E. N. Makhrova, The structure of dendrites with the periodic point property, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 2011, Number 11, 41–45

Известия вузов. Математика
2011, №11, с. 41–45

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Е.Н. МАХРОВА

СТРУКТУРА ДЕНДРИТОВ СО СВОЙСТВОМ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТОЧЕК

Аннотация. В данной работе изучается структура дендритов, обладающих свойством существования периодических точек, т. е. для любого непрерывного отображения $f : X \to X$ дендрита X и любого подконтинуума $Y \subset X$ из условия $Y \subset f(Y)$ следует, что Y содержит периодическую точку.

Ключевые слова: дендрит, непрерывное отображение, периодические точки.

УДК: 517.938

Abstract. In this paper we study the structure of dendrites with the periodic points property, i. e., dendrites X such that for any continuous map $f : X \to X$ and any subcontinuum $Y \subset X$ the condition $Y \subset f(Y)$ implies that Y contains a periodic point of f.

Keywords: dendrite, continuous map, periodic points.

Одной из основных задач теории динамических систем является задача существования периодических точек. Указанная задача для непрерывных отображений на дендритах изучалась, например, в [1]–[4]. В [1] доказана теорема существования неподвижной точки для непрерывного отображения дендрита в себя. В [2] изучаются условия существования неподвижной точки для гомеоморфизмов и монотонных сюръекций дендрита X на замкнутом подмножестве $M \subset X$. В [3] получены условия существования периодической точки у непрерывных отображений дендрита X на некоторой связной компоненте $U \subset X$. В [4] доказан факт существования периодической точки для непрерывного отображения $f : X \to X$ дендрита X на подконтинууме $Y \subset X$ при условии, что $Y \subset f(Y)$ и Y является конечным деревом. Показано, что указанный результат не обобщается на случай, когда Y — дендрит со счетным множеством точек ветвления.

В данной работе изучается структура дендритов, обладающих свойством существования периодических точек.

Возникший интерес к изучению динамических систем на дендритах связан, например, с тем, что дендриты появляются как множества Жюлиа в комплексных динамических системах (см. [5], с. 14). С другой стороны, дендриты являются примерами континуумов Пеано со сложной топологической структурой (см. [6], с. 165–187).

Поступила 28.10.2010

Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы", НК-13П-13, контракт П945.

1. Предварительные сведения

Дендритом называется локально связный континуум (компактное связное метрическое пространство), не содержащий подмножеств, гомеоморфных окружности.

Под дугой в дендрите X будем понимать множество, гомеоморфное замкнутому промежутку на прямой (одноточечное множество будем считать вырожденной дугой). Любые две точки x, y, $x \neq y$ в дендрите можно соединить единственной дугой, имеющей в качестве концов точки x и y. Символом $[x, y]$ будем обозначать дугу с концами в точках x и y, содержащую эти точки; положим $(x, y) = [x, y] \setminus \{x, y\}$.

В работе будем использовать определение порядка точки в смысле Менгера–Урысона (см., например, [7], § 51).

Пусть X — дендрит, а n — кардинальное число $\leq c$ или порядковое число ω множества всех неотрицательных целых чисел в их естественном порядке. Будем говорить, что порядок точки $x \in X$ не превосходит n ($\mathrm{ord}_X\, x \leq n$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $0 < \delta < \varepsilon$ такое, что $\mathrm{card}(\partial U_\delta(x)) \leq n$, где $\partial U_\delta(x)$ — граница δ-окрестности точки x, $\mathrm{card}(\cdot)$ — мощность множества $(\cdot)$. Равенство $\mathrm{ord}_X\, x = n$ означает, что $\mathrm{ord}_X\, x \leq n$ и соотношение $\mathrm{ord}_X\, x \leq m$ не имеет места ни при каком $m < n$.

Точки, порядок которых больше двух, называются точками ветвления. Точки, порядок которых равен единице, называются концевыми точками. Множество точек ветвления (концевых точек) дендрита X будем обозначать через $R(X)$ (соответственно $E(X)$). Отметим, что дендрит имеет не более чем счетное множество точек ветвления; любая точка $x \in X$ имеет порядок $\leq \omega$, т. е. дендрит X — регулярный континуум. Из последнего свойства следует, что всякий подконтинуум дендрита — дендрит (свойства дендрита см., например, в [7], § 51).

Дендрит с конечным множеством точек ветвления конечного порядка называется конечным деревом или просто деревом.

Будем говорить, что дендрит X обладает свойством существования периодической точки, если для любого непрерывного отображения $f : X \to X$ дендрита X и для любого подконтинуума $Y \subset X$ из условия $Y \subset f(Y)$ следует, что Y содержит периодическую точку.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Дендрит X обладает свойством существования периодической точки тогда и только тогда, когда мощность множества концевых точек дендрита $\mathrm{card}\, E(X) < c$, где c — мощность континуума.*

Нам потребуется дендрит G (рис. 1), имеющий счетное множество точек ветвления, предельным множеством которого служит множество концевых точек, являющееся канторовым дисконтинуумом (построение дендрита G описано в доказательстве теоремы C [8]).

Лемма 1 ([9])**.** *Пусть X — дендрит, у которого множество концевых точек $E(X)$ несчетно. Тогда X содержит дендрит, гомеоморфный G.*

Из леммы 1 следует, что условие $\mathrm{card}\, E(X) < c$ теоремы 1 эквивалентно тому, что дендрит X не содержит дендрит, гомеоморфный G.

Приведем вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства теоремы 1.

Пусть $f : X \to X$ — непрерывное отображение континуума X. Непустое замкнутое инвариантное подмножество M в X называется *минимальным*, если M не содержит собственных непустых замкнутых инвариантных подмножеств.

Лемма 2 ([10], § 16)**.** *Всякое замкнутое инвариантное компактное множество содержит некоторое минимальное.*

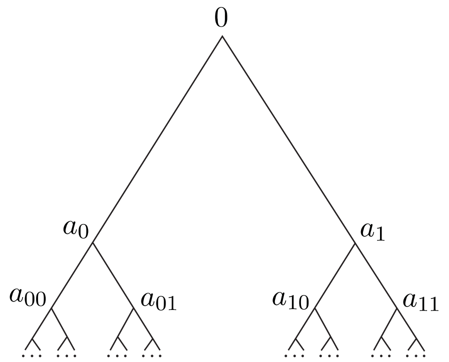

Рис. 1. Дендрит G

Лемма 3 ([10], § 16)**.** *Инвариантное множество M является минимальным в том и только том случае, если любая траектория $\{f^i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ из M всюду плотна в M.*

Обозначим через $\mathrm{Per}(f)$ множество периодических точек отображения f.

Лемма 4 ([4])**.** *Пусть $f : X \to X$ — непрерывное отображение дендрита X, и существует конечное дерево $Y \subset X$ такое, что $Y \subset f(Y)$. Тогда $Y \cap \mathrm{Per}(f) \neq \varnothing$.*

2. Доказательство теоремы 1

Пусть X — дендрит. Обозначим через $[A]$ наименьший подконтинуум в X, содержащий A, т. е. замыкание объединения всех дуг, соединяющих элементы множества A. Заметим, что множество концевых точек $E([A])$ подконтинуума $[A]$ принадлежит A.

Лемма 5. *Пусть X — дендрит и $\operatorname{card} E(X) < c$. Тогда X обладает свойством существования периодической точки.*

Доказательство. Пусть Y — произвольный поддендрит в X, удовлетворяющий условию $Y \subset f(Y)$. Докажем, что $Y \cap \mathrm{Per}(f) \neq \varnothing$.

1. Покажем существование минимального множества $M \subset Y$. Пусть y_0 — любая точка из Y. Так как $Y \subset f(Y)$, то существует последовательность точек $\{y_{-j}\}_{j=1}^{\infty} \subset Y$ такая, что $f(y_{-j}) = y_{-j+1}$ для всех $j \geq 1$. Обозначим через B множество предельных точек указанной последовательности. Тогда $B \subset Y$ и B замкнуто.

Пусть b — произвольная точка из B, а $\{y_{-j_i}\}_{i=1}^{\infty}$ — подпоследовательность, сходящаяся к b. В силу непрерывности f и условия $f(y_{-j}) = y_{-j+1}$ имеем

$$f(b) = f\big(\lim_{i\to\infty} y_{-j_i}\big) = \lim_{i\to\infty} f(y_{-j_i}) = \lim_{i\to\infty} y_{-j_i+1}.$$

Так как $\{y_{-j_i+1}\}_{i=1}^{\infty} \subset \{y_{-j}\}_{j=1}^{\infty}$, то $f(b) \in B$. Таким образом, B инвариантно. В силу леммы 2 существует минимальное множество $M \subseteq B$.

2. Положим $M_0 = [M]$. Тогда M_0 — дендрит в Y. Покажем, что $M_0 \cap \mathrm{Per}(f) \neq \varnothing$.

Утверждение справедливо, если $M \cap \mathrm{Per}(f) \neq \varnothing$. Поэтому рассмотрим случай, когда $M \cap \mathrm{Per}(f) = \varnothing$. Так как M — минимальное множество, то в силу леммы 3 для любой точки $x \in M$ ее траектория $\{f^i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ всюду плотна в M. Отсюда получаем, что M не содержит изолированных точек, т. е. M — совершенное множество. Поскольку $M \neq \varnothing$, то M несчетно. С другой стороны, из условия леммы следует, что множество концевых точек $E(M_0)$ поддендрита M_0 не более чем счетно. Отсюда получаем существование точки $z \in M$, не являющейся концевой точкой поддендрита M_0, т. е. порядок точки z в M_0 $\operatorname{ord}_{M_0} z \geq 2$.

Если $z \in \mathrm{Per}(f)$, то утверждение леммы 5 доказано. Рассмотрим случай, когда $z \notin \mathrm{Per}(f)$. Обозначим через V компоненту точки z, содержащую $f(z)$. Так как $z \in M$, то в силу леммы 3 существует натуральное число $k \geq 2$, для которого $f(z), \ldots, f^{k-1}(z) \in V$, а $f^k(z) \notin V$. Положим $A = [z, f(z), \ldots, f^{k-1}(z)]$. Тогда A — конечное дерево, $A \subset M_0$ и $A \subset f(A)$. В силу леммы 4 имеем $A \cap \mathrm{Per}(f) \neq \varnothing$. Следовательно, $M_0 \cap \mathrm{Per}(f) \neq \varnothing$. $\square$

Лемма 6. *Пусть дендрит X обладает свойством существования периодической точки. Тогда* $\mathrm{card}\, E(X) < c$.

Доказательство. Предположим противное. Покажем, что в этом случае дендрит X не обладает свойством существования периодической точки. Построение отображения $f : X \to X$ разобьем на два этапа.

I. Начнем с построения вспомогательного отображения $g : G \to G$. Обозначим через a_0, a_1 точки ветвления (соответственно левую и правую) дендрита G, ближайшие к вершине o и отстоящие от нее на одинаковом расстоянии (существование точек a_0 и a_1 вытекает из определения дендрита G [8]). Через $a_{i_1 0}$, $a_{i_1 1}$ — точки ветвления (соответственно левую и правую), ближайшие к a_{i_1} и также отстоящие от нее на одинаковом расстоянии, $i_1 \in \{0, 1\}$. Продолжая описанную процедуру, каждой точке ветвления поставим в соответствие совокупность номеров $i_1 \ldots i_n$, где $i_1, \ldots, i_n \in \{0, 1\}$. Такую точку будем обозначать через $a_{i_1 \ldots i_n}$, где $i_1, \ldots, i_n \in \{0, 1\}$.

Построим два вспомогательных отображения дендрита G. Обозначим через G_i дендрит, принадлежащий $G \setminus (a_0, a_1)$ с вершиной в точке a_i, где $i \in \{0, 1\}$.

Определим отображение $\psi : G \to G$ следующим образом:

1) $\psi(x) = x$, если $x \in [a_0, a_1] \cup G_1$; используя построение отображения f из доказательства теоремы С [8], зададим отображение ψ на G_0;

2) $\psi_{|\bigcup\limits_{i_2 \in \{0,1\}} [a_0, a_{0i_2}]} : \bigcup\limits_{i_2 \in \{0,1\}} [a_0, a_{0i_2}] \to \bigcup\limits_{i_2 \in \{0,1\}} [a_0, a_{0i_2}]$ — линейный гомеоморфизм такой, что $\psi(a_0) = a_0$, $\psi(a_{0i_2}) = a_{0(1-i_2)}$, $i_2 \in \{0, 1\}$ и любая точка $x \in \bigcup\limits_{i_2 \in \{0,1\}} [a_0, a_{0i_2}] \setminus \{a_0\}$ является периодической периода 2;

3) при $n \geq 3$ на каждом множестве $\bigcup\limits_{i_2, \ldots, i_n \in \{0,1\}} [a_{0i_2 \ldots i_{n-1}}, a_{0i_2 \ldots i_n}]$ зададим отображение ψ так, что $\psi^2_{|\bigcup\limits_{i_3, \ldots, i_n \in \{0,1\}} [a_{00i_3 \ldots i_{n-1}}, a_{00i_3 \ldots i_n}]}$ и $\psi^2_{|\bigcup\limits_{i_3, \ldots, i_n \in \{0,1\}} [a_{01i_3 \ldots i_{n-1}}, a_{01i_3 \ldots i_n}]}$ с точностью до масштабного преобразования совпадает с $\psi_{|\bigcup\limits_{i_2, \ldots, i_{n-1} \in \{0,1\}} [a_{0i_2 \ldots i_{n-2}}, a_{0i_2 \ldots i_{n-1}}]}$. Тогда каждая точка $x \in \bigcup\limits_{i_2, \ldots, i_n \in \{0,1\}} [a_{0i_2 \ldots i_{n-1}}, a_{0i_2 \ldots i_n}]$ является периодической периода 2^{n-1};

4) для любой точки $x \in E(G_0)$ определим $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$, где $\{x_n\}_{n \geq 1}$ — произвольная последовательность, сходящаяся к x.

Тогда $\psi : G \to G$ — непрерывное отображение, $\psi(G) = G$, множество $\mathrm{Per}(\psi)$ периодических точек отображения ψ совпадает с множеством $\mathrm{Fix}(\psi)$ неподвижных точек указанного отображения, и $\mathrm{Per}(\psi) = \mathrm{Fix}(\psi) = G \setminus E(G_0)$. В [8] показано, что каждая точка из $E(G_0)$ является рекуррентной непериодической точкой.

Определим отображение $\varphi : G \to G$, положив

1) $\varphi(x) = o$, если $x \in [a_0, o]$;

2) $\varphi_{|[a_0, a_{0i_2}]} : [a_0, a_{0i_2}] \to [o, a_0]$ — линейный гомеоморфизм такой, что $g(a_0) = o$, $g(a_{0i_2}) = a_0$ при $i_2 \in \{0, 1\}$;

3) $\varphi_{|[a_{0i_2 \ldots i_{n-1}}, a_{0i_2 \ldots i_n}]} : [a_{0i_2 \ldots i_{n-1}}, a_{0i_2 \ldots i_n}] \to [a_{0i_2 \ldots i_{n-2}}, a_{0i_2 \ldots i_{n-1}}]$ — линейный гомеоморфизм такой, что $\varphi(a_{0i_2 \ldots i_n}) = a_{0i_2 \ldots i_{n-1}}$ для любых $i_2, \ldots, i_n \in \{0, 1\}$, где $n \geq 3$;

4) $\varphi(x) = x$, если $x \in E(G_0) \cup [o, a_1] \cup G_1$.

Легко проверить, что $\varphi : G \to G$ — непрерывное отображение, $\varphi(G) = G$, $G_0 \subset \varphi(G_0)$, $\mathrm{Per}(\varphi) = \mathrm{Fix}(\varphi) = E(G_0) \cup [o, a_1] \cup G_1$.

Положим $g = \varphi \circ \psi : G \to G$. Тогда из свойств отображений $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ следует, что $g(x)$ — непрерывное отображение дендрита G, $g(G) = G$, $\mathrm{Per}(g) = \mathrm{Fix}(g) = [o, a_1] \cup G_1$, $G_0 \subset g(G_0) = G_0 \cup [o, a_0]$, но $G_0 \cap \mathrm{Per}(g) = \varnothing$.

II. Завершим построение отображения $f : X \to X$. В силу сделанного предположения и леммы 1 дендрит X содержит дендрит $\widetilde{G}$, гомеоморфный G. Пусть $r : X \to \widetilde{G}$ — ретракт дендрита X на $\widetilde{G}$. Положим $f = h^{-1} \circ g \circ h \circ r : X \to X$, где h — гомеоморфизм $\widetilde{G}$ на G. Тогда

1) $f(x)$ — непрерывное отображение дендрита X, $f(X) = \widetilde{G}$;

2) $\mathrm{Per}(f) = \mathrm{Fix}(f) = h^{-1}([o, a_1] \cup G_1)$;

3) подконтинуум $\widetilde{G_0} = h^{-1}(G_0)$ обладает следующими свойствами: $\widetilde{G_0} \subset f(\widetilde{G_0})$, но $\widetilde{G_0} \cap \mathrm{Per}(f) = \varnothing$.

Отсюда получаем, что дендрит X не обладает свойством существования периодической точки. Получили противоречие. □

Справедливость теоремы 1 следует из лемм 5 и 6.

Литература

[1] Ayres W.L. *Some generalizations of the Scherrer fixed-point theorem*, Fundam. Math. **16**, 332–336 (1930).

[2] Schirmer H. *Properties of fixed point sets on dendrites*, Pacific J. Math. **36** (3), 795–810 (1971).

[3] Mai J., Shi E. $\overline{R} = \overline{P}$ *for maps of dendrite* X *with* $\mathrm{Card}(\mathrm{End}\, X) < c$, Intern. J. Bifurcation Chaos **19** (4), 1391–1396 (2009).

[4] Махрова Е.Н. *О существовании периодических точек непрерывных отображений дендритов*, Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики: Сб. научн. тр., Москва, 133–141 (2007).

[5] Peitgen H.O., Richter P.H. *The beauty of fractals* (Springer, Berlin, 1986).

[6] Nadler S.B. *Continuum theory* (Marcel Dekker, N. Y., 1992).

[7] Куратовский К. *Топология*, Т. 2 (Мир, М., 1969).

[8] Ефремова Л.С., Махрова Е.Н. *Динамика монотонных отображений дендритов*, Матем. сб. **192** (6), 15–30 (2001).

[9] Arévalo D., Charatonic W.J., Covarrubias P.P., Simón L. *Dendrites with a closed set of end points*, Topology Appl. **115** (1), 1–17 (2001).

[10] Сибирский К.С. *Введение в топологическую динамику* (АН Молд. ССР, Кишинев, 1970).

Е.Н. Махрова

доцент, кафедра дифференциальных уравнений и математического анализа,
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
пр. Гагарина, д. 23, г. Н. Новгород, 603950,

e-mail: elena_makhrova@inbox.ru

E.N. Makhrova

Associate Professor, Chair of Differential Equations and Mathematical Analysis,
Nizhni Novgorod State University,
23 Gagarin Ave., Nizhni Novgorod, 603950 Russia,

e-mail: elena_makhrova@inbox.ru