ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1982 МАТЕМАТИКА № 2 (237)

А. Л. Онищик УДК 512.74

О ВКЛЮЧЕНИЯХ МЕЖДУ ТРАНЗИТИВНЫМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ГРУППАМИ

Как известно, изучение транзитивных подгрупп некоторой транзитивной группы преобразований G равносильно изучению разложений (или факторизаций) группы G в произведение двух собственных подгрупп. В случае групп Ли включения между транзитивными группами преобразований систематически изучались, и во многих важных случаях получена полная классификация разложений (см., напр., [1]). Обширная литература существует также по теории факторизаций конечных групп. В данной работе рассматриваются разложения алгебраических групп в произведение алгебраических подгрупп.

Если $G=AB$ — разложение алгебраической группы G в произведение замкнутых подгрупп A, B, то имеется биективный морфизм факторпространств $\lambda: A/A\cap B\to G/B$, снабженных „стандартными" алгебраическими структурами. Мы называем разложение сепарабельным, если λ — изоморфизм. Критерий сепарабельности состоит в том, что для алгебр Ли групп G, A, B должно также иметь место разложение $L(G)=L(A)+L(B)$. В случае поля характеристики 0 все разложения сепарабельны.

В § 3 мы изучаем параболические разложения линейных алгебраических групп G, т. е. разложения $G=AB$, в которых одна из подгрупп A, B параболична. Результаты этого параграфа весьма сходны с соответствующими результатами для комплексных и вещественных групп Ли [1], [2] [1)]. Эти результаты можно считать подготовительными для классификации параболических разложений, которая будет проведена в другом месте. Заметим, что в [3] анонсирована классификация сепарабельных параболических разложений.

На протяжении всей работы рассматриваются алгебраические многообразия и группы над алгебраически замкнутым полем K произвольной характеристики p. Через G^0 обозначается связная компонента единицы группы G, через $L(G)$ — ее алгебра Ли, через R_G — радикал группы G, через Z_G — ее центр, через $N(H)$ — нормализатор подгруппы H в G. Поле рациональных функций на многообразии X над K обозначается через $K(X)$, а кольцо регулярных функций—через $K[X]$. Через f^* обозначается отображение на функциях, индуцированное морфизмом f многообразий.

§ 1. Разложения алгебраических групп

Следуя [4], будем называть сюръективный морфизм $\varphi: Y\to X$ алгебраических многообразий *факторным*, если он обладает следующими свойствами:

1) φ открыт;

2) для любого открытого $U\subset Y$ морфизм φ индуцирует изоморфизм φ^* алгебры $K[\varphi(U)]$ на алгебру функций $f\in K[U]$, постоянных на слоях морфизма φ.

Пусть теперь G — алгебраическая группа, регулярно и транзитивно действующая на многообразии X. Для любой точки $x\in X$ обозначим через G_x стационарную подгруппу этой точки и определим сюръективный морфизм $\pi_x: G\to X$ формулой $\pi_x(a)=ax$ $(a\in G)$. Будем говорить, что G *факторно действует на* X (*или что* X — *факторное однородное пространство группы* G), если для любой точки $x\in X$ морфизм π_x является факторным. Из однородности легко следует, что достаточно выполнения этого условия в одной фиксированной точке $x_0\in X$. Кроме того, известно ([4], предложение 6.7), что факторность транзитивного действия равносильна любому из следующих условий:

1) Заметим, что доказательство теоремы 4.1 из [2] содержит ошибку и проходит лишь в случае, когда G проста.

(a) π_{x_0} — сепарабельный морфизм;

(b) $\ker(d\pi_{x_0})_e = L(G_{x_0})$.

В случае $p=0$ эти условия всегда выполнены.

Пусть H — произвольная замкнутая подгруппа в G. Хорошо известно, что множество G/H левых смежных классов группы G по H можно снабдить структурой гладкого алгебраического многообразия таким образом, чтобы естественное транзитивное действие группы G на G/H было регулярным и факторным [4]. Кроме того, любое факторное однородное пространство X группы G изоморфно G/H, где $H=G_{x_0}$ — стационарная подгруппа некоторой точки $x_0 \in X$. Точнее, отображение $\bar{\pi}_{x_0}: G/H \to X$, определенное формулой

$$\bar{\pi}_{x_0}(aH) = ax_0 \quad (a \in G), \tag{1}$$

является эквивариантным изоморфизмом алгебраических многообразий ([4], § 6).

В дальнейшем мы всегда будем подразумевать на G/H структуру факторного однородного пространства группы G. Через $\pi: G \to G/H$ будет обозначаться естественное отображение $a \to aH$. Морфизм π совпадает с π_ε для $X=G/H$, $\varepsilon = H$ и поэтому обладает свойствами 1), 2), (a), (b).

Если G' — замкнутая подгруппа в G, то имеется естественное регулярное действие группы G' на G/H. Кроме того, $\pi|G'$ индуцирует морфизм $\lambda: G'/G' \cap \cap H \to G/H$, который не обязан быть сепарабельным. Согласно предложению 6.12 из [4] λ сепарабелен тогда и только тогда, когда $\pi|G'$ сепарабелен или когда $L(G' \cap H) = L(G') \cap L(H)$.

Пусть G — алгебраическая группа, A, B — ее замкнутые подгруппы. Мы будем говорить, что имеет место *разложение* группы G на подгруппы A, B, если $G=AB$, т. е. любой $g \in G$ представляется в виде $g=ab$, где $a \in A$, $b \in B$. Очевидно, для этого необходимо и достаточно, чтобы естественное действие подгруппы A на G/B было транзитивным, т. е. чтобы морфизм $\lambda: A/A \cap B \to G/B$, заданный формулой $\lambda(a(A \cap B)) = aB\ (a \in A)$, был биективен. Другое, равносильное условие состоит в следующем. Рассмотрим действие группы $A \times B$ на многообразии G, при котором A действует левыми сдвигами, а B — правыми сдвигами: $(a, b)x = axb^{-1}$ $(a \in A,\ b \in B,\ x \in G)$. Это действие регулярно, и стационарной подгруппой точки e является подгруппа $(A \cap B)_d \subset \subset A \times B$, состоящая из всех пар (a, a), где $a \in A \cap B$. Тем самым определен инъективный морфизм $\varphi: A \times B/(A \cap B)_d \to G$. Разложение имеет место тогда и только тогда, когда $A \times B$ действует на G транзитивно, т. е. когда φ биективно.

Мы будем говорить, что разложение $G=AB$ *сепарабельно*, если λ — изоморфизм, т. е. если действие группы A на G/B факторно. Очевидно, в случае $p=0$ любое разложение сепарабельно.

Предложение 1. *Пусть $G=AB$. Следующие условия эквивалентны:*

1) *разложение $G=AB$ сепарабельно;*

2) *φ — изоморфизм, т. е. действие группы $A \times B$ на G факторно;*

3) $L(G) = L(A) + L(B)$;

4) $L(A \cap B) = L(A) \cap L(B)$.

Доказательство. Пусть $\pi: G \to G/B$ — естественная проекция. Тогда $\pi|A: A \to G/B$ — сюръективный морфизм. Из сказанного выше следует, что $\lambda: A/A \cap B \to G/B$ есть изоморфизм тогда и только тогда, когда $\pi|A$ сепарабелен, т. е. $d\pi_e: L(A) \to T_\varepsilon(G/B)$ сюръективно, или когда выполнено условие 4). Далее, 4)$\Rightarrow$3). Действительно, поскольку морфизм λ биективен, имеем $\dim A/A \cap B = \dim G/B$, т. е. $\dim G = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$ или $\dim L(G) = = \dim L(A) + \dim L(B) - \dim L(A \cap B) = \dim(L(A) + L(B)) + \dim(L(A) \cap L(B)) - - \dim L(A \cap B)$. Отсюда следует наше утверждение. Наконец, условие 2) равносильно сепарабельности отображения $\mu: A \times B \to G$, заданного формулой $\mu(a, b) = ab^{-1}$. Имеем $d\mu_{(e,e)}(u, v) = u - v$ $(u \in L(A),\ v \in L(B))$. Поэтому 2)$\Leftrightarrow$3).

Заметим, что $G=AB$ тогда и только тогда, когда $G=BA$. Поскольку условие 3) симметрично относительно A и B, из предложения 1 следует, что сепарабельность одного из этих разложений влечет за собой сепарабельность второго.

Пример. Пусть $p>0$, G — алгебраическая группа, определенная над конечным подполем $k\subset K$ порядка q, $a\to a^{(q)}$ $(a\in G)$ — соответствующий морфизм Фробениуса, $\Gamma=\{(a, a^{(q)})\mid a\in G\}\subset G\times G$ — его график. Если $\dim G>0$, то разложение $G\times G=(G\times\{e\})\Gamma$ не сепарабельно.

Следующее предложение показывает, что при изучении разложений $G=AB$ связной группы G можно ограничиться случаем, когда A и B связны.

Предложение 2. *Пусть G — связная алгебраическая группа, A и B — ее замкнутые подгруппы. Если $G=AB$, то $G=A^0B^0$.*

Доказательство. Пусть алгебраическая группа H регулярно и транзитивно действует на связном многообразии X. Тогда H^0 также транзитивна на X. Действительно, X гладко, а неприводимые компоненты слоев морфизма $\pi_{x_0}:H\to X$, где $x_0\in X$, изоморфны между собой. Значит, π_{x_0} открыто (см. [4], следствие из предложения 18.4). Поэтому орбита $H^0(x_0)=\pi_{x_0}(H^0)$ открыта и замкнута в X и, значит, совпадает с X. Применяя это соображение к естественному действию группы A на G/B, получим, что A^0 транзитивна на G/B, т. е. $G=A^0B=BA^0$. Затем аналогично получаем, что $G=B^0A^0=A^0B^0$

§ 2. Примитивные однородные пространства

Пусть G — связная линейная алгебраическая группа, H — ее замкнутая подгруппа. Тогда следующие условия эквивалентны: G/H полно, H — параболическая подгруппа в G [5]. Это утверждение остается в силе, если заменить G/H любым (не обязательно факторным) однородным пространством группы G.

Предложение 3. *Пусть X — однородное пространство связной линейной алгебраической группы G, $x_0\in X$. Тогда следующие условия эквивалентны: X полно, G_{x_0} — параболическая подгруппа в G. Если G действует на X почти эффективно (т. е. с конечным ядром неэффективности), то G полупроста.*

Доказательство. Рассмотрим морфизм $\bar{\pi}_{x_0}: G/G_{x_0}\to X$, заданный формулой (1). Поскольку он биективен, а X гладко, то многообразие X полно тогда и только тогда, когда полно G/G_{x_0} ([4], предложение 18.3), т. е. когда G_{x_0} параболична. Последнее утверждение вытекает из того, что радикал группы G содержится в любой ее параболической подгруппе.

Будем говорить, что полное алгебраическое многообразие X является (*факторно*) *примитивным*, если любой сюръективный (факторный) морфизм $X\to Y$ со связными слоями является либо биективным, либо постоянным.

С другой стороны, транзитивное действие абстрактной группы G на множестве X называют *примитивным*, если в X не существует собственного отношения эквивалентности, инвариантного относительно G, т. е. если стационарные подгруппы G_x точек $x\in X$ максимальны в G.

Теорема 1. *Пусть связная линейная алгебраическая группа G регулярно и транзитивно действует на полном многообразии X, и пусть $x_0\in X$. Следующие условия эквивалентны:* 1) *X примитивно*; 2) *X факторно примитивно*; 3) *G/G_{x_0} примитивно*; 4) *G/G_{x_0} факторно примитивно*; 5) *G действует на X примитивно.*

Доказательство будет опираться на следующие две леммы.

Лемма 1. *Пусть M, Y, Z — алгебраические многообразия, причем M неприводимо, а Y полно и связно, и пусть $f: M\times Y\to Z$ — такой морфизм, что для некоторой точки $a_0\in M$ отображение $y\to f(a_0, y)$ постоянно. Тогда f постоянно по Y, т. е. $f(a, y_1)=f(a, y_2)$ для всех $a\in M$, $y_1, y_2\in Y$.*

Доказательство. Пусть $b_0 = f(a_0, y)$ $(y \in Y)$, и пусть U — аффинная окрестность точки b_0 в Z. Тогда $V = f^{-1}(U)$ — открытая окрестность множества $\{a_0\} \times Y$ в $M \times Y$. Поскольку Y полно, проекция $p_1 : M \times Y \to M$ отображает $F = (M \times Y) \setminus V$ на замкнутое множество $p_1(F) \subset M$. Множество $W = M \setminus p_1(F)$ — это открытая окрестность точки a_0. Ясно, что $f(W \times Y) \subset U$. Если $a \in W$, то $f(\{a\} \times Y)$ — связное полное замкнутое подмножество, лежащее в аффинной окрестности U и потому состоящее из одной точки.

Зафиксируем точку $y_0 \in Y$ и рассмотрим морфизм $f_0 : M \times Y \to Z$, заданный формулой $f_0(a, y) = f(a, y_0)$. Тогда $f \mid W \times Y = f_0 \mid W \times Y$. Значит, $f = f_0$, поскольку W плотно в M.

Лемма 2. *Пусть $\alpha : X \to Y$—биективный морфизм алгебраических многообразий, причем Y полно и нормально, и пусть $\rho : X \to Z$ — факторный морфизм со связными слоями. Тогда существуют многообразие T, факторный морфизм $\sigma : Y \to T$ со связными слоями и биективный морфизм $\beta : Z \to T$ такие, что коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y \\ \rho\downarrow & & \downarrow\sigma \\ Z & \xrightarrow{\beta} & T \end{array}. \qquad (2)$$

Доказательство. Как показано в [4] (предложение 18.3), X также полно. Кроме того, α открыто. Рассмотрим инъекции $\rho^* : K(Z) \to K(X)$ и $\alpha^* : K(Y) \to K(X)$ и определим новый пучок колец $\boldsymbol{F}$ на Z формулой $\boldsymbol{F}_z = \rho^{*-1}(\rho^* \boldsymbol{O}_{Z,z} \cap \alpha^* K(Y))$ $(z \in Z)$. Положим $T = (Z, \boldsymbol{F})$ и докажем, что T — алгебраическое многообразие. Достаточно показать, что если U — аффинное открытое множество в Z, то окольцованное пространство $(U, \boldsymbol{F} | U)$ изоморфно аффинному алгебраическому многообразию.

Доказательство этого факта аналогично доказательству предложения 18.3 из [4]. Достаточно рассмотреть случай $p > 0$. В [4] показано, что $K[\rho^{-1}(U)] \cap \alpha^* K(Y) = \alpha^* K[\alpha(\rho^{-1}(U))]$ и что $K[\rho^{-1}(U)]^{p^s} \subset \alpha^* K[\alpha(\rho^{-1}(U))] \subset K[\rho^{-1}(U)]$ для некоторого $s > 0$. Далее, из определения факторного морфизма и полноты и связности слоев следует, что $\rho^* K[U] = K[\rho^{-1}(U)]$. Значит, $\rho^* \Gamma(U, \boldsymbol{F}) = \rho^* K[U] \cap \alpha^* K(Y) = K[\rho^{-1}(U)] \cap \alpha^* K(Y) = \alpha^* K[\alpha(\rho^{-1}(U))]$, откуда $\rho^* K[U]^{p^s} \subset \rho^* \Gamma(U, \boldsymbol{F}) \subset \rho^* K[U]$ и $K[U]^{p^s} \subset \Gamma(U, \boldsymbol{F}) \subset K[U]$. Отсюда следует, что $\Gamma(U, \boldsymbol{F})$ — конечнопорожденная приведенная K-алгебра (см. [6], предложение 7.8). Рассмотрим морфизм $\delta : (U, \boldsymbol{F} | U) \to \operatorname{Spec} \Gamma(U, \boldsymbol{F})$, заданный формулой $\delta(x)(\varphi) = \varphi(x)$ $(x \in U$, $\varphi \in \operatorname{Hom}_{K-a}(\Gamma(U, \boldsymbol{F}), K))$. Он инъективен, поскольку уже функции из $K[U]^{p^s}$ разделяют точки множества U. Для доказательства сюръективности морфизма δ нужно показать, что любой максимальный идеал $I \subset \Gamma(U, \boldsymbol{F})$ содержится в собственном идеале алгебры $K[U]$. Если это не так, то идеал, порожденный I над $K[U]$, совпадает с $K[U]$, т. е. существуют такие $u_i \in K[U]$ и $v_i \in I$ $(i = 1, \ldots, r)$, что $\sum_{i=1}^{r} u_i v_i = 1$. Возведя это равенство в степень $q = p^s$, получим $\sum_{i=1}^{r} u_i^q v_i^q = 1$. Поскольку $u_i^q \in \Gamma(U, \boldsymbol{F})$, имеем $1 \in I$, что дает противоречие.

Остается показать, что δ^{-1} является морфизмом. Это равносильно следующему утверждению: если $h \in \boldsymbol{F}_z$, где $z \in U$, то $h = f/g$, где $f, g \in \Gamma(U, \boldsymbol{F})$ и $g(z) \neq 0$. Поскольку U аффинно, имеем $h = f_1/g_1$, где $f_1, g_1 \in K[U]$ и $g_1(z) \neq 0$. Тогда $g = g_1^q \in \Gamma(U, \boldsymbol{F})$ и $g(z) \neq 0$. Имеем $hg = f_1 g_1^{q-1} \in K[U]$, откуда $\rho^*(hg) \in K[\rho^{-1}(U)]$. С другой стороны, $\rho^*(hg) = (\rho^* h)(\rho^* g) \in \alpha^* K(Y)$. Следовательно, $\rho^*(hg) \in K[\rho^{-1}(U)] \cap \alpha^* K(Y) = \rho^* \Gamma(U, \boldsymbol{F})$ и $h = f/g$, где $f = hg \in \Gamma(U, \boldsymbol{F})$.

Возьмем теперь в качестве $\beta: Z \to T$ тождественное отображение, а в качестве σ — отображение $\rho \circ \alpha^{-1}: Y \to T$. Легко видеть, что β и σ — морфизмы и что диаграмма (2) коммутативна. Нетрудно проверить также, что σ — факторный морфизм.

Доказательство теоремы 1. Очевидно, 1)$\Rightarrow$2) и 3)$\Rightarrow$4). Из леммы 2 легко следует, что 2)$\Rightarrow$4), поскольку имеется биективный морфизм $\bar{\pi}_{x_0}: G/G_{x_0} \to X$. Докажем, что 4)$\Rightarrow$5). Предположим, что G/G_{x_0} факторно примитивно, но подгруппа G_{x_0} не максимальна в G. Пусть $G_{x_0} \subset H \subset G$, где H — некоторая подгруппа. Тогда H содержит борелевскую подгруппу группы G и потому является связной замкнутой (и притом параболической) подгруппой (см. [5], 29.3). Возникает факторный морфизм $G/G_{x_0} \to G/H$, слои которого изоморфны H/G_{x_0} и потому связны и имеют положительные размерности. Получили противоречие.

Докажем, наконец, что 5)$\Rightarrow$1). Пусть $\rho: X \to Z$ — сюръективный морфизм со связными слоями. Применим лемму 1 к случаю $M = G$, $a_0 = e$, $Y = \rho^{-1}(z)$, где $z \in Z$, $Z = Z$, $f(a, y) = \rho(ay)$. Получаем, что действие группы G переставляет слои отображения ρ. Поскольку действие примитивно, отсюда следует, что ρ либо биективно, либо постоянно. Рассматривая G/G_{x_0} вместо X, видим, что 5)$\Rightarrow$3).

§ 3. Параболические разложения

Пусть G — связная линейная алгебраическая группа, A, B — ее замкнутые подгруппы, причем $G = AB$. Будем говорить, что это разложение является *параболическим*, если хотя бы одна из подгрупп A, B параболична в G. В этом параграфе мы установим некоторые общие свойства параболических разложений.

Прежде всего, отметим следующую очевидную лемму.

Лемма 3. *Пусть G — группа, A, B — ее подгруппы, причём B содержит нормальный делитель G^* группы G. Положим $G_1 = G/G^*$, $B_1 = B/G^*$, $A_1 = A/A \cap G^*$. Для того чтобы $G = AB$, необходимо и достаточно, чтобы $G_1 = A_1 B_1$.*

Если B — параболическая подгруппа связной линейной алгебраической группы G, то радикал R_G содержится в B. При этом B/R_G — параболическая подгруппа полупростой группы G/R_G. Таким образом, лемма 3 сводит изучение любых параболических разложений к случаю, когда G полупроста. В силу той же леммы мы можем считать также, что B не содержит нетривиальных связных нормальных делителей группы G. Кроме того, в силу предложения 2 можно считать, что A связна.

Теорема 2. *Пусть G — связная линейная алгебраическая группа, A и B — ее замкнутые подгруппы, причем A связна и $G = AB$. Тогда*:

1) *подгруппа B параболична в G тогда и только тогда, когда $A \cap B$ параболична в A*;

2) *если B параболична, то B максимальна в G тогда и только тогда, когда $A \cap B$ максимальна в A*;

3) *если G полупроста (редуктивна), а B параболична и не содержит нетривиальных (соответственно, нетривиальных неабелевых) связных нормальных делителей группы G, то A полупроста (соответственно, редуктивна), причем $Z_A \subseteq Z_G$*;

4) *если G проста, а B параболична и $B \neq G$, то A проста, всякая объемлющая A связная замкнутая подгруппа в G проста и $N(A)^0 = A$. Если при этом $Z_G = \{e\}$, т. е. G проста как абстрактная группа, то тем же свойством обладает A.*

Доказательство. 1) Рассмотрим естественный биективный морфизм $\lambda: A/A\cap B \to G/B$. Если $A\cap B$ параболична в A, то $A/A\cap B$ полно, откуда следует, что G/B полно, т. е. B параболична в G. Обратно, из полноты многообразия G/B следует, что $A/A\cap B$ полно ([4], предложение 18.3), так что из параболичности подгруппы B вытекает, что $A\cap B$ параболична в A.

2) Если $A\cap B$ максимальна в A, то действие группы A на $A/A\cap B$ и на G/B примитивно, откуда, очевидно, следует, что действие группы G примитивно, т. е. что B максимальна в G. Обратно, если B максимальна, то по теореме 1 G/B примитивно. Поскольку A действует на G/B регулярно и транзитивно, из той же теоремы следует, что действие группы A примитивно, т. е. что $A\cap B$ — максимальная подгруппа в A.

3) Как было доказано в п. 1), $A\cap B$ — параболическая подгруппа в A. Поэтому радикал R_A содержится в $A\cap B$. Значит, R_A тривиально действует на G/B и потому содержится в ядре неэффективности действия группы G, связная компонента единицы которого по нашему предположению совпадает с R_G. Итак, $R_A \subseteq R_G$, откуда следует утверждение. Аналогично доказывается, что $Z_A \subseteq Z_G$.

4) В этом случае выполнено условие п. 3), т. е. ядро неэффективности действия группы G конечно. Поэтому A полупроста. Расширяя, если это возможно, подгруппу B, мы можем считать, что B максимальна. Тогда согласно п. 2) $A\cap B$ будет максимальной параболической подгруппой в A. Если A не проста, то, как легко следует из описания параболических подгрупп ([5], § 30), $A\cap B$ должна содержать нетривиальный связный нормальный делитель A^* группы A. Подгруппа A^* тривиально действует на G/B, что противоречит предположению. К любой объемлющей A связной замкнутой подгруппе в G применимо то же рассуждение. Последнее утверждение следует из того, что $Z_A \subseteq Z_G$.

Из теоремы 2 вытекают следующие важные свойства произвольных разложений простых групп.

Следствие 1. *Пусть G — связная простая алгебраическая группа, A и B — ее связные замкнутые подгруппы. Если $G = AB$, то, по крайней мере, одна из групп A, B полупроста.*

Доказательство. Если B не полупроста, то B содержится в собственной параболической подгруппе $P \subset G$ [5]. Имеем $G = AP$, и из теоремы 2 следует, что A проста.

Следствие 2. *Пусть G — связная простая алгебраическая группа, A и B — ее произвольные подгруппы. Если $G = AB$, то, по крайней мере, одна из групп A, B не содержит бесконечных разрешимых нормальных делителей.*

Теперь мы выведем из теоремы 2, что описание параболических разложений в конце концов сводится к случаю, когда G проста. Нам потребуется следующая простая

Лемма 4. *Пусть G_1 и G_2 — группы, B_1 и B_2 — их подгруппы, $G = G_1 \times G_2$, $B = B_1 \times B_2$ и A — подгруппа в G. Если $G = AB$, то $G_1 = \pi_1(\pi_2^{-1}(B_2))B_1$, где $\pi_i: A \to G_i$ $(i = 1, 2)$ — естественные проекции.*

Теорема 3. *Пусть G — связная полупростая алгебраическая группа, и пусть $G = G_1 G_2 \ldots G_s$, где G_i — различные связные простые замкнутые нормальные делители группы G. Пусть A, B — связные замкнутые подгруппы в G, причем B параболична и не содержит нетривиальных связных нормальных делителей группы G. Тогда $B = B_1 B_2 \ldots B_s$, где B_i — собственная параболическая подгруппа в G_i. Далее, разложение $G = AB$ справедливо тогда и только тогда, когда $A = A_1 A_2 \ldots A_s$, где A_i — связная простая замкнутая подгруппа в G_i и $G_i = A_i B_i$ $(i = 1, \ldots, s)$.*

Доказательство. Используя естественную изогению $G_1 \times \ldots \times G_s \to G$, легко свести теорему 4 к случаю, когда $G = G_1 \times \ldots \times G_s$. Из описания параболических подгрупп ([5], § 30) видно, что $B = B_1 \times \ldots \times B_s$, где B_i — собственная параболическая подгруппа в G_i $(i = 1, \ldots, s)$. Ясно, что если

$A = A_1 \times \ldots \times A_s$ и $G_i = A_iB_i$ $(i = 1, \ldots, s)$, то $G = AB$. Обратно, пусть $G = AB$. Обозначим через π_i проекцию $G \to G_i$. Очевидно, $G_i = \pi_i(A)B_i$. Согласно теореме 2 A полупроста, а $\pi_i(A)$ проста для любого $i = 1, \ldots, s$. Следовательно, для каждого $i = 1, \ldots, s$ найдется единственный связный простой замкнутый нормальный делитель A_j в A такой, что $\pi_i : A_j \to G_i$ — нетривиальный гомоморфизм. Мы покажем ниже, что в этом случае $\pi_k(A_j) = \{e\}$ для всех $k \neq i$, т. е. что $A_j \subseteq G_i$. Тогда $G_i = A_jB_i$, и теорема будет доказана.

Предположим для простоты записи, что для некоторого простого нормального делителя A_1 в A проекции $\pi_i : A_1 \to G_i$ $(i = 1, 2)$ нетривиальны. Тогда, очевидно, $G_1 \times G_2 = A_1(B_1 \times B_2)$. По лемме 4 имеем $G_1 = \pi_1(\pi_2^{-1}(B_2))B_1$, где через π_i $(i = 1, 2)$ обозначены ограничения соответствующих проекций на A_1. Поскольку A_1 проста, $\ker \pi_i$ конечны. Поэтому имеем изогению $\pi_2 : \pi_2^{-1}(B_2) \to \pi_2(A_1) \cap B_2$. Согласно теореме 2 $\pi_2(A_1) \cap B_2$ — собственная параболическая подгруппа в $\pi_2(A_1)$. Отсюда следует, что подгруппа $\pi_1(\pi_2^{-1}(B_2))$ не полупроста, что противоречит теореме 2.

Заметим, что в случае сепарабельных разложений теорема 3 была анонсирована в [3].

Пусть G — связная редуктивная алгебраическая группа, и пусть дано разложение $G = AB$, где A — замкнутая, а B — параболическая подгруппы. Мы покажем теперь, что это разложение останется справедливым, если заменить B ее редуктивной подгруппой Леви.

Теорема 4. *Пусть $G = AB$ — разложение связной редуктивной группы G в произведение замкнутой подгруппы A и параболической подгруппы B, L — редуктивная подгруппа Леви в B. Тогда $G = AL$. Если при этом A редуктивна, то $(L \cap A)^0$ — редуктивная подгруппа Леви в $A \cap B$.*

Доказательство. Мы можем считать, что A связна. Прежде всего заметим, что теорема легко сводится к случаю, когда A редуктивна (и даже G и A полупросты). Действительно, пусть G^* — наибольший связный нормальный делитель группы G, содержащийся в B, и пусть $G_1 = G/G^*$, $B_1 = B/G^*$, $A_1 = A/A \cap G^*$. Тогда G_1 и A_1 полупросты по теореме 2. Ясно также, что $L \supseteq G^*$ и что $L_1 = L/G^*$ — редуктивная подгруппа Леви в B_1. Если мы уже знаем, что $G_1 = A_1L_1$, то разложение $G = AL$ будет следовать из леммы 3.

Если фиксировать подгруппу Леви $L \subset B$, то достаточно доказать нашу теорему для любой подгруппы, сопряженной с L в B. Покажем, что сопряженную подгруппу можно выбрать так, чтобы орбита точки $\varepsilon = A$ в G/A под действием этой подгруппы была замкнутой. Как известно, существует такая точка $x_0 \in G/A$, что $L(x_0)$ замкнута в G/A. Но $x_0 = b\varepsilon$, где $b \in B$, поскольку $G = BA$. Значит, $(b^{-1}Lb)(\varepsilon) = b^{-1}L(x_0)$ замкнута в G/A.

Мы можем рассматривать подгруппу Леви $b^{-1}Lb$ вместо L. Будем считать также, что A редуктивна. Тогда G/A — аффинное многообразие (см. [7], [8] для $p = 0$ и [9] для $p > 0$). Поэтому $L(\varepsilon)$, а тем самым и $L/L \cap A$ — аффинные многообразия. Значит, $(L \cap A)^0$ редуктивна (см. [7], [8] для $p = 0$ и [9] для $p > 0$). Пусть V — унипотентный радикал параболической подгруппы $C = A \cap B$ в A. Тогда $L \cap V$ — унипотентный нормальный делитель в $(L \cap C)^0 = (L \cap A)^0$. Значит, $(L \cap V)^0 = \{e\}$ и $\dim(L \cap A) \leqslant \dim C/V$.

С другой стороны, из строения параболических подгрупп в редуктивных группах легко следует, что $\dim V = \dim A/C$. Аналогично для унипотентного радикала U группы B имеем $\dim U = \dim G/B$. Поскольку $G = AB$, то отсюда следует, что $\dim V = \dim U$. Из доказанного вытекает, что $\dim L(\varepsilon) = \dim L/L \cap A \geqslant \dim L - \dim C + \dim V = \dim L - \dim C + \dim U = \dim B - \dim C = \dim B/C = \dim G/A$. Следовательно, $L(\varepsilon) = G/A$, т. е. $G = LA = AL$. Ясно также, что $\dim(L \cap A) = \dim C/V$, откуда $C = (L \cap A)^0V$, т. е. $(L \cap A)^0$ — редуктивная подалгебра Леви в C.

ЛИТЕРАТУРА

1. Онищик А. Л. Разложения редуктивных групп Ли.— Матем. сб., 1969, т. 80 (122) : 4, с. 553—599.
2. Онищик А. Л. О расширениях транзитивных групп преобразований.— Изв. вузов. Матем., 1977, № 3, с. 53—65; 1981, № 7, с. 88.
3. Эльбаради М. Т. Расширения алгебраических групп, транзитивных на проективных многообразиях.— УМН, 1980, т. XXXV, № 2, с. 229—230.
4. Борель А. Линейные алгебраические группы.— М., 1972.— 272 с.
5. Хамфри Дж. Линейные алгебраические группы.— М., 1980.—400 с.
6. Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру.— М., 1972.— 160 с.
7. Онищик А. Л. Комплексные оболочки компактных однородных пространств.— ДАН СССР, 1960, т. 130, № 4, с. 726—729.
8. Matsushima Y. Espaces homogěnes de Stein des groupes de Lie complexes.— Nagoya Math. J., 1960, v. 16, № 2, p. 205—218.
9. Нисневич Е. А. Аффинные однородные пространства и конечные подгруппы арифметических групп над функциональными полями.— Функц. анализ и его прилож., 1977, т. 11, № 1, с. 73—74.

г. Москва

Поступила
11 VII 1979

О. В. Зайцева. Условия корректности задачи Коши для одного модельного уравнения

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

Для оператора с главной частью $(-D_t^2+\alpha D_x^2+\alpha x^2 D_z^2)(-D_t^2+\beta D_y^2+\beta y^2 D_z^2)$ устанавливаются как необходимые, так и достаточные для корректности задачи Коши условия на младшие члены. (Работа поступила в журнал „Математика" 12 XII 1980.)

Г. В. Здебская. Рекурсивно перечислимые множества и предельная вычислимость

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

В работе вводится понятие строго- 1—1П-, *m*- и общерекурсивно-предельно рекурсивных функций наложением ограничений на определение предельно рекурсивной функции, и изучаются их свойства. Из результатов можно отметить, напр., теорему 1, в которой устанавливается, что строго предельно рекурсивные функции лежат во всех рекурсивно перечислимых степенях и только в них, а также теорему 2 о том, что рекурсивно перечислимое множество с бесконечным дополнением гипер-гиперпросто тогда и только тогда, когда оно не 1—1П-сводится к своему дополнению. Показано, что класс *m*-слабо-простых множеств совпадает с классом простых множеств для любого натурального числа *m*, а класс α-слабо простых множеств является собственным подклассом класса простых множеств для общерекурсивных функций α. (Работа поступила в журнал „Математика" 6 II 1981.)

В. П. Ипатов, В. Д. Платонов, И. М. Самойлов. Новый класс троичных последовательностей с идеальными периодическими автокорреляционными свойствами

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

Рассматривается новый класс троичных последовательностей, получаемых отображением следов элементов расширенных полей Галуа на множество $\{0, \pm 1\}$. Предлагаемые последовательности обладают идеальными периодическими автокорреляционными свойствами. Относительная доля нулевых элементов на периоде этих последовательностей может быть сделана как угодно малой за счет увеличения порядка основного поля. (Работа поступила в журнал „Математика" 17 III 1981.)

С. А. Малюгин. О теореме Глисона

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

Предлагается элементарное доказательство одного принципиального фрагмента классической теоремы Глисона о том, что всякая непрерывная реперная функция на сфере является квадратичной формой. (Работа поступила в журнал „Математика" 2 II 1981.)

П. Н. Пронин. О некоторых однолистных интегральных операторах

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

Приводится ряд новых однолистных операторов. Исследуется вопрос об однолистности одного интегрального оператора специального вида, осуществляющего внутри некоторого круга радиуса $r_0<1$ отображение всего класса однолистных функций в себя. (Работа поступила в журнал „Математика" 18 XII 1980.)