0$  - рационально, в решетке целочисленных векторов дисперсионное уравнение

$$k_1^2 - \lambda_0 |k| \operatorname{th}(h|k|) = 0 \quad (3)$$

имеет единственное решение  $k$  с целыми  $k_i > 0$ . (Множество  $\Lambda$  не пусто оно содержит, например, пару  $\lambda_0 = 1/2, h = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln(2 + \sqrt{5})$ ), соответствующий волновой вектор  $k = (1, 2)$ ). Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение о разрешимости задачи (1)-(2):

ТЕОРЕМА I. Пусть  $(\lambda_0, h) \in \Lambda$ , волновой вектор  $k$  является решением (3), целое число  $n \geq 3$ . Тогда существуют положительные постоянные  $\varepsilon_0, c_0$  такие, что при  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$  задача (I)-(2) имеет по крайней мере одно решение, для которого справедлива оценка

$$\|\eta\|_{C_x(\mathbb{R}^2)} + |\lambda - \lambda_0| + |1 - p| \leq c_0 \varepsilon^2.$$

Главным препятствием на пути к доказательству теоремы I является то, что в пространстве периодических функций линейная задача теории волн [I],

$$u_{x_1 x_1} + \lambda u_{x_3} = 0 \quad \text{при } x_3 = 0, \quad u_{x_3} = 0 \quad \text{при } x_3 = -h \quad (4)$$

для гармонической функции  $u$  - линейризация задачи (I) на тривиальном решении  $\eta = 0, \varphi = x_1$  обладает непрерывным спектром. Существует, [4], всюду плотное на положительной полуоси множество значений параметра  $\lambda$ , для которых (4) имеет нетривиальное ядро. Решение задачи (I) с помощью разложений в ряды по степеням  $\varepsilon$  приводит к появлению малых знаменателей, что ставит под сомнение сходимость этих рядов. Доказательство теоремы I проводится с помощью метода ускоренной сходимости и опирается на теорему Нэша-Мозера, [5].

2. Сведение задачи со свободной границей к операторному уравнению. Для решения уравнений (I) удобно преобразовать их к новым переменным, [2], "распрямив линии тока", (аналогичный подход был применен в [I]). С этой целью введем в рассмотрение функции  $\xi_i(x)$  связанные с потенциалом соотношениями

$$\xi_1 = \varphi, \quad \sigma^{-1} \nabla \xi_1 - \nabla \xi_2 \times \nabla \xi_3 = 0 \quad \text{в } D,$$

$$\xi_3 = 0 \quad \text{на } S, \quad \xi_3 = -h \quad \text{при } x_3 = -h,$$

где  $\sigma$  - искомая постоянная. Выбор  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  в качестве независимого переменного приводит к следующей краевой задаче для вектор-функции  $x(\xi)$  в слое  $\Omega$ , ограниченном плоскостями  $\Gamma_1: \xi_3 = 0, \Gamma_2: \xi_3 = -h$ ,

$$L_0(\sigma, x) \equiv \sigma x_{\xi_1} - x_{\xi_2} \times x_{\xi_3} = 0 \quad \text{в } \Omega,$$

$$L_1(\rho, \lambda, x) \equiv |x_{\xi_1}|^{-2} + 2\lambda x_3 - \rho = 0 \quad \text{на } \Gamma_1, \quad (5)$$

$$x_3 = -h \quad \text{на } \Gamma_2.$$

Для того, чтобы обеспечить устойчивость решений линеаризованных уравнений, [4], добавим к (5) скалярное соотношение, определяющее параметр  $\lambda$  :

$$\Phi(\lambda, x) \equiv \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} (Q d\xi_1)^2 d\xi_2 \right\}^{-1} = \lambda_0. \quad (6)$$

Здесь  $Q(\xi_1, \xi_2)$  - периодическая функция, определенная равенствами

$$(\det A)^{-1/4} a^{1/2} \Big|_{\Gamma_1} = Q, \quad \frac{|x_{\xi_1}|^2}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_3} L_1(\rho, \lambda, x) \Big|_{\Gamma_1} = a, \quad (7)$$

в которых  $A$  симметричная матрица с элементами

$$A_{ii} = 1, \quad A_{ii} = 0, \quad A_{ij} = |x_{\xi_1}|^{-2} (x_{\xi_i}, x_{\xi_j}), \quad i, j = 2, 3.$$

Уравнения (5)-(6) образуют краевую задачу для  $x(\xi)$  и параметров  $\sigma, \rho, \lambda$ , которая ляжет в основу дальнейших рассмотрений. Согласно [1], [3] эта задача имеет приближенное решение

$$x = x_0(\varepsilon, \xi) + \varepsilon^2 x_1(\xi), \quad \lambda = \lambda_0 + \varepsilon^2 \lambda_1, \quad \sigma = 1 + \varepsilon^2 \sigma_1, \quad \rho = 1 + \varepsilon^2 \rho_1,$$

удовлетворяющее (5)-(6) с точностью до порядка  $O(\varepsilon^3)$ . Вектор-функция  $x_0$  задается формулами

$$x_0 = \xi + \varepsilon T_1 \nabla F(\xi), \quad F(\xi) = \cos k_1 \xi_1 \cos k_2 \xi_2 \operatorname{ch}(|k|(h + \xi_3)),$$

$$T_i = \operatorname{diag} \{ (-1)^i, (-1)^{i-1}, 1 \},$$

компоненты вектор-функции  $x_1$  являются тригонометрическими полиномами от  $\xi_1, \xi_2$  с коэффициентами, аналитически зависящими от  $\xi_3$ .

Из формул замены переменных непосредственно вытекает, что каждое решение (5)-(6) с  $2\pi$ -периодической по  $\xi_1, \xi_2$  вектор-функцией  $x - x_0$ , удовлетворяющей неравенству

$\|x-x_0\|_{C_2(\Omega)} \leq C \cdot \varepsilon^2$  дает решение задачи (I)-(2) со свободной поверхностью, заданной в параметрической форме уравнением  $x = x(\xi_1, \xi_2, 0)$ . Будем искать точное решение (5)-(6) в виде

$$x = x_0 + u, \quad \sigma = 1 + \alpha_1, \quad \lambda = \lambda_0 + \alpha_2, \quad \rho = 1 + 2\lambda_0(\omega, \alpha), \quad (8)$$

где  $\alpha_i, i=1, \dots, 2$  компоненты нового искомого вектора  $\alpha$ , постоянный вектор  $\omega = (0, -(2\lambda_0 |k|)^{-1} \operatorname{sh} 2|k|h, |k|^{-2} \operatorname{ch} |k|h)$ .

Обозначим через  $C^\pm$  линейные пространства непрерывных,  $2\pi$ -периодических по  $\xi_1, \xi_2$  отображений  $u^\pm : \Omega \rightarrow R^3$ , удовлетворяющих условиям симметрии

$$u^\pm(T_i \xi) = (\pm 1)^i T_i u^\pm(\xi), \quad i=1, 2.$$

Пусть  $E_\pi$  - банахово пространство векторов  $z = (u, \alpha) \in C^+ \times R^3$  с компонентами  $u_3 = 0$  на  $\Gamma_2$ , обладающих конечной нормой

$$\|z\|_\pi = \sum_{i=1}^3 \|u_i\|_{C_\pi(\Omega)} + |\alpha|.$$

через  $F_p$  обозначим банахово пространство векторов  $g = (g_0, g_1, x) \in C^- \times C_p(\Gamma_1) \times R^1$  с четной  $2\pi$ -периодической функцией  $g_1$ , обладающих конечной нормой

$$\|g\|_p = \sum_{i=1}^3 \|g_{0,i}\|_{C_p(\Omega)} + \|g_1\|_{C_p(\Gamma_1)} + |x|.$$

Введем в рассмотрение отображение  $f(\varepsilon, z)$ , которое каждому элементу  $z = (u, \alpha)$  ставит в соответствие, с учетом формул (8), вектор  $\{L_0(\sigma, x), L_1(\rho, \lambda, x), \varepsilon \Phi(\lambda, x) - \varepsilon \lambda_0\}$ . Тогда задача (5)-(6) в пространстве  $E_\pi$  может быть записана в виде одного равносильного ей операторного уравнения

$$f(\varepsilon, z) = 0. \quad (9)$$

Из известных, [6], оценок суперпозиций гладких функций вытекает, что при  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1(\nu)$  оператор  $f : E_\pi \rightarrow F_{\nu-1}$ ,  $\nu > 3$ , трижды непрерывно дифференцируем в шаре  $B : \|z\|_\pi < 1/2$ . Согласно [7] для доказательства разрешимости уравнения (9) достаточно установить, что  $f$  удовлетворяет следующему условию: существуют числа  $\nu_0 > t$ ,  $\tau_0 > 0$  такие, что для всех  $\nu > \nu_0$ ,  $\tau \leq \nu - t$ ,

$\tau > \tau_0$  в области  $B \times [0, \varepsilon_1)$  определен линейный оператор  $M(\varepsilon, z): E_{\tau} \rightarrow F_{\tau}$ , удовлетворяющий неравенствам

$$|M(\varepsilon, z)y|_{\tau} \leq c \|y\|_{\tau}, \quad (10)$$

$$|M(\varepsilon, z)y - f'(\varepsilon, z)y|_{\tau} \leq c |f(\varepsilon, z)|_{\tau} \|y\|_{\tau}.$$

Если  $z \in E_{\tau+l}$ ,  $l > 0$ , лежит в шаре  $\|z\|_{\tau} \leq \varepsilon^{\tau}$ ,  $0 < \varepsilon < \delta(\tau, l)$ , то линейное уравнение  $M(\varepsilon, z)y = g$  с произвольной правой частью  $g \in F_{\tau+l}$  имеет решение, для которого справедливы оценки

$$\|y\|_{\tau-\tau+l} \leq c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} |g|_{\tau} + |g|_{\tau+l} + \|z\|_{\tau+l}\right) P(\|y\|_{\tau-\tau}), \quad (11)$$

$$\|y\|_{\tau-\tau} \leq \frac{c}{\varepsilon} |g|_{\tau}.$$

Здесь  $\tau \in (1, 2)$  - фиксированное число, постоянные  $c$  не зависят от выбора  $\varepsilon$  и элементов  $g, z, P \in C_{loc}(R^1)$ .

Тогда, [7], найдется  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что при  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$  уравнение (9) имеет по крайней мере одно решение, для которого справедлива оценка  $\|z\|_{\tau} \leq c \cdot \varepsilon^2$ .

3. Таким образом, для доказательства теоремы I достаточно построить оператор  $M$ , удовлетворяющий условиям (10)-(11). С этой целью для  $z \in B$ ,  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$  определим линейное отображение  $M_0(\varepsilon, z): E_{\tau-2} \rightarrow F_{\tau-3}$ , которое каждому элементу

$y = (\omega, \beta)$  ставит в соответствие вектор  $\{N_0 y, N_1 y, \beta_2\}$ . Линейные дифференциальные операторы  $N_j$  задаются равенствами

$$q_0 N_0 y = A^{-1} \nabla v_1 - e_2 \chi \nabla v_3 + e_3 \chi \nabla v_2 + \sigma^{-1} \beta_1 e_1,$$

$$q_1 N_1 y = -\frac{1}{a_1} v_{1, \xi_1} + v_3 + \varepsilon \beta_3 q_2 - (\omega, \beta),$$

где

$$v = \gamma^{-1} \omega, \quad a_0 = \frac{\lambda_0}{\Phi(x, \lambda)} a, \quad q_0 = \sigma^{-1} \gamma^{-1},$$

$$q_1 = |x_{\xi_1}|^2 a^{-1}, \quad q_2 = \cos k_1 \xi_1 \cdot \cos k_2 \xi_2, \quad (12)$$

$J$  - матрица Якоби отображения  $x(\xi)$ ,  $e_i$  - векторы ортонормированного базиса в  $R^3$ , матрица  $A$ , коэффициент  $\alpha$  и вектор-функция  $x(\xi)$  выражаются через  $z$  по формулам (7)-(8). Следующее утверждение показывает, что с точностью до несущественных малых слагаемых оператор  $M_0$  совпадает с производной  $f'(\varepsilon, z)$ :

ЛЕММА I. Пусть произвольное число  $\gamma \in (1, 2)$  целые числа  $\nu \gg 5$ ,  $\ell > 0$ . Тогда для всех  $z \in E_{\nu+\ell}$ , лежащих в шаре  $\|z\|_\nu \leq \varepsilon^\gamma$ , при  $0 \leq \varepsilon < \delta(\nu, \ell)$  определен конечномерный линейный оператор  $\psi(\varepsilon, z)$  такой, что

$$|\psi(\varepsilon, z)y|_{\nu-2} \leq \varepsilon^\gamma c \|y\|_2, \quad |\psi(\varepsilon, z)y|_{\nu+\ell-3} \leq c(1+\|z\|_{\nu+\ell})\|y\|_2$$

$$|f'(\varepsilon, z)y - M_0(\varepsilon, z)y - \psi(\varepsilon, z)y|_{\nu-5} \leq c|f(\varepsilon, z)|_\nu \|y\|_\nu.$$

Доказательство леммы состоит в непосредственном вычислении  $f'(\varepsilon, z)$  и опирается на оценки суперпозиций гладких функций работы [6]. Чтобы проверить, что отображение  $M = M_0 + \psi$  удовлетворяет условиям (I0)-(II) рассмотрим уравнение

$$M_0(\varepsilon, z)y = q, \quad q = (q_0, q_1, \alpha) \in F_p. \quad (I3)$$

Замечательным свойством переменных является то, что (I3) можно свести к краевой задаче для функции  $v_1$ , заданной соотношениями (I2) и параметра  $\beta_3$  - близкой к линейной задаче теории волн (4):

$$\operatorname{div}(A^{-1} \nabla v_1 - G_0) = 0 \quad \text{в } \Omega;$$

$$\left(\frac{1}{\alpha_0} v_{1, \xi_1}\right)_{\xi_1} + (A^{-1} \nabla v_1 - G_0, e_3) = (\varepsilon \beta_3 q_2 - G_1)_{\xi_1} \quad \text{на } \Gamma_1, \quad (I4)$$

$$(A^{-1} \nabla v_1 - G_0, e_3) = 0 \quad \text{на } \Gamma_2,$$

где  $G_i = q_i q_i$ . После решения (I4) остальные компоненты вектор-функций  $v$  восстанавливаются по  $v_1$  квадратурами из соотношений

$$v_{i, \xi_1} = -(A^{-1} \nabla v_1 - G_0, e_i), \quad i = 2, 3. \quad (I5)$$

правые части которых нечетны по  $\xi_1$ , в силу выбора шкалы пространств  $E_n$ . Производ, возникающий при интегрировании, устраняется с помощью условий

$$\int_{-\pi}^{\pi} v_2 d\xi_1 = \int_0^{\xi_2} P_1(\xi_2) d\xi_2, \quad \int_{-\pi}^{\pi} v_3 d\xi_1 = \int_{-h}^{\xi_3} (P_0 - P_1) d\xi_3, \quad (I6)$$

где

$$\frac{1}{h} \int_{-h}^0 P_0 d\xi_3 - \frac{1}{h} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{a_0} v_{1,\xi_1} + (\omega, \beta) + G_1 \right) d\xi_1 \right) \Big|_{\Gamma_1} = P_1,$$

$$\frac{2\pi\beta_1}{\sigma} - \int_{-\pi}^{\pi} G_{0,1} d\xi_1 = P_0.$$

В силу (I3) постоянная  $\beta_2 = \alpha$ ,  $\beta_1$  однозначно находится из (I6) и условий периодичности  $v_i$ . Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что если элемент  $(v, \beta) \in E_3$  удовлетворяет (I4) - (I6), то  $y = (v, \beta)$  является решением уравнения (I3).

Из результатов работы [4], условия (6) и выражения для коэффициента  $a_0$  вытекает следующее утверждение о разрешимости задачи (I4):

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть выполнены все условия леммы I и неравенства  $r > p + 25$ ,  $p \gg r + 4$ ,  $r \gg 5$ ,  $l \gg 0$ . Тогда при  $0 < \varepsilon < \delta(r, l)$ ,  $g \in \Gamma_{p+l}$  задача (I4) в классе  $2\pi$ -периодических, четных по  $\xi_2$ , нечетных по  $\xi_1$  функций имеет единственное решение  $v_1 \in C_{p-r+l+1}(\Omega)$ , удовлетворяющее условию

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_1 \sin k_1 \xi_1 \cos k_2 \xi_2 d\xi_1 d\xi_2 = 0 \quad \text{на } \Gamma_1.$$

Справедливы оценки:

$$\|v_1\|_{C_{p-r+l+1}(\Omega)} + \varepsilon |\beta_3| \leq c |g|_p,$$

$$\|v_1\|_{C_{p-r+l+1}(\Omega)} \leq c [1 + \|z\|_{r+l} + |g|_{p+l}] P(\|v_1\|_{C_{p-r}(\Omega)}).$$

Отсюда, из формул (I5), (I6) и оценок суперпозиций гладких функций



вытекает, что в условиях теоремы 2 уравнение (13) имеет решение, для которого выполнены оценки (11). Следовательно, в силу леммы I и принципа сжатых отображений, оператор  $M = M_0 + \varphi$  удовлетворяет условиям (10), (11) с показателями  $\nu_0 = 35$ ,  $t = 26$ ,  $\tau_0 = 5$ . Тем самым установлена справедливость следующего утверждения.

**ТЕОРЕМА 3.** Для любого  $\nu > 35$  существуют положительные постоянные  $\epsilon_0, c_0$  такие, что при  $\epsilon \in [0, \epsilon_0)$  задача (5)-(6) имеет по крайней мере одно решение  $x$  такое, что

$$\|x - x_0\|_{C_\nu(\Omega)} \leq c_0 \epsilon^2.$$

Поскольку при малых  $\epsilon$  отображение  $x$  является диффеоморфизмом, то утверждение теоремы I является следствием теоремы 3.

О выборе параметров. В отличие от двумерных задач теории волн, [1], в условиях теоремы I искомыми являются два параметра - давление на открытой поверхности жидкости  $p$  и число  $\lambda$  связанное со скоростью распространения волны. Давление  $p$  находится, как обычно, из уравнения разветвления. Величина  $\lambda$  определяется из соотношения (6), которое не имеет аналога в плоском случае. Оно выражает условие устойчивости линеаризованной задачи, сформулированное [4], и устанавливает связь между геометрическими характеристиками свободной поверхности  $S$  и значениями  $\lambda, p$ .

Соотношение (6) допускает следующую инвариантную формулировку:

Выделим класс параметризаций  $S: x = x(q^1, q^2)$  таких, что коэффициенты первой и второй квадратичных форм  $S$

$$a(dq) = a_{M\nu} dq^M dq^\nu, \quad b(dq) = b_{M\nu} dq^M dq^\nu$$

являются  $2\pi$ -периодическими функциями  $q^1, q^2$ . Тогда  $S$  может быть отождествлена с двумерным тором. Рассмотрим задачу о движении тяжелой материальной точки по  $S$ , описываемую гамильтоновой системой:

$$\dot{q}^\nu = -H_{p_\nu}, \quad \dot{p}_\nu = H_{q^\nu}, \quad H = \frac{1}{2} a^{M\nu} p_M p_\nu + \lambda x_3(q^1, q^2). \quad (17)$$

Условие (6) равносильно следующему: Система (17) имеет двумерный инвариантный тор  $T$ , лежащий на множестве уровня энергии  $H = \frac{p_2}{2}$  и состоящий из замкнутых траекторий  $\Gamma$ . Существуют канонические переменные  $\tilde{q}, \tilde{p}$ , в которых  $T$  задается уравнениями  $\tilde{p}_1 = 1$ ,  $\tilde{p}_2 = 0$  и выполняется равенство:

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\tilde{q}^2 \left( \oint_{\Gamma} \sqrt{\tilde{\alpha}_{22} |v_0(\tilde{q})|} dt \right)^{-2} = \frac{1}{\lambda \pi}, \quad v_0 = v(\tilde{q}) + \lambda \frac{\partial x_3}{\partial n}(\tilde{q}).$$

### Литература

1. С р е т е н с к и й Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М., "Наука", 1977.
2. Д а в р е н т ь е в М.А., Ш а б а т Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., "Наука", 1969.
3. К р ы л о в Ю.М. К теории трехмерных морских волн. - В сб.: Тр. океанографического института, 1952, вып. 21, с. 129.
4. П л о т н и к о в П.И. Корректность обобщенной линейной модели задачи, о трехмерных волнах на поверхности идеальной жидкости. - В сб.: "Динамика сплошной среды". Новосибирск, 1977, вып. 31.
5. М о з е р Ю. Новый метод построения решений нелинейных дифференциальных уравнений. - Математика, сб. переводов., 1962, т. 6, № 4.
6. Н ö г м а н д е г L. The boundary problems of physical geometry. - Arch. Rat. Mech. Anal., 1976, v. 62, p. 1-52.
7. П л о т н и к о в П.И. Один вариант теоремы Нэша-Мозера. - В сб.: "Динамика сплошной среды". Новосибирск, 1976, вып. 35.