УДК 517.955

ХРОНОЛОГИЧЕСКИЕ РЯДЫ И ТЕОРЕМА КОШИ—КОВАЛЕВСКОЙ

А. А. Аграчев, С. А. Вахрамеев

В этой работе рассматривается задача Коши для системы дифференциальных уравнений с частными производными

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} u(t, x) = \\ = f\left(t, x, u(t, x), \ldots, \frac{\partial^{k+|\alpha|} u(t, x)}{\partial t^k, (\partial x^1)^{\alpha_1} \ldots (\partial x^n)^{\alpha_n}}, \ldots\right),$$

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j} u(t, x)|_{t=t_0} = \varphi_j(x), \quad x \in G \subset R^n, \tag{1}$$

$$j = 0, 1, \ldots, m-1$$

относительно N-мерной функции u. Здесь f—некоторая N-мерная функция, зависящая от t, x, u и всех частных производных от u вида

$$\frac{\partial^{k+|\alpha|}}{\partial t^k (\partial x^1)^{\alpha_1} \ldots (\partial x^n)^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| + k \leqslant m, \quad k < m,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Классическая теорема Коши—Ковалевской утверждает, что если функции f, φ_k, $k=0, 1, \ldots, m-1$, аналитичны по всем своим аргументам в соответствующих областях, то существует единственное аналитическое решение этой системы, определенное в некоторой достаточно малой окрестности произвольной начальной точки $(t_0, x_0) \in R \times G$.

Несмотря на то, что эта теорема известна уже много лет, предмет настолько важен, что вопрос о возможности ее усиления и обобщения в разных направлениях постоянно находится в поле зрения специалистов. Мы не даем здесь изложения истории вопроса, а отсылаем читателя за подробностями к работам [4, 7]. Отметим только работу [6], в которой доказана абстрактная теорема Коши—Ковалевской в предположении лишь непрерывности правой части уравнения по t.

В настоящей работе для решения задачи Коши (1) мы используем технику хронологических рядов, развитую в [1,2].

Представления решения в виде хронологического ряда дает возможность:

1) Доказать существование решения задачи Коши (1) в предположении лишь измеримости (и локальной суммируемости) правой части по t. Это существенно, например, для теории оптимального управления.

2) Получить относительно явные формулы, выражающие решение через начальные условия и правую часть.

3) В некоторых случаях, получить простые оценки с явно вычисленными константами интервала времени t, на котором существует решение, нормы решения остаточного члена хронологического ряда.

При доказательстве мы сначала строим формальное решение задачи Коши в виде хронологического ряда, а затем доказываем сходимость этого ряда.

Отдельно рассматривается случай линейной системы и случай скалярного квазилинейного уравнения. Это делается по следующим причинам.

В линейном случае хронологический ряд вычисляется особенно просто, а доказательство его сходимости мало чем отличается от доказательства сходимости хронологического ряда Вольтерра, в случае обыкновенного дифференциального уравнения (см. [1]). Здесь получаются удобные явные оценки общего члена ряда. В скалярном квазилинейном случае формулы еще компактнее, к тому же полученные здесь оценки используются при доказательстве сходимости общего хронологического ряда.

Опишем теперь обозначения, используемые в настоящей работе.

Как обычно, через R^n обозначается действительное n-мерное арифметическое векторное пространство, точки которого мы трактуем как векторы-столбцы и всегда обозначаем латинскими буквами; векторы-строки мы обозначаем греческими буквами. Скалярное произведение вектора-строки на вектор-столбец одинаковых размерностей мы будем записывать в виде матричного умножения

$$\xi \cdot x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \sum_{\alpha=1}^{n} \xi_\alpha x^\alpha.$$

Якобиеву матрицу m-мерной векторной функции $x \mapsto g(x)$ по координатам вектора $x \in R^n$ обозначим через

$$\operatorname{grad} g(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x} = (\partial_\beta g^\alpha(x)),$$

$$\alpha = 1, \ldots, m, \quad \beta = 1, \ldots, n, \quad \partial_\beta = \frac{\partial}{\partial x^\beta}.$$

Модулем вектора $x \in R^n$ мы называем величину

$$|x| = \max_{1 \leqslant \alpha \leqslant n} |x^\alpha|,$$

соответственно,

$$|\xi| = \sum_{\beta=1}^{n} |\xi_\beta|$$

— модуль n-мерной вектор-строки $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Модуль $|A|$ $n \times m$-матрицы $A = (a^\alpha_\beta)$, $\alpha = 1, \ldots, n$, $\beta = 1, \ldots, m$, есть, по определению,

$$|A| = \sum_{\beta=1}^{m} \max_{1 \leqslant \alpha \leqslant n} |a^\alpha_\beta|.$$

Через Id_X мы обозначает тождественное отображение множества X. Если из контекста ясно, о каком множестве X идет речь, то мы пишем просто Id.

В заключение мы выражаем глубокую благодарность Р. В. Гамкрелидзе, который предложил применить технику статьи [1] к уравнениям с частными производными и относился к этой работе с постоянным вниманием.

§ 1. Подготовительный материал

В этом параграфе мы приводим исходные понятия и факты из анализа и алгебры, которые будут использованы ниже. Некоторые из них обществестны, а с более обстоятельным изложением других можно познакомиться в работе [1].

1. Дифференцирования в алгебрах. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная действительная алгебра, т. е. действительное векторное пространство, в котором определено умножение, удовлетворяющее единственному условию билинейности. Таким образом, алгебра $\mathfrak{A}$ может быть неассоциативной и не иметь единицы.

Через $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$ мы обозначаем ассоциативную алгебру всех линейных отображений векторного пространства $\mathfrak{A}$ в себя. Умножение элементов T_1, $T_2 \in \mathscr{L}(\mathfrak{A})$ определяется, как их композиция

$$T_1 T_2 = T_1 \circ T_2 \quad \forall T_1, T_2 \in \mathscr{L}(\mathfrak{A}).$$

Линейное отображение $\delta \in \mathscr{L}(\mathfrak{A})$ называется дифференцированием алгебры $\mathfrak{A}$, если оно удовлетворяет формальному правилу дифференцирования произведения

$$\delta(ab) = (\delta a) b + a (\delta b) \quad \forall a, b \in \mathfrak{A}. \tag{1.1}$$

Множество $\mathrm{Der}(\mathfrak{A})$ всех дифференцирований алгебры $\mathfrak{A}$ образует алгебру Ли с умножением

$$[\delta_1, \delta_2] = \delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1.$$

Пусть $\delta_j \in \mathrm{Der}(\mathfrak{A})$, $j = 1, 2, \ldots, m$, — произвольные дифференцирования алгебры $\mathfrak{A}$. Оказывается, что имеет место формула

$$\delta_m\circ\ldots\circ\delta_1(ab)=\sum_{\alpha+\beta=m}\sum_{\pi\in S(\alpha,\beta)}$$

$$(\delta_{\pi(m)}\circ\ldots\circ\delta_{\pi(\alpha+1)}(a))(\delta_{\pi(\alpha)}\circ\ldots\circ\delta_{\pi(1)}(b))\quad\forall a,b\in\mathfrak{A},\tag{1.2}$$

где $S(\alpha,\beta)$, $\alpha+\beta=m$ — множество всех перестановочных чисел $1, 2, \ldots, m$, сохраняющих порядок первых α и отдельно последних β чисел.

Доказательство формулы (1.2) основано на формуле (1.1) и проводится очевидной индукцией по m.

В частном случае, когда $\delta_j=\delta$, $j=1,\ldots,m$, из (1.2) получается формула Лейбница

$$\delta^m(ab)=\sum_{\alpha+\beta=m}\frac{m!}{\alpha!\beta!}(\delta^\alpha a)(\delta^\beta b)\quad\forall a,b\in\mathfrak{A},$$

где $\delta^0=\mathrm{Id}$, $\delta^{k-1}=\delta\circ\delta^k=\delta^k\circ\delta$.

2. Однопараметрические семейства функций. Обозначим через $\Phi(G)$ алгебру всех бесконечно дифференцируемых функций, определенных в области $G\subset R^n$. Через $\Phi^N(G)$ мы будем обозначать декартово произведение N экземпляров $\Phi(G)$.

Пусть $h\in R^n$. Обозначим через $\vec{h}$ линейный дифференциальный оператор первого порядка

$$\vec{h}=\sum_{\alpha=1}^{n}h^\alpha\partial_\alpha,\qquad \partial_\alpha=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

и положим для $\forall\varphi\in\Phi(G)$

$$\|\varphi\|_{s,M}=\max_{x\in M}\sum_{k=0}^{s}\frac{1}{k!}\max_{h=1}|\vec{h}^k\varphi(x)|.$$

Здесь $M\subset G$ — компакт, а s — целое, $\geqslant 0$.

Очевидно, что с помощью семейства полунорм $\|\cdot\|_{s,M}$ мы превращаем $\Phi(G)$ в пространство Фреше (полное метризуемое локально выпуклое).

Ниже мы увидим, что в тех уравнениях с частными производными, которые мы рассматриваем в этой статье, переменные t и x играют совершенно различную роль. Поэтому нас будут особо интересовать однопараметрические семейства φ_t, $t\in R$ элементов $\Phi(G)$, на которые стандартным образом переносятся все основные конструкции анализа.

Именно, непрерывность и дифференцируемость семейства φ_t, $t\in R$ элементов $\Phi(G)$ определяется очевидным образом, в силу того, что $\Phi(G)$ — линейное топологическое пространство.

Скажем, что семейство φ_t, $t\in R$ измеримо, если $\forall x\in G$ измерима скалярная функция

$$t\mapsto\varphi_t(x).$$

Говорят, что измеримое семейство φ_t, $t\in R$, локально интегрируемо, если $\forall t_1, t_2\in R$, $s=0, 1, \ldots$, и компакта $M\subset G$

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\varphi_\tau\|_{s,M}\, d\tau < \infty.$$

Интегралом локально интегрируемого семейства φ_t, $t\in R$, в заданных пределах от t_1 до t_2 мы называем функцию

$$x\mapsto\int_{t_1}^{t_2} \varphi_\tau(x)\, d\tau.$$

Можно доказать (см. [1]), что эта функция принадлежит $\Phi(G)$ и справедлива формула

$$\vec{h}_1\circ\ldots\circ\vec{h}_k\int_{t_1}^{t_2}\varphi_\tau d\tau=\int_{t_1}^{t_2}\vec{h}_1\circ\ldots\circ\vec{h}_k\varphi_\tau d\tau \quad \forall h_1, \ldots, h_k\in R^n,$$

из которой вытекает неравенство

$$\left\|\int_{t_1}^{t_2}\varphi_\tau d\tau\right\|_{s,M}\leqslant\int_{t_1}^{t_2}\|\varphi_\tau\|_{s,M}\, d\tau \quad \forall s\geqslant 0, \quad M\subset G.$$

Семейство φ_t, $t\in R$, называется абсолютно непрерывным, если существует такое локально интегрируемое семейство ψ_t, $t\in R$, что

$$\varphi_t=\varphi_{t_0}+\int_{t_0}^{t}\psi_\tau d\tau.$$

Оказывается, что в этом случае при почти всех $t\in R$

$$\frac{d\psi_t}{dt}=\psi_t.$$

Действительно, ясно, что топология пространства $\Phi(G)$ может быть задана с помощью счетного числа полунорм $\|\cdot\|_{s,M_j}$, где $M_j\subset G$ — компакт, $j=1, 2,\ldots$, $s=0, 1, 2,\ldots$.

Легко видеть, что существует множество $T_{s,j}$ такое, что $\operatorname{mes}(R\setminus T_{s,j})=0$ и $\forall x\in M_j$, $t\in T_{s,j}$

$$\int_{t}^{t+\Delta t}\vec{h}^k\psi_\tau(x)\, d\tau=\vec{h}^k\psi_t(x)\,\Delta t+\beta_k(\Delta t;\ x,\ h)\,\Delta t,$$

где $\beta_k(\Delta t;\ x,\ h)\to 0$ при $\Delta t\to 0$ равномерно относительно $x\in M_j$, $|h|=1$. Следовательно,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left\|\frac{1}{\Delta t}\{\varphi_{t+\Delta t}-\varphi_t\}-\psi_t\right\|_{s,M_j}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\max_{x\in M_j}\sum_{k=0}^{s}\frac{1}{k!}\max_{|h|=1}\left|\vec{h}^k\left\{\frac{1}{\Delta t}\int_{t}^{t+\Delta t}\psi_\tau d\tau-\psi_t\right\}\right|=$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \max_{x \in M_j} \sum_{k=0}^{s} \frac{1}{k!} \left| \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \vec{h}^k \psi_\tau d\tau - \vec{h}^k \psi_t \right| =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \max_{x \in M_j} \sum_{k=0}^{s} \max_{|h|=1} |\beta_k (\Delta t;\ x,\ h)| \frac{1}{k!} = 0.$$

Положим $T = \bigcap_{s=0}^{\infty} \bigcap_{j=0}^{\infty} T_{s,j}$, тогда $\mathrm{mes}\,(R \setminus T) = 0$ и $\forall t \in R$ $\frac{d\varphi_t}{dt} = \psi_t$, что и требовалось доказать.

Все введенные выше понятия (за исключением абсолютной непрерывности) естественно переносятся и на семейства

$$\varphi_{\tau_1, \ldots, \tau_m}, \quad \tau_j \in R, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

элементов $\Phi(G)$, зависящие от m параметров $\tau_1, \ldots, \tau_m$. Кроме того, очевидным образом определяются соответствующие понятия для семейств φ_t, $t \in R$, элементов $\Phi^N(G)$. Так, например, семейство φ_t, $t \in R$, элементов $\Phi^N(G)$. называется локально интегрируемым, если локально интегрируемо семейство φ_t^j, $t \in R$, $j = 1, 2, \ldots, N$, элементов $\Phi(G)$, а интегралом локально интегрируемого семейства φ_t, $t \in R$ элементов $\Phi^N(G)$ называется элемент

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_\tau d\tau = \begin{pmatrix} \int_{t_1}^{t_2} \varphi_\tau^1 d\tau \\ \vdots \\ \int_{t_1}^{t_2} \varphi_\tau^N d\tau \end{pmatrix} \in \Phi^N(G).$$

В m-мерном пространстве точек $\tau^{(m)} = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$ символом $\Delta_{t_0, t}(\tau^{(m)})$ мы будем обозначать симплекс

$$\Delta_{t_0, t}(\tau^{(m)}) = \{(\tau_1, \ldots, \tau_m) \mid t_0 \leqslant \tau_m \leqslant \ldots \leqslant \tau_1 \leqslant t\}.$$

Если π — произвольная перестановка чисел $1, 2, \ldots, m$, то символом $\Delta_{t_0, t}(\pi\tau^{(m)})$ обозначается симплекс

$$\Delta_{t_0, t}(\pi\tau^{(m)}) = \{(\tau_1, \ldots, \tau_m) \mid t_0 \leqslant \tau_{\pi(m)} \leqslant \ldots \leqslant \tau_{\pi(1)} \leqslant t\}.$$

Имеет место очевидное равенство

$$\Delta_{t_0, t}(\tau^{(\alpha)}) \times \Delta_{t_0, t}(\tau^{\beta}) = \bigcup_{\pi \in S(\alpha, \beta)} \Delta_{t_0, t}(\pi^{-1}\tau^{(m)})$$

$$\forall \alpha,\ \beta \quad \alpha + \beta = m.$$

Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\tau^{(m)})$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\tau^{(m)})$ — локально интегрируемые функции со значениями в $\Phi(G)$.

Тогда $\forall \alpha$, β, $\alpha + \beta = m$ имеем:

$$\int_{\Delta_{t_0, t}(\tau^{(\alpha)})} \mathcal{A}(\tau^{(\alpha)})\, d\tau^{(\alpha)} \int_{\Delta_{t_0, t}(\tau^{(\beta)})} \mathcal{B}(\tau^{(\beta)})\, d\tau^{(\beta)} =$$

$$= \int\limits_{\Delta_{t_0,t}(\tau^{(\alpha)})\times\Delta_{t_0,t}(\tau^{(\beta)})} \mathcal{A}(\tau^{(\alpha)})\,\mathcal{B}(\tau^{(\beta)})\,d\tau^{(\alpha)}\otimes d\tau^{(\beta)} =$$

$$= \sum_{\pi\in S(\alpha,\beta)} \int\limits_{\Delta_{t_0,t}(\tau^{(m)})} \mathcal{A}(\tau_{\pi(1)},\ldots,\tau_{\pi(\alpha)})\,\mathcal{B}(\tau_{\pi(\alpha+1)},\ldots,\tau_{\pi(m)})\,d\tau^{(m)}.$$

Отсюда вытекает важное соотношение

$$\int\limits_{t_0}^{t} d\tau_1 \ldots \int\limits_{t_0}^{\tau_{\alpha-1}} d\tau_{(\alpha)}\mathcal{A}(\tau_1,\ldots,\tau_\alpha)\,d\tau^{(\alpha)} \times$$

$$\times \int\limits_{t_0}^{t} d\tau_1 \ldots \int\limits_{t_0}^{\tau_{\beta-1}} d\tau^{(\beta)}\mathcal{B}(\tau_1,\ldots,\tau_{(\beta)})\,d\tau^{(\beta)} =$$

$$= \sum_{\pi\in S(\alpha,\beta)} \int\limits_{t_0}^{t} d\tau_1 \ldots \int\limits_{t_0}^{\tau_{m-1}} d\tau_m \mathcal{A}(\tau_{\pi(1)},\ldots,\tau_{\pi(\alpha)}) \times$$

$$\times \mathcal{B}(\tau_{\pi(\alpha+1)},\ldots,\tau_{\pi(m)})\,d\tau^{(m)}. \qquad (1.3)$$

§ 2. Существование решения задачи Коши

В этом параграфе мы докажем уже упомянутую во введении более сильную теорему существования решения задачи Коши. Отметим, прежде всего, что достаточно рассматривать системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, правая часть которых не содержит пространственного переменного x, т. е. системы вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f\left(t,\, u,\, \frac{\partial u}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x^n}\right), \qquad (2.1)$$

$$u(t_0, x) = u_0(x), \quad x\in G\subset R^n.$$

Сведение общей системы дифференциальных уравнений с частными производными (1) к такому виду производится обычным путем — введением дополнительных неизвестных функций и последующим дифференцированием (см., например, [3]). С системой вида (2.1) мы и будем иметь дело далее.

Обратимся сначала к рассмотрению частного случая линейной системы.

1. Случай линейной системы. Рассмотрим линейную систему с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial v}{\partial t} = B_0(t, x)v + B_1(t, x)\frac{\partial v}{\partial x^1} + \ldots + B_n(t, x)\frac{\partial v}{\partial x^n},$$

$$v(t_0, x) = u_0(x), \quad x\in G\subset R^n.$$

Ниже мы увидим, что переменные t и x играют совершенно различную роль в этой системе. Поэтому нам будет удобно трактовать N^2-значные функции

$$B_i: R\times R^n \to R^{N^2}$$

как семейства

$$B_i = \{A_t^{(i)};\ t\in R\}$$

бесконечно дифференцируемых отображений

$$A_t^{(i)} = B(t,\ \cdot):\quad R^n \to R^{N^2}.$$

Мы будем считать, что семейства $A_t^{(k)}$, $t\in R$, являются локально интегрируемыми семействами в $\Phi^{N^2}(G)$. В соответствии с этим, мы будем записывать исследуемую нами задачу Коши в виде

$$\frac{d}{dt}u_t = \sum_{k=0}^{n} A_t^{(k)}\partial_k u_t, \quad u_{t_0} = u_0 \in \Phi^N(G), \tag{2.2}$$

где $\partial_k = \dfrac{\partial}{\partial x^k}$, $\partial_0 = \mathrm{Id}$, и рассматривать ее как уравнение относительно семейства u_t, $t\in R$, бесконечно гладких N-мерных функций. Более точно, решением уравнения (2.2) мы будем называть абсолютно непрерывное семейство u_t, $t\in J$, элементов $\Phi^N(G')$, где J — интервал вещественной оси, содержащий точку t_0, а G' — подобласть области G, такое, что при почти всех $t\in J$

$$\frac{d}{dt}u_t = \sum_{k=0}^{n} A_t^{(k)}\partial_k u_t,$$

а $u_{t_0} = u_0$ в $\Phi^N(G')$.

В силу предположения об абсолютной непрерывности, задача (2.2) эквивалентна интегральному уравнению

$$u_t = u_0 + \sum_{k=0}^{n}\int_{t_0}^{t} A_\tau^{(k)}\partial_k u_\tau d\tau. \tag{2.3}$$

Будем решать уравнение (2.3) последовательными подстановками:

$$u_t = u_0 + \sum_{k=0}^{n}\int_{t_0}^{t} A_\tau^{(k)}\partial_k u_\tau d\tau = u_0 + \sum_{k_1=0}^{n}\int_{t_0}^{t} A_\tau^{(k_1)}\partial_{k_1} u_0 d\tau +$$
$$+ \sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n}\int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 A_{\tau_1}^{(k_1)}\partial_{k_1} A_{\tau_2}^{(k_2)}\partial_{k_2} u_{\tau_2} = \ldots.$$

Возникающий формальный ряд

$$F_{t,t_0}(u_0) = \Bigg(\mathrm{Id} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{n}\cdots\sum_{k_m=0}^{n}\int_{t_0}^{t} d\tau_1 \ldots \int_{t_0}^{\tau_{m-1}} d\tau_m A_{\tau_1}^{(k_1)}\partial_{k_1}\ldots .$$
$$\ldots A_{\tau_m}^{(k_m)}\partial_{k_m}\Bigg) u_0. \tag{2.4}$$

называется хронологическим рядом задачи Коши (2.3) или (2.2).

Пусть V — комплексное расширение области $G \subset R^n$. Обозначим через $\Omega(V)$ банахово пространство всех ограниченных аналитических в области V функций $\varphi: V \to C$ с нормой

$$\|\varphi\|_V^{C^n} = \sup_{z \in V} |\varphi(z)|.$$

Пусть $\Omega^k(V)$ — декартово произведение k экземпляров $\Omega(V)$. Для $v \in \Omega^k(V)$ положим

$$\|v\|_V^{C^n} = \max_{1 \leqslant j \leqslant k} \|v^k\|_V^{C^n}.$$

Предложение 2.1. Если $A_t^{(k)} \in \Omega^{N^2}(V)$, $u_0 \in \Omega^N(V)$ и функции

$$t \mapsto \|A_t^{(\alpha)}\|_V^{C^n}, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, n,$$

локально интегрируемы, то, какова бы ни была подобласть V', расстояние от границы которой до границы области V больше некоторого $\varepsilon > 0$, существует такое $\rho > 0$, что ряд

$$F_{t,t_0}(u_0(z)) = \Bigg(\mathrm{Id} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{n} \ldots \sum_{k_m=0}^{n} \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \ldots$$

$$\ldots \int_{t_0}^{\tau_{m-1}} d\tau_m A_{\tau_1}^{(k_1)}(z)\, \partial_{k_1} \ldots A_{\tau_m}^{(k_m)}(z)\, \partial_{k_m}\Bigg) u_0(z)$$

сходится абсолютно и равномерно при $|t - t_0| < \rho$, $z \in V'$.

Доказательство. Для любого $z \in V'$, в силу интегральной формулы Коши

$$A_{\tau_\alpha}^{k_\alpha}(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_1} \ldots \int_{C_n} A_{\tau_\alpha}^{(k_\alpha)}(\xi_\alpha) \frac{d\xi_\alpha}{\Pi_{\xi_\alpha}(z)},$$

$$u_0(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_1} \ldots \int_{C_n} \frac{u_0(\xi)}{\Pi_\xi(z)}\, d\xi,$$

где $\Pi_{\xi_\alpha} = (\xi_\alpha^1 - z^1) \ldots (\xi_\alpha^n - z^n)$, а C_k — окружность радиуса ε с центром в точке z^k.

Следовательно, мы имеем

$$A_{\tau_1}^{(k_1)}(z)\, \partial_{k_1} A_{\tau_2}^{(k_2)}(z) \ldots A_{\tau_m}^{(k_m)}(z)\, \partial_{k_m} u_0(z) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^{n(m+1)}} \int_{C_1} \ldots \int_{C_n} \ldots \int_{C_1} \ldots \int_{C_n} A_{\tau_1}^{(k_1)}(\xi_1) \ldots$$

$$\ldots A_{\tau_m}^{(k_m)}(\xi_m)\, u_0(\xi)\, \chi_{\xi_1, \ldots, \xi_m, \xi}^{k_1, \ldots, k_m}(z)\, d\xi_1 \ldots d\xi_m\, d\xi,$$

где

$$\chi^{k_1,\ldots,k_m}_{\xi_1,\ldots,\xi_m,\xi}(z)=\frac{1}{\Pi_{\xi_1}(z)}\partial_{k_1}\frac{1}{\Pi_{\xi_2}(z)}\ldots\partial_{k_m}\frac{1}{\Pi_{\xi}(z)},$$

$$\partial_{k_j}=\frac{\partial}{\partial z^{k_j}},\qquad \partial_0=\mathrm{Id}.$$

При $|\xi^\alpha_k-z^\alpha|\geqslant\varepsilon$, $|\xi^\alpha-z^\alpha|\geqslant\varepsilon$, $k=1, 2, \ldots, m$, $\alpha=1, 2, \ldots, n$, имеет место неравенство

$$\left|\chi^{k_1,\ldots,k_m}_{\xi_1,\ldots,\xi_m,\xi}(z)\right|\leqslant\frac{2^m m!}{\delta^n\delta^{m(n+1)}},$$

где $\delta=\min\{1, \varepsilon\}$. Эта оценка доказывается прямой индукцией по m (см. аналогичную оценку в [1]).

Следовательно, $\forall z\in V'$, $m=1, 2, \ldots$, имеем

$$\left|\sum_{k_1=0}^{n}\ldots\sum_{k_m=0}^{n}\int_{t_0}^{t}d\tau_1\ldots\int_{t_0}^{\tau_{m-1}}d\tau_m A^{(k_1)}_{\tau_1}(z)\,\partial_{k_1}A^{(k_2)}_{\tau_2}(z)\ldots\right.$$

$$\left.\ldots A^{(k_m)}_{\tau_m}(z)\,\partial_{k_m}u_0(z)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^m m!}{\delta^{m(n+1)}}(n+1)^m\int_{t_0}^{t}d\tau_1\ldots\int_{t_0}^{\tau_{m-1}}d\tau_m\|A_{\tau_1}\|^{C^n}_V\ldots$$

$$\ldots\|A_{\tau_m}\|^{C^n}_V\|u_0\|^{C^n}_V,$$

где

$$\|A_{\tau_k}\|^{C^n}_V=\max_{0\leqslant j\leqslant n}\|A^{(j)}_{\tau_k}\|^{C^n}_V.$$

Так как

$$\int_{t_0}^{t}d\tau_1\ldots\int_{t_0}^{\tau_{m-1}}d\tau_m\|A_{\tau_1}\|^{C^n}_V\ldots\|A_{\tau_m}\|^{C^n}_V=\frac{1}{m!}\left(\int_{t_0}^{t}\|A_\tau\|^{C^n}_V d\tau\right)^m,$$

то имеем оценку

$$\left\|\sum_{k_1=0}^{n}\ldots\sum_{k_m=0}^{n}\int_{t_0}^{t}d\tau_1\ldots\int_{t_0}^{\tau_{m-1}}d\tau_m\times\right.$$

$$\left.\times A^{(k_1)}_{\tau_1}\partial_{k_1}A^{(k_m)}_{\tau_m}\ldots A^{(k_m)}_{\tau_m}\partial_{k_m}u_0\right\|^{C^n}_V\leqslant$$

$$\leqslant\left[\frac{2(n+1)}{\delta^{n+1}}\right]^m\left(\int_{t_0}^{t}\|A_\tau\|^{C^n}_V d\tau\right)^m\|u_0\|^{C^n}_V,$$

из которой следует утверждение предположения 2.1.

Используя абсолютную и равномерную сходимость ряда

$$F_{t,t_0}(u_0(z)) = u_0(z) + \int_{t_0}^{t} d\tau \sum_{k=0}^{n} A_\tau^{(k)}(z)\,\partial_k u_0(z) + \ldots,$$

мы получаем при выполнении условий предложения 2.1

$$\frac{d}{dt} F_{t,t_0}(u_0(z)) = \sum_{k=0}^{n} A_t^{(k)}(z)\,\partial_k \{u_0(z) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{n} \ldots \sum_{k_m=0}^{n} \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \ldots \int_{t_0}^{\tau_{m-1}} d\tau_m \times$$

$$\times A_{\tau_1}^{(k_1)}(z)\,\partial_{k_1} \ldots A_{\tau_m}^{(k_m)}(z)\,\partial_{k_m} u_0(z)\Big\} = \sum_{k=0}^{n} A_t^{(k)}(z)\ \partial_k F_{t,t_0}(u_0(z)),$$

$$F_{t_0,t_0}(u_0(z)) = u_0(z),$$

но это и означает, что ряд $F_{t,t_0}(u_0)$ является решением уравнения (2.2).

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.1. Пусть $A_t^{(k)}$, $t \in R$, — локально интегрируемое семейство в $\Phi^{N^2}(G)$ и

$$u_0 \in \Omega^N(V), \quad A_t^{(k)} \in \Omega^{N^2}(V) \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

причем функции

$$t \mapsto \| A_t^{(k)} \|_V^{C^n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

локально интегрируемы по Лебегу. Здесь $V \subset C^n$ — некоторая область, содержащая $G \subset R^n$.

Тогда, какова бы ни была подобласть $V' \subset V$, расстояние от границы которой до границы области V больше некоторого $\varepsilon > 0$, ряд

$$F_{t,t_0}(u_0(z)) = u_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{n} \ldots \sum_{k_m=0}^{n} \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \ldots$$

$$\ldots \int_{t_0}^{\tau_{m-1}} d\tau_m A_{\tau_1}^{(k_1)}(z)\,\partial_{k_1} \ldots A_{\tau_m}^{(k_m)}(z)\,\partial_{k_m} u_0(z)$$

сходится абсолютно и равномерно при всех $z \in V'$ и тех t, для которых

$$\left| \frac{2(n+1)}{\delta^{n+1}} \int_{t_0}^{t} \| A_\tau \|_V^{C^n} d\tau \right| \leqslant \rho < 1,$$

где

$$\delta = \min\{1, \varepsilon\}, \quad \| A_t \|_V^{C^n} = \max_{0 \leqslant j \leqslant n} \| A_t^{(j)} \|_V^{C^n}$$

и является решением задачи Коши

$$\frac{du_t}{dt}=\sum_{k=0}^{n} A_t^{(k)}\partial_k u_t, \quad u_{t_0}=u_0.$$

При этом справедлива оценка

$$\|F_{t,t_0}(u_0)\|_V^{C^n}\leqslant\frac{\|u_0\|_V^{C^n}}{1-\frac{2(n+1)}{\delta^{n+1}}\left|\int\limits_{t_0}^{t}\|A_\tau\|_V^{C^n}d\tau\right|}.$$

2. Формальное решение задачи Коши (общий случай). Вернемся к рассмотрению общей системы дифференциальных уравнений с частными производными типа (2.1)

$$\begin{gathered}\frac{\partial v}{\partial t}=g(t, v, \partial_1 v, \ldots, \partial_n v),\\ v(t_0, x)=u_0(x), \quad x\in G\subset R^n.\end{gathered} \tag{2.5}$$

Как и в линейном случае, правую часть g этого уравнения нам удобно рассматривать как семейство

$$g=\{f_t;\ t\in R\}$$

гладких отображений

$$f_t=g(t,\cdot): R^p\to R^N, \text{ где } p=(n+1)N.$$

Поэтому мы будем записывать уравнение (2.5) в виде

$$\begin{gathered}\frac{du_t}{dt}=f_t(u_t, \partial_1 u_t, \ldots, \partial_n u_t),\\ u_{t_0}=u_0\end{gathered} \tag{2.6}$$

и говорить, что абсолютно непрерывное семейство u_t, $t\in J$, является решением (2.6), если при почти всех $t\in J$

$$\frac{du_t}{dt}=f_t(u_t, \partial_1 u_t, \ldots, \partial_n u_t)$$

и $u_{t_0}=u_0$ в $\Phi^N(G')$.

Здесь J — интервал вещественной оси, содержащий точку t_0, а G' — подобласть области G, возможно совпадающая с ней.

Наши основные предположения заключаются в том, что $u_0\in\Phi^N(G)$, а семейство f_t, $t\in R$, разлагается в ряд Маклорена*

$$f_t^j(u, \partial_1 u, \ldots, \partial_n u)=\sum_{\alpha^{(0)},\ldots,\alpha^{(n)}} a_t^{j,\alpha^{(0)},\ldots,\alpha^{(n)}}\times$$
$$\times(u)^{\alpha^{(0)}}(\partial_1 u)^{\alpha^{(1)}}\ldots(\partial_n u)^{\alpha^{(n)}}, \quad j=1, 2, \ldots, N,$$

* Очевидно, что путем замены неизвестной функции к этому случаю сводится случай произвольной системы, правая часть которой аналитична по всем аргументам, кроме t

радиус сходимости которого $R_t \geqslant R > 0$. Здесь

$$\alpha^{(k)} = (\alpha_1^{(k)}, \ldots, \alpha_N^{(k)}),$$

$$(\partial_k u)^{\alpha^{(k)}} = (\partial_k u^1)^{\alpha_1^{(k)}} \ldots (\partial_k u^N)^{\alpha_N^{(k)}}.$$

Построим формальное решение задачи Коши (2.6). С этой целью рассмотрим действительную алгебру $\mathfrak{A}$, элементами которой являются формальные степенные ряды с действительными коэффициентами от независимых переменных $\varepsilon, u^1, \ldots$ $\ldots, u^N, \ldots, \partial^\alpha u^k, \ldots,$ где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — произвольный мультииндекс с неотрицательными компонентами, $k = 1, 2, \ldots, N$. Например,

$$a = a[v_1, \ldots, v_q] = \sum_{l_1, \ldots, l_q \geqslant 0} a_{l_1, \ldots, l_q} (v_1)^{l_1} \ldots v_q^{l_q} \in \mathfrak{A},$$

где $v_j \in \{\varepsilon, u^1, \ldots, u^N, \ldots, \partial^\alpha u^k, \ldots\}$. Сложение и умножение рядов определяется обычным образом. Произвольное линейное преобразование $\mathscr{A}$ алгебры $\mathfrak{A}$ называется непрерывным, если его можно вносить под знак бесконечной суммы, например,

$$\mathscr{A}(a[v_1, \ldots, v_q]) = \sum_{l_1, \ldots, l_q \geqslant 0} a_{l_1, \ldots, l_q} \mathscr{A}(v^{l_1} \ldots v^{l_q}).$$

Нас будут интересовать непрерывные дифференцирования алгебры $\mathfrak{A}$, совокупность которых обозначим через $\mathrm{Der}_c(\mathfrak{A})$. Дифференцирование $\mathscr{D} \in \mathrm{Der}_c(\mathfrak{A})$ однозначно определяется своими значениями на образующих ε, $\partial^\alpha u^k$, в силу правила Лейбница и условия непрерывности. С другой стороны, значения $\mathscr{D}$ на образующих могут быть произвольными.

В алгебре $\mathfrak{A}$ имеются естественные дифференцирования $\partial_1, \ldots, \partial_n \in \mathrm{Der}_c(\mathfrak{A})$, которые задаются на образующих формулами:

$$\partial_i \varepsilon = 0, \quad \partial_i (\partial^\alpha u^k) = \partial^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_N)} u^k$$

для любых $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $k = 1, \ldots, N$, $i = 1, \ldots, N$.

Далее, каждую компоненту правой части уравнения (2.6) можно рассматривать как элемент алгебры $\mathfrak{A}$:

$$f_t^j (u, \partial_1 u, \ldots, \partial_n u) =$$
$$= \Sigma a_t^{j, \alpha^{(0)}, \ldots, \alpha^{(n)}} (u)^{\alpha^{(0)}} \ldots (\partial_n u)^{\alpha^{(n)}} \in \mathfrak{A} \quad \forall t \in R, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Введем однопараметрическое семейство дифференцирований $\hat{f}_t \in \mathrm{Der}_c(\mathfrak{A})$, задав его действие на образующих при помощи формул

$$\hat{f}_t \varepsilon = 0,$$

$$\hat f_t\partial^\alpha u^k=\partial^\alpha f_t^k(u,\partial_1 u,\ldots,\partial_n u),$$
$$\hat f_t u^k=f_t^k(u,\partial_1 u,\ldots,\partial_n u),$$
$$t\in R,\quad k=1,\ldots,N,\quad \alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n).$$

Важнейшим для нас свойством дифференцирований $\hat f_t$, $t\in R$, является то, что все они коммутируют с $\partial_1,\ldots,\partial_n$:

$$[\partial_i,\hat f_t]=\partial_i\circ\hat f_t-\hat f_t\circ\partial_i=0\quad\forall t\in R,\ i=1,\ldots,n.$$

В самом деле, коммутатор $[\partial_i,\hat f_t]$ является непрерывным дифференцированием, т. е. $[\partial_i,\hat f_t]\in\mathrm{Der}_c(\mathfrak{A})$. С другой стороны, в силу определений $[\partial_i,\hat f_t]$ обращается в нуль на образующих Следовательно, $[\partial_i,\hat f_t]$ есть тождественный нуль.

Построим, как действует определенное нами семейство дифференцирований $\hat f_t$, $t\in R$, на элементы алгебры $\mathfrak{A}$

Пусть, например, $a=a[\varepsilon,u^1,\ldots,u^N,\partial_1 u^1,\partial_2 u^1,\ldots,\partial_n u^N]\in\mathfrak{A}$. Тогда очевидно

$$\hat f_t a=\frac{\partial a[\varepsilon,u,\ldots,\partial_n u]}{\partial u}f_t(u,\partial_1 u,\ldots,\partial_n u)+$$
$$+\frac{\partial a[\varepsilon,u,\ldots,\partial_n u]}{\partial(\partial_1 u)}\partial_1 f_t(u,\partial_1 u,\ldots,\partial_n u)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\partial a[\varepsilon,u,\partial_1 u,\ldots,\partial_n u]}{\partial(\partial_n u)}\partial_n f_t(u,\partial_1 u,\ldots,\partial_n u).\qquad(2.7)$$

Этой формулой мы будем пользоваться ниже при «расшифровке» хронологического ряда, соответствующего квазилинейному уравнению.

Ниже мы постоянно будем иметь дело с однопараметрическими семействами элементов алгебры $\mathfrak{A}$. Мы говорим, что такое семейство a_t измеримо, абсолютно непрерывно и т. д., если все коэффициенты соответствующего формального ряда измеримы, абсолютно непрерывны и т. д. по t. Интегрирование и дифференцирование формальных рядов по t всегда производится почленно.

Пусть $b=b[v_1,\ldots,v_q]\in\mathfrak{A}$. Если $a_1,\ldots,a_q$ — некоторые элементы из $\mathfrak{A}$, причем соответствующие степенные ряды не имеют свободного члена, то определена композиция $b[a_1,\ldots,a_q]\in\mathfrak{A}$. В дальнейшем во всех формулах, где встречается композиция формальных рядов, следует считать, что «внутренние» ряды не имеют свободного члена.

Формальным решением задачи Коши (2.6) называется такое абсолютно непрерывное однопараметрическое семейство a_t элементов алгебры $\mathfrak{A}$, что для почти всех t выполняется равенство

$$\frac{d}{dt}a_t=\varepsilon f_t(a_t,\ldots,\partial_n a_t)$$

и $a_{t_0}=u$.

Если в степенной ряд, соответствующий некоторому формальному решению задачи Коши, подставить вместо переменных $u^1, \ldots, u^N, \ldots, \partial^\alpha u^k, \ldots$ гладкие функции $u_0^1(x), \ldots$ $\ldots, u^N(x), \ldots, \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} u_0^k(x), \ldots$ и положить $\varepsilon=1$, то получится некоторый ряд из гладких функций. Ясно, что в таком случае, когда такой ряд равномерно сходится, его сумма является решением (не формальным) задачи Коши (2.6).

Предложение 2.2. Ряд

$$F_{t,\, t_0}(u)=u+\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m\int_{t_0}^{t}d\tau_1\ldots\int_{t_0}^{\tau_{m-1}}d\tau_m\hat{f}_{\tau_m}\circ\ldots\circ\hat{f}_{\tau_2}f_{\tau_1}(u,\,\partial u)$$

является формальным решением задачи Коши (2.6).

Доказательство. Отметим, во-первых, что ряд $F_{t,\,t_0}(u)$ содержит лишь конечное число членов каждой степени, поэтому его «сумма» является вполне определенным элементом алгебры $\mathfrak{A}$. Аналогично, ряд

$$\hat{\mathcal{P}}_{t,\,t_0}=\mathrm{Id}+\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m\int_{t_0}^{t}d\tau_1\ \ldots\int_{t_0}^{\tau_{m-1}}d\tau_m\hat{f}_{\tau_m}\circ\ldots\circ\hat{f}_{\tau_1}$$

задает непрерывное линейное преобразование алгебры $\mathfrak{A}$.

Отметим, что по самому определению

$$\hat{\mathcal{P}}_{t,t_0}\circ\partial_k=\partial_k\circ\hat{\mathcal{P}}_{t,t_0}.$$

Кроме того, мы видим, что

$$\hat{\mathcal{P}}_{t,t_0}u=F_{t,t_0}(u).$$

Важный факт состоит в том, что ряд $\hat{\mathcal{P}}_{t,t_0}$ обладает следующим мультипликативным свойством:

$$\hat{\mathcal{P}}_{t,t_0}(ab)=\hat{\mathcal{P}}_{t,t_0}(a)\,\hat{\mathcal{P}}_{t,t_0}(b),$$
$$\forall a,\ b\in\mathfrak{A}.$$

Действительно, мы имеем на основании формулы (1.2), что

$$\hat{f}_{\tau_m}\circ\ldots\circ\hat{f}_{\tau_1}(ab)=\sum_{\alpha+\beta=m}\ \sum_{\pi\in S(\alpha,\beta)}(\hat{f}_{\tau_{\pi(m)}}\circ\ldots\circ\hat{f}_{\tau_{\pi(\alpha+1)}}(a))\times$$
$$\times(\hat{f}_{\tau_{\pi(\alpha)}}\circ\ldots\circ\hat{f}_{\tau_{\pi(1)}}(b));$$
$$\forall a,\ b\in\mathfrak{A}.$$

Следовательно, используя формулу (1.3), мы имеем:

$$\int_{t_0}^{t}d\tau_1\ldots\int_{t_0}^{\tau_{m-1}}d\tau_m\hat{f}_{\tau_m}\circ\ldots\circ\hat{f}_{\tau_1}(ab)=$$

$$= \sum_{\alpha+\beta=m} \left(\int_{t_0}^{t} d\tau_1 \dots \int_{t_0}^{\tau_{\alpha-1}} d\tau_\alpha \hat{f}_{\tau_\alpha} \circ \dots \circ \hat{f}_{\tau_1}(a) \right) \times$$

$$\times \left(\int_{t_0}^{t} d\tau_1 \dots \int_{t_0}^{\tau_{\beta-1}} d\tau_\beta \hat{f}_{\tau_\beta} \circ \dots \circ \hat{f}_{\tau_1}(b) \right),$$

но это означает, что

$$\hat{\mathcal{P}}_{t,t_0}(ab) = \hat{\mathcal{P}}_{t,t_0}(a)\, \hat{\mathcal{P}}_{t,t_0}(b).$$

Из этого мультипликативного свойства и вытекает, что ряд $F_{t,t_0}(u)$ является формальным решением задачи Коши.

Действительно, $F_{t_0,t_0}(u) = u$ и

$$\frac{d}{dt} F_{t,t_0}(u) = \frac{d}{dt} \left\{ u + \varepsilon \int_{t_0}^{t} f_\tau(u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u)\, d\tau + \right.$$

$$\left. + \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \hat{f}_{\tau_2} f_{\tau_1}(u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u) + \dots \right\} =$$

$$= \varepsilon \hat{\mathcal{P}}_{t,t_0} f_t(u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u) =$$

$$= \varepsilon \sum_{\alpha^{(0)},\dots,\alpha^{(n)}} a_t^{\alpha^{(0)},\dots,\alpha^{(n)}} (\hat{\mathcal{P}}_{t,t_0} u)^{\alpha^{(0)}} \dots (\partial_n \hat{\mathcal{P}}_{t,t_0} u)^{\alpha^{(n)}} =$$

$$= \varepsilon f_t(F_{t,t_0}(u), \partial_1 F_{t,t_0}(u), \dots, \partial_n F_{t,t_0}(u)),$$

где

$$a_t^{\alpha^{(0)},\dots,\alpha^{(n)}} = \begin{pmatrix} a_t^{1,\alpha^{(0)},\dots,\alpha^{(n)}} \\ \vdots \\ a_t^{N,\alpha^{(0)},\dots,\alpha^{(N)}} \end{pmatrix}.$$

Если в формальный ряд F_{t,t_0} подставить вместо $u^1, \dots$ $\dots, u^N, \dots, \partial^\alpha u^k, \dots$ гладкие функции $u_0^1(x), \dots, u^N(x), \dots$ $\dots, \dfrac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} u_0^k(x), \dots$ и положить $\varepsilon = 1$, то получим ряд, состоящий из гладких вектор-функций

$$F_{t,t_0}(u_0) = u_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \dots \int_{t_0}^{\tau_{m-1}} d\tau_m \hat{f}_{\tau_m} \circ \dots \circ \hat{f}_{\tau_2} f_{\tau_1}(u_0, \partial u_0). \quad (2.8)$$

Такой ряд мы называем хронологическим рядом задачи Коши (2.6). Мы докажем сходимость ряда (2.8) в случае, когда u_0 является аналитической функцией. Сначала займемся скалярным квазилинейным случаем.

3. Случай одномерного квазилинейного уравнения. Рассмотрим одномерное квазилинейное уравнение с частными производными первого порядка

$$\frac{du}{dt} = a_t^{(1)}(u)\,\partial_1 u + \ldots + a_t^{(n)}(u)\,\partial_n u = f_t(u, \partial u) =$$
$$= f_t(u, \partial_1 u, \ldots, \partial_n u), \tag{2.9}$$
$$u_{t_0} = u_0 \in \Phi^N(G).$$

Оказывается, что имеет место следующая формула для подынтегрального выражения $m+1$-го члена ряда (2.8)

$$\hat{f}_{\tau_m} \circ \ldots \circ \hat{f}_{\tau_2} f_{\tau_1}(u_0, \partial u_0) = \hat{f}_{\tau_m} \circ \ldots \circ \hat{f}_{\tau_2} f_{\tau_1}(u_0, \partial_1 u_0, \ldots, \partial_n u_0) =$$
$$= \sum_{j_1=1}^{n} \ldots \sum_{j_{m-1}=1}^{n} \partial_{j_1} \circ \ldots$$
$$\ldots \circ \partial_{j_{m-1}} \left(a_{\tau_1}^{(j_1)}(u_0) \ldots a_{\tau_{m-1}}^{(j_{m-1})}(u_0)\, f_{\tau_m}(u_0, \partial u_0) \right). \tag{2.10}$$

Докажем эту формулу индукцией по числу m. При $m = 1$ она очевидна. Пусть формула (2.10) верна при $m \leqslant p$. Тогда при $m = p + 1$

$$\hat{f}_{\tau_{p+1}} \circ \ldots \circ \hat{f}_{\tau_2} f_{\tau_1}(u_0, \partial u_0) = \hat{f}_{\tau_{p+1}} \sum_{j_1=1}^{n} \ldots \sum_{j_{p-1}=1}^{n} \partial_{j_1} \circ \ldots$$
$$\ldots \circ \partial_{j_{p-1}} \left(a_{\tau_1}^{(j_1)}(u_0) \ldots a_{\tau_{p-1}}^{(j_{p-1})}(u_0)\, f_{\tau_p}(u_0, \partial u_0) \right) =$$
$$= \sum_{j_1=1}^{n} \ldots \sum_{j_{p-1}=1}^{n} \partial_{j_1} \circ \ldots \circ \partial_{j_{p-1}} \hat{f}_{\tau_{p+1}} \Big(a_{\tau_1}^{(j_1)}(u_0) \ldots$$
$$\ldots a_{\tau_{p-1}}^{(j_{p-1})}(u_0)\, f_{\tau_p}(u_0, \partial u_0) \Big) = \sum_{j_1=1}^{n} \ldots \sum_{j_{p-1}=1}^{n} \partial_{j_1} \circ \ldots$$
$$\ldots \circ \partial_{j_{p-1}} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(a_{\tau_1}^{(j_1)}(u_0) \ldots a_{\tau_p}^{(j_p)}(u_0) \right) f_{\tau_p}(u_0, \partial u_0) + \right.$$
$$\left. + a_{\tau_1}^{(j_1)}(u_0) \ldots a_{\tau_{p-1}}^{(j_{p-1})}(u_0) \sum_{j_p=1}^{n} \frac{\partial}{\partial(\partial_{j_p} u)} f_{\tau_p}(u_0, \partial u_0) \right) =$$
$$= \sum_{j_1=1}^{n} \ldots \sum_{j_{p-1}=1}^{n} \partial_{j_1} \circ \ldots$$
$$\ldots \circ \partial_{j_p} \sum_{j_p=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(a_{\tau_1}^{(j_1)}(u_0) \ldots a_{\tau_p}^{(j_p)}(u_0) \right) \partial_{j_p} u_0 f_{\tau_{p+1}}(u_0, \partial u_0) + \right.$$
$$\left. + a_{\tau_1}^{(j_1)}(u_0) \ldots a_{\tau_p}^{(j_p)}(u_0)\, \partial_{j_p} f_{\tau_{p+1}}(u_0, \partial u_0) \right) =$$
$$= \sum_{j_1=1}^{n} \ldots \sum_{j_p=1}^{n} \partial_{j_1} \circ \ldots$$

$$\ldots \circ \partial_{j_p}\left(a_{\tau_1}^{(j_1)}(u_0)\ldots a_{\tau_p}^{(j_p)}(u_0)\, f_{\tau_{p+1}}(u_0, \partial u_0)\right).$$

формула (2.10) доказана.

Как и в п. 1 § 2, мы будем использовать интегральную формулу Коши для доказательства сходимости получившегося хронологического ряда

$$F_{t,t_0}(u_0) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f_\tau(u_0, \partial u_0)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \hat{f}_{\tau_2}(u_0, \partial u_0) + \ldots =$$

$$= u_0 + \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} a_\tau^{(j)}(u_0)\, \partial_j u_0 d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \partial_{j_1}\left(a_{\tau_1}^{(j_1)}(u_0)\, a_{\tau_2}^{(j_2)}(u_0)\, \partial_{j_2} u_0\right) + \ldots$$

$$\ldots + \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \ldots \int_{t_0}^{\tau_{m-1}} d\tau_m \sum_{j_1=1}^{n} \ldots \sum_{j_{m-1}=1}^{n} \partial_{j_1} \circ \ldots$$

$$\ldots \circ \partial_{j_{m-1}}\left(a_{\tau_1}^{(j_1)}(u_0)\ldots a_{\tau_m}^{(j_m)}(u_0)\, \partial_{j_m} u_0\right) + \ldots, \qquad (2.11)$$

соответствующего задаче Коши (2.9) в аналитическом случае. Именно, справедливо следующее

Предложение 2.3. Если V — комплексное расширение области $G \subset R^n$ и $u_0 \in \Omega(V)$,

$$a_t^{(j)}(u_0) \in \Omega(V) \ \forall t \in R, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

и функции $t \mapsto \|a_t^{(j)}(u_0)\|_V{}^{c^n}$ локально интегрируемы, то, какова бы ни была подобласть V' области V, расстояние от границы которой до границы области V больше некоторого $\varepsilon > 0$, существует такое $\rho > 0$, что ряд (2.11) сходится абсолютно и равномерно в V' при $|t - t_0| < \rho$.

Доказательство. Имеем $\forall z \in V'$

$$a_{\tau_1}^{(j_1)}(u_0(z)) \cdot a_{\tau_\alpha}^{(j_2)}(u_0(z)) \ldots a_{\tau_m}^{(j_m)}(u_0(z))\, \partial_{j_m} u_0(z) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_1} \ldots \int_{C_n} a_{\tau_1}^{(j_1)}(u_0(\xi)) \ldots a_{\tau_m}^{(j_m)}(u_0(\xi))\, \partial_{j_m} u_0(\xi) \cdot \frac{d\xi}{\Pi_\xi(z)},$$

где C_α — окружность радиуса ε с центром z^α,

$$\Pi_\xi(z) = (\xi^1 - z^1) \ldots (\xi^n - z^n).$$

Следовательно, $\forall z \in V'$, $m = 1, 2, \ldots$

$$\hat{f}_{\tau_m} \circ \ldots \circ \hat{f}_{\tau_2} f_{\tau_1}(u_0(z), \partial u_0(z)) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{j_1=1}^{n} \ldots \sum_{j_m=1}^{n} \int_{C_1} \ldots$$

$$\ldots \int_{C_n} a_{\tau_1}^{(j_1)}(u_0(\xi)) \ldots a_{\tau_m}^{(j_m)}(u_0(\xi))\, \chi_\xi^{j_1, \ldots, j_m}(z)\, d\xi,$$

где

$$\chi_{\xi}^{j_1,\ldots,j_m}(z)=\partial_{j_1}\circ\ldots\circ\partial_{j_{m-1}}\frac{1}{\Pi_{\xi}(z)},$$

$$\partial_{j_\alpha}=\frac{\partial}{\partial z^{j_\alpha}}.$$

При всех $|\xi^\alpha-z^\alpha|\geqslant\varepsilon$, $\alpha=1,\ldots,n$, очевидно справедлива оценка

$$|\chi_{\xi}^{j_1,\ldots,j_m}(z)\leqslant\frac{(m-1)!}{\varepsilon^{m-1}\varepsilon^n},$$

из которой вытекает, что $\forall z\in V'$

$$|\hat{f}_{\tau_m}\circ\ldots\circ\hat{f}_{\tau_2}f_{\tau_1}(u_0(z),\ \partial u_0(z))|\leqslant\sum_{j_1=0}^{n}\ldots\sum_{j_{m-1}=1}^{n}\sum_{j_m=1}^{n}\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{C_1}\ldots$$

$$\ldots\int_{C_n}\|a_{\tau_1}^{(j_1)}(u_0)\|_V^{C^n}\ldots\|a_{\tau_m}^{(j_m)}(u_0)\|_V^{C^n}\|\partial_{j_m}u_0\|_V^{C^n}\frac{(m-1)!}{\varepsilon^{m-1}\varepsilon^n}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(m-1)!\,n^{m-1}}{\varepsilon^{m-1}}\|a_{\tau_1}(u_0)\|_V^{C^n}\ldots\|a_{\tau_m}(u_0)\|_V^{C^n}\|\operatorname{grad}u_0\|_V^{C^n},$$

где

$$\|a_{\tau_\alpha}\|_V^{C^n}=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\|a_{\tau_\alpha}^{(j)}(u_0)\|_V^{C^n}=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\max_{z\in V}|a_{\tau_\alpha}^{(j)}(u_0(z))|,$$

$$\|\operatorname{grad}u_0\|_V^{C^n}=\sum_{j=1}^{n}\|\partial_j u_0\|_V^{C^n}=\sum_{j=1}^{n}\max_{z\in V}|\partial_j u_0(z)|,\quad \partial_j=\frac{\partial}{\partial z^j}.$$

Следовательно, отсюда мы получим, что для всех $z\in V'$

$$\left|\int_{t_0}^{t}d\tau_1\ldots\int_{t_0}^{\tau_{m-1}}d\tau_m\hat{f}_{\tau_m}\circ\ldots\circ\hat{f}_{\tau_2}f_{\tau_1}(u_0(z),\partial u_0(z))\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(m-1)!\,n^{m-1}}{\varepsilon^{m-1}}\int_{t_0}^{t}d\tau_1\ldots\int_{t_0}^{\tau_{m-1}}d\tau_m\|a_{\tau_1}\|_V^{C^n}\ldots$$

$$\ldots\|a_{\tau_m}\|_V^{C^n}\|\operatorname{grad}u_0\|_V^{C^n}=$$

$$=\frac{(m-1)!}{\varepsilon^{m-1}}n^{m-1}\frac{1}{m!}\left(\int_{t_0}^{t}\|a_\tau\|_V^{C^n}d\tau\right)^m\|\operatorname{grad}u_0\|_V^{C^n}=$$

$$=\frac{\varepsilon}{m\cdot n}\left(\frac{n}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\|a_\tau\|_V^{C^n}d\tau\right)^m\|\operatorname{grad}u_0\|_V^{C^n}.$$

Таким образом, доказано неравенство

$$\left\| \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \ldots \int_{t_0}^{\tau_{m-1}} d\tau_m \hat{f}_{\tau_m} \circ \ldots \circ \hat{f}_{\tau_2} f_{\tau_1}(u_0, \partial u_0) \right\|_{V'}^{C^n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{m \cdot n} \left(\frac{n}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t} \| a_\tau \|_V^{C^n} d\tau \right)^m \| \operatorname{grad} u_0 \|_V^{C^n},$$

из которого вытекает абсолютная и равномерная сходимость ряда (2.11) при всех $z \in V'$ и t достаточно близких к t_0.

Предложение доказано.

Из предложения 2.3. и рассуждений § 2 п. 2 мы получаем следующую теорему.

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия п. 2 § 2, а

$$u_0 \in \Omega(V), \quad a_t^{(k)}(u_0) \in \Omega(V), \quad \| u_0 \|_V^{C^n} \leqslant R_t, \quad k = 1, \ldots, n$$

и функции

$$t \mapsto \| a_t^{(k)}(u_0) \|_V^{C^n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

локально суммируемы. Здесь $V \subset C^n$ — область, содержащая $G \subset R^n$.

Тогда, какова бы ни была подобласть $V' \subset V$, расстояние от границы которой до границы области V больше $\varepsilon > 0$, ряд (2.11) сходится абсолютно и равномерно в области V' при тех t, для которых

$$\left| \frac{n}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t} \| a_\tau \|_V^{C^n} d\tau \right| \leqslant \rho < 1$$

и является решением задачи Коши (2.9). При этом справедлива оценка

$$\| F_{t,t_0}(u_0) \|_{V'}^{C^n} \leqslant \frac{\varepsilon}{n} \| \operatorname{grad} u_0 \|_V^{C^n} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{n}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t} \| a_\tau \|_V^{C^n} d\tau \right)^m \right) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{n} \| \operatorname{grad} u_0 \|_V^{C^n} \left(1 + \ln \left[1 - \frac{n}{\varepsilon} \left| \int_{t_0}^{t} \| a_\tau \|_V^{C^n} d\tau \right| \right] \right).$$

Отметим в ряде случаев ряд (2.11) удается свернуть и получить решение задачи Коши в замкнутом виде. Продемонстрируем это на простейшем примере. Пусть, например, рассматривается задача Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{t_0}(x) = x \in R.$$

Тогда, в соответствии с вышеизложенным, мы получаем, что решением этой задачи является ряд

$$F_{t,t_0}(x)=x+\int_{t_0}^{t} x\frac{\partial}{\partial x}x d\tau+\ldots=x+x(t-t_0)+$$
$$+x(t-t_0)^2+\ldots=\frac{x}{1-(t-t_0)},\quad |t-t_0|\leqslant\rho<1,$$

что проверяется непосредственно.

В заключение этого пункта отметим, что использование формулы (2.7) при «расшифровке» хронологического ряда, соответствующего задаче Коши, может привести к конкретным формулам для решения этой задачи и в некоторых других случаях.

4. Сходимость общего хронологического ряда. Мы дадим в этом пункте доказательство сходимости хронологического ряда, соответствующего квазилинейной системе

$$\frac{du}{dt}=A_t^{(1)}(u)\partial_1 u+\ldots+A_t^{(n)}(u)\partial_n u=$$
$$=f_t(u, \partial u)=f_t(u, \partial_1 u, \ldots, \partial_n u),\quad u_{t_0}=u_0$$

в случае, когда начальная функция u_0 аналитична в области G. Для наших целей достаточно рассмотреть только этот случай, ибо, как известно (см. [3]), к этому случаю сводится произвольная система дифференциальных уравнений с частными производными вида (2.5).

Мы докажем сходимость хронологического ряда, соответствующего этой квазилинейной системе в окрестности произвольной начальной точки $(t_0, x_0)\in R\times G$.

Поскольку, по предположению, функции u_0 аналитична в G, то в точке x_0 она разлагается в ряд Тейлора

$$u_0^j(x)=\sum_{k_1,\ldots,k_n} b_i^{(j)}(x^1-x_0^1)^{k_1}\ldots(x^n-x_0^n)^{k_n},\quad j=1, 2, \ldots, N,$$

сходящийся при всех x, достаточно близких к x_0.

Положим

$$v_0(x)=\sum_{k_1,\ldots,k_n}\max_{1\leqslant j\leqslant n}|b_{k_1,\ldots,k_n}^{(j)}|(x^1-x_0^1)^{k_1}\ldots(x^n-x_0^n)^{k_n}.$$

Тогда функция v_0 определена и аналитична вблизи точки x_0 и является мажорантой для начальной функции u_0^i $(i=1, 2, \ldots, N)$ в окрестности этой точки.

Напомним, что аналитическая функция f, представимая сходящимся степенным рядом, является мажорантой аналитической функции g, если коэффициенты разложения g в степенной ряд по модулю меньше или равны соответствующих коэффициентов разложения f (предполагается, что коэффициенты разложения f больше или равны нулю).

Обозначим через e N-мерный вектор

$$e=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

и положим

$$\overline{v}_0=v_0\cdot e.$$

По нашим предположениям (см. п. 2 § 2), правая часть системы разлагается в ряд Маклорена, т. е. компоненты $a^i_{j,k}(t, u)$ матриц $A^{(k)}_t(u)$, $k=1, 2, \ldots, N$, $i, j=1, 2, \ldots, N$, представимы в виде ряда

$$a^i_{j,k}(t, u)=\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N} a^i_{j,k,\alpha_1,\ldots,\alpha_N}(u^1)^{\alpha_1}\ldots(u^N)^{\alpha_N}$$

сходящегося при $|u|<R_t$.

Положим

$$a_t(u)=\sum_{\alpha_1,\ldots\alpha_N}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\max_{1\leqslant i,\, j\leqslant N}|a^i_{j,k,\alpha_1,\ldots,\alpha_N}(t)|(u^1)^{\alpha_1}\ldots(u^N)^{\alpha_N}.$$

Тогда функция $a_t(u)$ определена при всех t и всех u достаточно малых по абсолютной величине. Пусть E — N^2 матрица, составленная из единиц:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\\ 1 & 1 & \ldots & 1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & 1 & \ldots & 1\end{pmatrix}.$$

Положим

$$g_t(u, \partial_1 u, \ldots, \partial_n u)=g_t(u, \partial u)=$$
$$=a_t(u)\,E\sum_{i=1}^{n}\partial_i u=a_t(u)\cdot e\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N}\partial_i u^j.$$

По самому определению, функция

$$(u, \partial_1 u, \ldots, \partial_n u)\mapsto g_t(u, \partial_1 u, \ldots, \partial_n u)=g_t(u, \partial u)$$

мажорирует (покомпонентно) функцию

$$(u, \partial_1 u, \ldots, \partial_n u)\mapsto f_t(u, \partial u)=f_t(u, \partial_1 u, \ldots, \partial_n u)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}A^{(k)}_t(u)\,\partial_k u.$$

Поскольку определенная выше функция $\overline{v}_0$ покомпонентно мажорирует начальную функцию u_0 в окрестности точки $x_0\in G$, то функция

$$x\mapsto g_t(\overline{v}_0(x), \partial_1\overline{v}_0(x), \ldots, \partial_n\overline{v}_0(x))$$

мажорирует покомпонентно функцию

$$x \mapsto f_t(u_0(x),\ \partial_1 u_0(x), \ldots, \partial_n u_0(x)).$$

Точно так же, функция

$$x \mapsto \hat{g}_{\tau_m} \circ \ldots \circ \hat{g}_{\tau_2} g_{\tau_1}(\bar{v}_0(x),\ \partial_1 \bar{v}_0(x), \ldots, \partial_n \bar{v}_0(x))$$

покомпонентно мажорирует функцию

$$x \mapsto \hat{f}_{\tau_m} \circ \ldots \circ \hat{f}_{\tau_2} f_{\tau_1}(u_0(x),\ \partial_1 u_0(x), \ldots, \partial_n u_0(x)),$$

ибо при построении этих функций используются те же самые правила, которые включают в себя только дифференцирование по соответствующим аргументам ,сложение, умножение и подстановку ряда в ряд, одним словом, рациональные операции, которые сохраняют отношение мажорирования аналитических функций.

Все вышесказанное означает, что ряд (2.8), построенный для квазилинейной системы

$$\frac{du_t}{dt} = f_t(u_t,\ \partial u_t) = f_t(u_t,\ \partial_1 u_t, \ldots, \partial_n u_t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_t^{(k)}(u)\, \partial_k u, \quad u_{t_0} = u_0,$$

сходится, по крайней мере, в той (достаточно малой) окрестности начальной точки $x_0 \in G$, в которой сходится ряд

$$G_{t,t_0}(\bar{v}_0(x)) = \bar{v}_0(x) + \int_{t_0}^{t} g_\tau(\bar{v}_0(x),\ \partial\bar{v}_0(x))\, d\tau + \ldots$$

$$\ldots + \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \ldots \int_{t_0}^{\tau_{m-1}} d\tau_m \hat{g}_{\tau_m} \circ \ldots \circ \hat{g}_{\tau_2} g_{\tau_1}(\bar{v}_0(x),\ \partial\bar{v}_0(x)) + \ldots \quad (2.12)$$

Сходимость ряда (2.12) доказать нетрудно. Именно, оказывается, что справедлива формула

$$\hat{g}_{\tau_m} \circ \ldots \circ \hat{g}_{\tau_2} g_{\tau_1}(\bar{v}_0(x),\ \partial\bar{v}_0(x)) = N^m e \sum_{j_1=1}^{n} \ldots \sum_{j_m=1}^{n} \partial_{j_1} \circ \ldots$$

$$\ldots \circ \partial_{j_{m-1}} a_{\tau_1}(\bar{v}_0(x)) \ldots a_{\tau_m}(\bar{v}_0(x))\, \partial_{j_m} v_0(x). \quad (2.13)$$

Доказательство формулы (2.13) проводится по индукции и почти не отличается от доказательства формулы (2.10), поэтому мы не будем на нем останавливаться.

Пусть S — столь малая окрестность начальной точки $x_0 \in G_0$, что в этой окрестности сходятся ряд для v_0 и V — комплексное расширение этой окрестности такое, что

$$v_0 \in \Omega(V), \quad a_t(\bar{v}_0) \in \Omega(V).$$

Аналогично предложению 2.2, справедливо

Предложение 2.4. Какова бы ни была подобласть $V' \subset V$, расстояние от границы которой до границы области больше некоторого $\varepsilon > 0$, существует $\rho > 0$, что ряд $G_{t,t_0}(\bar{v}_0(z))$ сходится абсолютно и равномерно при $|t - t_0| < \rho$, $z \in V'$.

Доказательство вытекает из оценки

$$\|\hat{g}_{\tau_m} \circ \ldots \circ \hat{g}_{\tau_2} g_{\tau_1}(\bar{v}_0, \partial \bar{v}_0)\|_{V'}^{C^n} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{N^m n^{m-1}}{\varepsilon^{m-1}} (m-1)! \, \|a_{\tau_m}\|_V^{C^n} \ldots \|a_{\tau_1}\|_V^{C^n} \|\operatorname{grad} v_0\|_V^{C^n},$$
$$\|a_\tau\|_V^{C^n} = \sup_{z \in V} |a_\tau(\bar{v}_0(z))|,$$

которая доказывается так же, как и соответствующая оценка из предложения 2.2.

Резюмируя все сказанное выше, мы утверждаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2.3. Пусть выполнены условия п. 2. § 2 и пусть $u_0 \in \Omega^N(N)$, $A_t^{(k)}(u_0) \in \Omega^{N^2}(V)$, $\|u_0\|_V^{C^n} \leqslant R_t$, причем функция $t \mapsto \|a_t(v_0)\|_V^{C^n}$ локально суммируема. Здесь V — некоторая достаточно малая комплексная окрестность произвольной точки $x_0 \in G$, R_t — радиус сходимости ряда Маклорена, построенного для правой части (см. п. 2 § 2), а a_t, $\bar{v}_0$ — функции, построенные выше.

Тогда, какова бы ни была подобласть $V' \subset V$, расстояние от границы которой до границы области V больше некоторого $\varepsilon > 0$, существует такое $\rho > 0$, что ряд (2.8) сходится абсолютно и равномерно при $|t - t_0| < \rho$, $z \in V'$ и является решением задачи Коши

$$\frac{du}{dt} = \sum_{k=1}^{n} A_t^{(k)}(u) \, \partial_k u, \quad u_{t_0} = u_0.$$

5. Единственность решения и теорема сравнения. Справедлива следующая

Теорема 2.4. Пусть выполнены условия п. 2 § 2 и

$$u_0 \in \Omega^N(V), \; \|u_0\|_V^{C^n} \leqslant R_t,$$

причем функция

$$t \mapsto \|f_t(u_0, \partial u_0)\|_V^{C^n}$$

локально суммируема. Здесь $V \subset C^n$ — некоторая область, содержащая G. Тогда, если u_t, v_t — два решения задачи Коши (2.6), принадлежащие $\Omega^N(V)$, то $u_t = v_t$ в $\Omega^N(V)$ при тех t, при которых они оба определены.

Для доказательства рассмотрим ряд

$$\hat{Q}_{t,t_0} = \hat{\mathscr{P}}_{t,t_0}^{-1} = \mathrm{Id} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \ldots \int_{t_0}^{t} d\tau_m \, \hat{f}_{\tau_1} \circ \ldots \circ \hat{f}_{\tau_m}$$

Непосредственная проверка (ср. с [1]) показывает, что

$$\frac{d}{dt} Q_{t,t_0} \ u_t = 0$$

в окрестности всякой точки $(t_0, x_0) \in R \times V$. Следовательно,

$$\hat{Q}_{t,t_0} \ u_t = u_0 \text{ в } \Omega^N(V) \text{ и } u_t = \hat{P}_{tt_0} \circ \hat{Q}_{t,t_0} \ u_t = \hat{P}_{t,t_0} u_0.$$

Отсюда и вытекает утверждение теоремы.

Прямым следствием хронологического представления решения и предыдущей теоремы является следующий результат, который может быть назван теоремой сравнения.

Теорема 2.5. Пусть выполнены условия, обеспечивающие существование и единственность решений задачи Коши (2.6) и задачи Коши

$$\frac{dv_t}{dt} = g_t(v_t, \ dv_t),$$

$$v_{t0} = v_0 \in \Omega^N(V), \tag{2.14}$$

о которых шла речь выше. Тогда, если функции g_t и v_0 покомпонентно мажорируются функциями f_t и u_0, то решение v_t задачи Коши (2.14) покомпонентно мажорируется решением u_t задачи Коши (2.6) при всех t, при которых они определены.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Аграчев А. А., Гамкрелидзе Р. В.*, Экспоненциальное представление потоков и хронологическое исчисление. Мат. сб., 1978, *107*, № 4, 467—532 (РЖМат, 1979, 4Б583)
2. —, —, Хронологические алгебры и нестационарные векторные поля. «Проблемы геометрии. Т. 11 (Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1980, 135—176 (РЖМат, 1980, 9Б451)
3. *Курант Р.*, Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964
4. *Ниренберг Л.*, Лекция по нелинейному функциональному анализу. М., «Мир», 1977
5. *Петровский И. Г.*, Лекции об уравнениях с частными производными. М., Физматгиз, 1961 (РЖМат, 1962, 10Б239К)
6. *Nirenberg L.*, An abstract form of the nonlinear Cauchy—Kowalewski theorem. J. Diff. Geom., 1972, *6*, № 4, 561—576 (РЖМат, 1973, 5Б905)
7. *Treves J. F.*, An abstract nonlinear Cauchy—Kovalevska theorem. Trans. Amer. Math., Soc., 1970, *150*, 77—92 (РЖМат, 1971, 6Б813)