Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Б. С. Калитин, К методу сравнения для задачи устойчивости периодических систем,
Дифференц. уравнения, 1987, том 23, номер 3, 423–428

https://www.mathnet.ru/de6134

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.88
20 июня 2025 г., 17:17:37

6. Панасюк А. И. Расчет множеств достижимости систем автоматического управления с помощью уравнения для опорной функции. Минск, 1980. Деп. в БелНИИТИ, 20.11.80, № 214, 2.82-Деп.
7. Vinter R. // Siam. J. Contr. and Optim. 1980. N 6. P. 599—610.
8. Гурман В. И. Вырожденные задачи оптимального управления. М., 1977.
9. Черноусько Ф. Л. // Прикл. мат. и мех. 1981. Т. 45, № 1. С. 11—20.
10. Абраменко С. Н., Балин Е. А., Сейсов Ю. Б. // Изв. АН ТССР. Сер. физ.-техн., хим. наук. 1980. № 4. С. 3—8.
11. Куратовский К. Топология. М., 1969. Т. 2.
12. Филиппов А. Ф. // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151, № 1. С. 65—68.
13. Davy I. L. // Bull. Austral. Math. Soc. 1972. Vol. 6, N 3. P. 379—398.
14. Кротов В. Ф., Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления. М., 1973.

Иркутский государственный университет им. А. А. Жданова

Поступила в редакцию 12 декабря 1984 г.

УДК 517.925.5

Б. С. КАЛИТИН

К МЕТОДУ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Данная работа посвящена развитию метода сравнения В. М. Матросова [1] на случай знакопостоянных вектор-функций Ляпунова. Основной результат — теорема сравнения получена на основе качественного исследования окрестности устойчивой точки покоя.

1. Введение. Пусть D — окрестность начала координат n-мерного векторного пространства $\mathbf{R}^n$ и $f(x, t)$ $(f: D\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n)$ — непрерывная, периодическая по t с периодом $\theta>0$ функция, такая, что через каждую точку $(x_0, t_0)\in D\times[0, \theta[$ проходит единственное решение $x(x_0, t_0, t)$, $x(x_0, t_0, t_0)=x_0$, дифференциального уравнения

$$\dot{x}=f(x, t),\ x\in D,\ f(0, t)=0,\ t\in\mathbf{R}. \tag{1}$$

Напомним, что функция $x(x_0, t_0, t)$, $x: D\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$, непрерывна и в силу периодичности правой части (1) удовлетворяет равенству $x(x_0, t_0+\theta, t+\theta)=x(x_0, t_0, t)$ на всем интервале определения аргумента t.

Множество всех ω-(α)-предельных точек для (x_0, t_0) (см. [2—7]) обозначим соответственно $L^+(x_0, t_0)$ и $L^-(x_0, t_0)$. Обозначим через $\gamma^+(x_0, t_0)$, $\gamma^-(x_0, t_0)$ и $\gamma(x_0, t_0)$ соответственно положительную полутраекторию, отрицательную полутраекторию и траекторию решения $x(x_0, t_0, t)$, т. е. $\gamma^+(x_0, t_0)=\bigcup\limits_{t\geqslant t_0} x(x_0, t_0, t)$, $\gamma^-(x_0, t_0)=\bigcup\limits_{t\leqslant t_0} x(x_0, t_0, t)$, $\gamma(x_0, t_0)=\gamma^+(x_0, t_0)\cup\gamma^-(x_0, t_0)$ (естественно, в том случае, когда решение определено на $[t_0, +\infty[$, $]-\infty, t_0]$ и $\mathbf{R}$). Известно (см., например, [4, 7]), что множества $L^\pm(x_0, t_0)$ замкнуты, а в случае ограниченности решения $x(x_0, t_0, t)$ при $t\to\pm\infty$ непусты и связны. Нетрудно показать, что эти множества инвариантны в том смысле, что $\forall y\in L^\pm(x_0, t_0)$ $\exists\tau\in[0, \theta[$, для которого $\gamma(y, \tau)\subset L^\pm(x_0, t_0)$.

Через $\tilde{L}^\pm(x_0, t_0)$ обозначим множество всех пар (y, τ), $y\in L^\pm(x_0, t_0)$, $\tau\in[0, \theta[$, таких, что $\gamma(y, \tau)\subset L^\pm(x_0, t_0)$. Пусть B_α, $\alpha>0$, означает «шар» $\{x\in\mathbf{R}^n \mid \|x\|<\alpha\}$.

Прежде чем переходить к теореме сравнения, приведем ряд утверждений общего характера относительно свойств устойчивости [1—11] нулевого решения системы (1).

Лемма 1.1. *Если нулевое решение (1) устойчиво, то* $\forall x_0\neq 0$ *и* $\forall t_0\in[0, \theta[$ $0\notin L^-(x_0, t_0)$.

Лемма 1.2. *Если нулевое решение (1) неустойчиво, то всякая окрестность точки* $x=0$ *содержит ненулевую отрицательную полутраекторию.*

Теорема 1.1. *Нулевое решение системы (1) асимптотически*

устойчиво тогда и только тогда, когда существует шар B_Δ, $\Delta>0$, не содержащий ненулевых отрицательных полутраекторий.

Теорема 1.2. *Пусть $D=\mathbf{R}^n$. Нулевое решение (1) глобально асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

i) $\forall(x_0, t_0)\in\mathbf{R}^n\times[0, \theta[$ решение $x(x_0, t_0, t)$ ограничено при $t\geqslant t_0$;

ii) $\forall(x_0, t_0)\in(\mathbf{R}^n\setminus\{0\})\times[0, \theta[$ решение $x(x_0, t_0, t)$ не ограничено при $t\leqslant t_0$.

Замечание. Утверждение, близкое к лемме 1.2, использовалось в работах [9, 10, 12] для автономных систем. Для динамических систем в [6] содержится вариант теоремы 1.1. Для автономных и дискретных систем теорема 1.2 доказана в [10, 13].

2. Теорема сравнения. Наряду с системой (1) будем рассматривать векторное уравнение сравнения [1]

$$\dot{u}=F(u, t),\ u\in\mathbf{R}^m,\ F(0, t)=0, \tag{2}$$

где $F:\psi\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^m$ — непрерывная квазимонотонно возрастающая функция, периодическая по t с периодом θ, а ψ — окрестность нуля в положительном октанте $\{u|u\geqslant 0\}$ пространства $\mathbf{R}^m$. Будем использовать следующие понятия из [1]: $u^+(u_0, t_0, t)$ — максимальное непродолжимое решение уравнения (2), проходящее через точку $(u_0, t_0)\in\psi\times[0, \theta[$; e — постоянный вектор из $\mathbf{R}^m$, такой, что $\{u|0\leqslant u\leqslant e\}\subset\psi$; решение $u=0$ уравнения (2) называется устойчивым, если $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0)(\forall u_0, 0\leqslant u_0\leqslant\delta e)(\forall t_0\in[0, \theta[)\ (\forall t\geqslant t_0)$: $0\leqslant u^+(u_0, t_0, t)\leqslant\varepsilon e$; решение $u=0$ называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и $\exists\Delta>0$ такое, что $u^+(u_0, t_0, t)\to 0$ при $t\to+\infty$ для $0\leqslant u_0\leqslant\Delta e$ и $t_0\in[0, \theta[$; решение $u=0$ называется глобально асимптотически устойчивым, если оно устойчиво, $\psi\supset\{u|u\geqslant 0\}$ и $u^+(u_0, t_0, t)\to 0$ при $t\to+\infty$ для всех $(u_0, t_0)\in\psi\times[0, \theta[$; через $D^+V(x, t)$ обозначим верхнюю правую производную функции $V:D\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^m$ в силу системы (1) [1].

Теорема сравнения. *Пусть существует окрестность W точки $x=0$ в D и непрерывная локально липшицева по x и периодическая по t с периодом θ вектор-функция $V(x, t)$, $V:W\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^m$, такая, что*

1) $V(x, t)\geqslant 0\quad\forall(x, t)\in W\times\mathbf{R}$; $V(0, t)=0\quad\forall t\in\mathbf{R}$;

2) $D^+V(x, t)\leqslant F(V(x, t), t)\quad\forall(x, t)\in W\times\mathbf{R}$;

3) множество $W\setminus\{0\}$ не содержит ограниченных отрицательных полутраекторий $\gamma^-(y, \tau)$, таких, что $V[x(y, \tau, t), t]=0\quad\forall t\leqslant\tau$.

Тогда

а) устойчивость $u=0$ приводит к устойчивости $x=0$;

б) асимптотическая устойчивость $u=0$ обусловливает асимптотическую устойчивость $x=0$;

в) если $W=D=\mathbf{R}^n$, $\psi\supset\{u|u\geqslant 0\}$ и всякое решение (1) ограничено при $t\to+\infty$, то глобальная асимптотическая устойчивость $u=0$ влечет за собой глобальную асимптотическую устойчивость $x=0$.

Доказательство. Пусть выполнены требования 1)—3) и решение $u=0$ уравнения (2) устойчиво. Предположим, что $x=0$ при этом неустойчиво. Тогда, согласно конструкции доказательства леммы 1.2, для любого достаточно малого числа $\varepsilon>0$ можно указать последовательности (x_k), $x_k\in\mathbf{R}^n$, $x_k\to 0$, (t_{0k}), $0\leqslant t_{0k}<\theta$, и (t_k), $t_k\geqslant t_{0k}$, $t_k=\tau_k+\sigma(k)\theta$, $0\leqslant\tau_k<\theta$, $\sigma:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, такие, что последовательность (y_k), $y_k=x(x_k, t_{0k}, t_k)$, $k\in\mathbf{N}$, сходится к y, $\|y\|=\varepsilon$, а последовательность (τ_k) сходится к $\tau\in[0, \theta]$, причем $\gamma^-(y, \tau)\subset\bar{B}_\varepsilon$.

Из устойчивости $u=0$ следует, что $\forall\mu>0\ \exists\nu>0$, для которого $u^+(u_0, t_0, t)<\mu e\quad\forall t\geqslant t_0$, если только $0\leqslant u_0\leqslant\nu e$ и $0\leqslant t_0<\theta$.

Поэтому в предыдущих построениях число $\varepsilon>0$ можно выбрать настолько малым, чтобы на основании непрерывности вектор-функции V следовало неравенство $V(x, t)<\nu e$ при всех $(x, t)\in\bar{B}_\varepsilon\times\mathbf{R}$.

Теперь для каждого значения $t\leqslant 0$ при достаточно большом k $(k\geqslant k_1)$ $t_k+t>t_{0k}$, что по лемме сравнения [1] дает неравенство

$0 \leqslant \max_i V_i[x(x_k, t_{0k}, t_k+t), t_k+t] \leqslant \max_i u_i^+[V(x_k, t_{0k}), t_{0k}, t_k+t]$ или же $0 \leqslant \max_i V_i[x(x(x_k, t_{0k}, t_k), \tau_k, \tau_k+t), \tau_k+t] \leqslant \max_i u_i^+[V(x_k, t_{0k}), t_{0k}, t_k+t]$ $\forall k \geqslant k_1$.

Отсюда с учетом того, что $x_k \to 0$ и $V(x_k, t_{0k}) < \nu$, а также на основании устойчивости $u=0$ и непрерывности V в пределе получаем равенство $V[x(y, \tau, \tau+t), \tau+t]=0$, справедливое при всех $t \leqslant 0$.

Однако поскольку $\gamma^-(y, \tau) \subset \bar{B}_\varepsilon \subset W$, то это равенство противоречит требованию 3) теоремы. Следовательно, $x=0$ устойчиво.

Докажем теперь соотношение б). Действительно, если $u=0$ асимптотически устойчиво, то и устойчиво, а тогда, согласно предыдущему, устойчивым будет и решение $x=0$.

Пусть шар $\bar{B}_\Delta$, $\Delta>0$, $\bar{B}_\Delta \subset W$, обладает тем свойством, что $\forall x \in \bar{B}_\Delta$ вектор $V(x, t)$ принадлежит области притяжения точки $u=0$ при всех $t \in \mathbf{R}$. Покажем, что шар B_Δ не содержит отрицательных полутраекторий (1), кроме $x=0$. На самом деле если это не верно, то $\exists \gamma^-(y, \tau) \subset B_\Delta \setminus \{0\}$. Тогда множество $L^-(y, \tau)$ непусто и инвариантно. Поэтому существует пара $(z, \varkappa) \in \tilde{L}^-(y, \tau)$, т. е., в частности, решение $x(z, \varkappa, t) \in L^-(y, \tau)$ $\forall t \geqslant \varkappa$. По построению $L^+(z, \varkappa)$ непусто и инвариантно. Более того, поскольку $L^+(z, \varkappa) \subset \bar{B}_\Delta$, то по лемме сравнения с учетом 1) и асимптотической устойчивости решения $u=0$ $V[x(z, \varkappa, t), t] \to 0$ при $t \to +\infty$. Отсюда следует, что для любой пары $(z_1, \varkappa_1) \in \tilde{L}^+(z, \varkappa)$ справедливо равенство $V[z_1, \varkappa_1]=0$, а значит, и $V[x(z_1, \varkappa_1, t), t]=0$ $\forall t \leqslant \varkappa_1$. Ясно, что при этом $z_1 \neq 0$, так как $x=0$ устойчиво и $L^-(y, \tau) \not\supset \{0\}$. Последнее противоречит требованию 3) теоремы сравнения. Таким образом, б) доказано.

Наконец рассмотрим в). Так как $u=0$ асимптотически устойчиво, то $x=0$ также асимптотически устойчиво. Покажем, что $\forall r>0$ шар B_r не содержит ненулевых отрицательных полутраекторий. Действительно, пусть существует $\gamma^-(y, \tau) \subset B_r \setminus \{0\}$. Тогда множество $L^-(y, \tau)$ непусто, и в силу устойчивости $x=0$ по лемме 1.1 имеем $0 \notin L^-(y, \tau)$. Поэтому существует пара $(z, \varkappa) \in B_r \times [0, \theta[$ такая, что $\gamma(z, \varkappa) \subset L^-(y, \tau) \setminus \{0\}$.

В силу глобальной асимптотической устойчивости $u=0$ по лемме сравнения следует, что $V[x(z, \varkappa, t), t] \to 0$ при $t \to +\infty$. Как и выше, получаем, что для любой пары $(z_1, \varkappa_1) \in \tilde{L}^+(z, \varkappa)$ $V[z_1, \varkappa_1]=0$ или же $V[x(z_1, \varkappa_1, t), t]=0$ $\forall t \leqslant \varkappa_1$.

Последнее противоречит 3), поскольку $z_1 \neq 0$. Отсюда с учетом требований в) по теореме 1.2 и следует глобальная асимптотическая устойчивость нулевого решения (1).

Замечание 2.1. Проверка требования об ограниченности решений на полубесконечном интервале $\mathbf{R}_+$ в условии в) теоремы сравнения представляет собой самостоятельную задачу. Достаточные условия, обеспечивающие это свойство, могут быть получены на основании использования информации о наличии вектор-функции V (см. [1, 5]). А именно справедлива

Лемма 2.1. *Пусть $D=\mathbf{R}^n$, $\psi \supseteq \{u \mid u \geqslant 0\}$ и существует непрерывная локально липшицева по x и периодическая по t с периодом θ вектор-функция $V(x, t)$ $(V: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m)$, такая, что $\forall (x, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ выполняются условия:*

1) $V(x, t) \geqslant 0$ $(V(0, t)=0$ $\forall t \in \mathbf{R})$;

2) $D^+V(x, t) \leqslant F(V(x, t), t)$.

Тогда если все решения системы (2) ограничены при $t \to +\infty$ и выполняется условие

$$\forall r>0 \text{ множество } H_r=\{x \in \mathbf{R}^n \mid V(x, t) \leqslant r \quad \forall t \in \mathbf{R}\} \text{ не содержит неограниченных при } t \to +\infty \text{ решений системы (1)}, \tag{3}$$

то все решения (1) будут ограниченными при $t \to +\infty$.

Для доказательства этого факта достаточно воспользоваться леммой

сравнения, т. е., как уже отмечалось выше, $\forall(x_0, t_0)\in\mathbf{R}^n\times[0, \theta[$ и $\forall t\geqslant t_0$ $0\leqslant \max\limits_i V_i[x(x_0, t_0, t), t]\leqslant \max\limits_i u_i^+[V(x_0, t_0), t_0, t]$. Теперь поскольку правая часть неравенства ограничена, то на основании (3) и получаем требуемое свойство ограниченности решений (1).

Отсюда вытекает

Следствие. *Пусть выполнены все требования леммы 2.1, кроме 3), и $V(x, t)\to+\infty$ при $\|x\|\to+\infty$ равномерно по $t\in\mathbf{R}$. Тогда все решения (1) ограничены при $t\to+\infty$.*

Действительно, нетрудно показать, что $\forall r>0$ множество H_r, определенное в лемме 2.1, ограничено. Следовательно, оно не может содержать неограниченных при $t\to+\infty$ решений (1). Отсюда по лемме 2.1 и получаем требуемое утверждение.

Пример 2.1. Пусть периодическая система является многосвязной [14], причем состоит из двух подсистем

$$\dot{x}_\mu=X_\mu(x_\mu, t)+\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{m} X_{\mu\nu}(x, y, t)x_\mu, \quad \mu=\overline{1, m}, \tag{4}$$

$$\dot{y}_\mu=Y_\mu(x, y_\mu, t)+\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{k} Y_{\mu\nu}(x, y, t)y_\mu, \quad \mu=\overline{1, l}, \tag{5}$$

где $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $x_\mu\in\mathbf{R}^{n_\mu}$, $\sum\limits_{\mu=1}^{m} n_\mu=n$, $y_\mu\in\mathbf{R}^{k_\mu}$, $\sum\limits_{\mu=1}^{l} k_\mu=k$, $X_\mu(0, t)=0$, $Y_\mu(0, 0, t)=0$.

Предположим, что для каждой из систем $\dot{x}_\mu=X_\mu(x_\mu, t)$ могут быть построены функции Красовского $v^i(x_i, t)$, $v^i:\mathbf{R}^{n_i}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, удовлетворяющие оценкам

$$c_{1i}\|x_i\|^2\leqslant v^i(x_i, t)\leqslant c_{2i}\|x_i\|^2, \quad \dot{v}^i(x_i, t)\leqslant -c_{3i}\|x_i\|^2,$$
$$\|\partial v^i(x_i, t)/\partial x_i\|\leqslant c_{4i}\|x_i\|. \tag{6}$$

Предположим, согласно методу Бейли (см., например, [14]), что матрица $P=(p_{ij})$ системы сравнения для (4), определяемая коэффициентами

$$p_{ii}=-c_{3i}/(2c_{2i}), \quad p_{ij}=(c_{4i}^2/(2c_{1i}c_{3i}))\sum_{\mu=1}^{m}\bar{c}_{\mu i}^2 \quad (j\neq i, \mu\neq i),$$
$$\bar{c}_{\mu i}=\sup_{x, y, t}\|X_{\mu i}(x, y, t)\|,$$

гурвицева.

Рассмотрим вектор-функцию $v=\mathrm{col}\,(v^1, \ldots, v^m, 0, \ldots, 0)$ размерности $m+k$. Нетрудно видеть, что эта функция удовлетворяет требованиям 1), 2) доказанной теоремы сравнения с системой сравнения $\dot{u}=Pu$, $\dot{w}=Qw$, $u\in\mathbf{R}^m$, $w\in\mathbf{R}^k$, где Q — произвольная $(k\times k)$-гурвицева матрица.

Множество состояний (x, y) $(y=(y_1, \ldots, y_k))$, где $v(x, y, t)=0$ $\forall t\in\mathbf{R}$, очевидно, имеет вид $x=0$ и на нем система (3), (4) преобразовывается в систему

$$\dot{y}_\mu=Y_\mu(0, y_\mu, t)+\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{k} Y_{\mu\nu}(0, y, t)y_\mu. \tag{7}$$

Поэтому если нулевое решение этой системы асимптотически устойчиво, то на основании теоремы 1.1 можно указать шар B в пространстве $\mathbf{R}^{m+k}$ с центром в начале, для которого будет выполнено и требование 3) теоремы сравнения (при $W=B$).

Кроме того, заметим, что система (7) также является многосвязной системой Бейли. Поэтому нулевое решение системы (5), (4) будет

асимптотически устойчивым, если выполнены условия теоремы Бейли соответственно для подсистем (4) и (7).

Пример 2.2. Пусть система (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha x + y \sin t - x^3 z^2 \sin^2 t, \\ \dot{y} &= x \sin t - \alpha y - x^2 y z^2 \sin^2 t, \\ \dot{z} &= g(x, y, t) + f(z, t), \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \end{aligned} \tag{8}$$

где α — постоянный параметр, $g(0, 0, t) = f(0, t) = 0$.

Вектор-функция $V(x, y, z, t) = ((x+y)^2, (x-y)^2)^{\mathrm{T}}$ очевидно знакоположительна в $\mathbf{R}^3$, и ее производная по времени в силу системы удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}(x, y, z, t) \leqslant 2 \operatorname{diag} [-\alpha + \sin t, -\alpha - \sin t] V(x, y, z, t).$$

При $\alpha = 0$ система сравнения

$$\dot{u} = 2 \operatorname{diag} [-\alpha + \sin t, -\alpha - \sin t] u$$

устойчива, а при $\alpha > 0$ асимптотически устойчива (глобально). Множество точек (x, y, z), где $V(x, y, z, t) = 0$ $\forall t \in \mathbf{R}$, совпадает с прямой $x = 0$, $y = 0$. Ясно, что эта прямая является инвариантным многообразием. На ней система вырождается в дифференциальное уравнение

$$\dot{z} = f(z, t), \; z \in \mathbf{R}, \; t \in \mathbf{R}. \tag{9}$$

Поэтому из теоремы 1.1 вытекает, что требование 3) теоремы сравнения будет выполнено, если нулевое решение уравнения (9) будет асимптотически устойчиво (либо глобально асимптотически устойчиво для случая в)).

Для асимптотической устойчивости решения $z = 0$ достаточно потребовать существования числа $\Delta > 0$ такого, что

$$z f(z, t) < 0 \text{ при } 0 < |z| < \Delta. \tag{10}$$

Таким образом, при выполнении (10) исследуемая система устойчива, если $\alpha = 0$, и асимптотически устойчива, если $\alpha > 0$.

Далее, поскольку множество H_r, определяемое в лемме 2.1, представляет собой в данном случае множество, где ограничены координаты x и y, то, для того чтобы все решения системы были ограниченными, достаточно потребовать, чтобы они были ограниченными по координате z. Этого можно добиться, если предположить выполненным следующее условие:

$$\begin{aligned} &\forall A > 0 \;\; \exists B > 0 \text{ такое, что } (g(x, y, t) + f(z, t)) z < \\ &< 0 \text{ при } |x| + |y| < A \text{ и } |z| > B. \end{aligned} \tag{11}$$

Действительно, при выполнении (11) функция $v = 0{,}5 z^2$ имеет отрицательную производную в силу системы (8) для ограниченных $|x|$ и $|y|$ и достаточно большого значения $|z|$.

Следовательно, если $\alpha > 0$, выполнено условие (10) $\forall \Delta > 0$ и условие (11), то нулевое решение (8) глобально асимптотически устойчиво.

Литература

1. Матросов В. М. // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 8. С. 1374—1386; 1969. Т. 5, № 12. С. 2130—2143.
2. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М., 1949.
3. Зубов В. И. Методы А. М. Ляпунова и их применение. Л., 1957.
4. Плисс В. А. Нелокальные проблемы теории колебаний. М., 1964.
5. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. М., 1967.
6. Сибирский К. С. Введение в топологическую динамику. Кишинев, 1970.
7. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М., 1980.

8. Еругин Н. П. // Прикл. мат. и мех. 1950. № 5. С. 459—513.
9. Челышева Л. А. // Мат. исследования. 1968. Т. 3, № 1 (7). С. 184—197.
10. Kalitine B. // RAIRO Automatique / Systems Analysis and Control. 1982. Vol. 16, N 3. P. 275—286.
11. Гайшун И. В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. Минск, 1983.
12. Богданов Ю. С. // Докл. АН СССР. 1964. Т. 258, № 1. С. 9—12.
13. Булгаков Н. Г., Калитин Б. С., Покатаев А. В. К устойчивости дискретных автономных систем. М., 1979. Деп. в ВИНИТИ 26.04.79, № 1543—79.
14. Матросов В. М., Анапольский Л. Ю., Козлов Р. И. // Метод функций Ляпунова и его приложения. Новосибирск, 1984. С. 16—33.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию 6 февраля 1985 г.

УДК 517.923

П. И. КУЗНЕЦОВ, А. С. ЮДИНА

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДЕННОГО ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Непосредственно из самого дифференциального уравнения выведены формулы регуляризованных асимптотических разложений фундаментальной системы решений вырожденного гипергеометрического уравнения в комплексной плоскости при больших значениях параметров в окрестности особой точки уравнения. На примере неполной гамма-функции показано, как предполагаемая методика может привести к получению качественно новых асимптотических разложений других специальных функций и решений дифференциальных уравнений, родственных вырожденному гипергеометрическому уравнению, рассматриваемых в математической физике и технике.

1. Случай $b\to\infty$, a и z фиксированы. Вырожденное гипергеометрическое уравнение [1, с. 321]

$$zw''+(b-z)w'-aw=0 \tag{1.1}$$

будем рассматривать в комплексной плоскости z при комплексных параметрах b и a.

Рассмотрим первый случай, когда $b\to\infty$, a и z фиксированы. Введем в рассмотрение малый параметр $\varepsilon=1/b$, $\varepsilon\to 0$, и перейдем от уравнения (1.1) к уравнению

$$\varepsilon zw''+(1-\varepsilon z)w'-\varepsilon aw=0. \tag{1.2}$$

Это уравнение относится к сингулярно возмущенным уравнениям с регулярной особой точкой $z=0$. Ранее такого вида уравнения рассматривались, например, в работах [2, 3].

Для структуры фундаментальной системы решений уравнения (1.2) при $\varepsilon\to 0$ справедлива

Теорема 1. *Фундаментальная система решений уравнения (1.2) имеет вид*

$$w_1(z,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k(z), \tag{1.3}$$

$$w_2(z,\varepsilon)=z^{1-1/\varepsilon}\exp(z)\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(z), \tag{1.4}$$

где функции $u_k(z)$, $v_k(z)$ определяются из рекуррентных соотношений

$$u_0(z)=1,\quad u_k(z)=\int_0^z (au_{k-1}(z)+zu'_{k-1}(z)-zu''_{k-1}(z))\,dz, \tag{1.5}$$