Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Л. В. Зильберглейт, Канонический оператор Маслова в вещественно-аналитическом случае,
Изв. вузов. Матем., 1977, номер 8, 31–40

https://www.mathnet.ru/ivm6006

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.175
17 мая 2025 г., 22:30:42

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1977 МАТЕМАТИКА № 8 (183)

УДК 517.432

Л. В. Зильберглейт

КАНОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР МАСЛОВА В ВЕЩЕСТВЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

В работе рассматривается метод получения „в большом“ квазиклассических приближений решений уравнений с точностью до аналитических функций. Для этого на аналитических лагранжевых многообразиях (п. 1) строится канонический оператор (п. 2), доказывается его инвариантность (п. 3), а затем рассматривается коммутация канонического оператора с оператором Гамильтона (п. 4). В работах [1] — [3] развернут обобщенный метод стационарной фазы с точностью до аналитических функций, а в работе [3] указана возможность построения канонического оператора Маслова в рассматриваемой ситуации.

1. Квантованные лагранжевые аналитические многообразия

Пусть Φ есть $2n$-мерное вещественное пространство с координатами $(x, p) = (x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$ и структурной формой $dx \wedge dp$. Пусть M^n — аналитическое многообразие размерности n в гамильтоновом пространстве Φ, i — оператор вложения $i: M^n \subset \Phi$.

Многообразие M^n называется лагранжевым, если на M^n существует функция S, удовлетворяющая на M^n уравнению $dS = i^* p dx$.

Пусть $[n]$ — множество целых чисел от 1 до n. Обозначим через I и $\bar{I}$ подмножества множества $[n]$, такие, что $I \cup \bar{I} = [n]$, $I \cap \bar{I} = \varnothing$. Рассмотрим канонический атлас многообразия M^n, состоящий из карт (U, I) с координатами $(x^I, p_{\bar{I}})$. Определим в карте (U, I) 1-форму $\omega_I = i^* (p_I dx^I - x^{\bar{I}} dp_{\bar{I}})$ и действие S_I как решение уравнения

$$dS_I = \omega_I, \tag{1}$$

принимающее в отмеченной точке α_I карты (U, I) значение

$$S_I(\alpha_I) = \int\limits_{\gamma[\alpha_0, \alpha_I]} i^* p_{[n]} dx^{[n]} - p_{\bar{I}}(\alpha_I) \cdot x^{\bar{I}}(\alpha_I). \tag{2}$$

Точка $\alpha_0 \in M^n$ является отмеченной точкой многообразия M^n, $\gamma[\alpha_0, \alpha_I]$ — некоторый путь из точки α_0 в точку α_I.

Предложение 1. *Решение задачи* (1) *и* (2) *существует, единственно и не зависит от пути* $\gamma[\alpha_0, \alpha_I]$.

Доказательство. Из лагранжевости многообразия M^n следует точность формы ω_I.

Пусть на многообразии M^n задана некоторая невырожденная мера $\sigma \in \Lambda^n(T^*M)$. Определим коцепь канонического покрытия

$$J_I = \left[\frac{\partial \sigma}{\partial (x^I, p_{\overline{I}})}\right]^{-1}.$$

Определение 2. Лагранжево многообразие M^n называется квантованным, если на M^n существует коцепь канонического покрытия $\operatorname{Arg} J_I$ с коэффициентами в пучке ростков гладких функций, удовлетворяющая условию.

Пусть α — некоторая точка в пересечении карт $(U, I) \cap (V, J)$. Тогда

$$\operatorname{Arg} J_J(\alpha) = \operatorname{Arg} J_I(\alpha) + \sum_{k=1}^{n} \arg \Lambda_k(\alpha) + |I_2| \pi,$$

где $\Lambda_k(\alpha)$ — собственные значения матрицы

$$-\frac{\partial(p_{I_2}, -x^{I_3})}{\partial(x^{I_2}, p_{I_3})}, \quad -\pi \leqslant \arg \Lambda_k(\alpha) \leqslant 0, \tag{3}$$

$$I_1 = I \cap J, \; I_2 = I \cap \overline{I}_1, \; I_3 = J \cap \overline{I}_1, \; I_4 = \overline{I}_1 \cap \overline{I}_2 \cap \overline{I}_3.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать такие многообразия без края, на которых любая связная компонента нулевого уровня функции $J_{[n]}$ входит с некоторой окрестностью в карту канонического атласа (U, I).

2. Операторы ${}^A V_I^J$

На сечениях пучка ростков аналитических функций F^A над картами многообразия со значениями в соболевской шкале пространств по переменной τ (аналитических по переменной τ в окрестности нуля, за исключением точки $\tau = 0$) определим в точке $x \in R_x^n$ элементарный канонический оператор по формуле

$$\begin{gathered} K_{(U,I)}^A : \Gamma((U, I), F^A|_{(U,I)}) \to L_2(R^n, H_s), \\ K_{(U,I)}^A \varphi = e_x F_{p_{\overline{I}} \to x^{\overline{I}}}^A \exp(iAS_I) J_I^{-1/2} \varphi, \end{gathered} \tag{4}$$

где $A = \sqrt{-\frac{d^2}{d\tau^2} + 1}$, функция e_x такова, что $e_x(x') = 1$ внутри малой окрестности рассматриваемой точки x и равна нулю вне этой окрестности.

Пусть две карты (U, I), (V, J) имеют непустое пересечение. Определим операторы ${}^A V_I^J$ как решение сравнения

$$K^A_{(U,I)}\varphi \equiv K^A_{(V,J)}{}^AV^I_J\varphi \bmod \Gamma(F^A_0)$$
$$\varphi \in \Gamma((U, I)\cap(V, J), F^A|_{(U,I)\cap(V,J)}), \tag{5}$$

где F^A_0 — пространство сечений пучка ростков аналитических функций над малой окрестностью рассматриваемой точки x, аналитичных по τ в окрестности точки $\tau=0$.

Мы предполагаем, что поверхность

$$x^{\bar I}_{p_{\bar I}} + S_I = 0 \tag{6}$$

при $x=\bar x$ не касается границ канонических карт и не пересекается с ними в особых точках. Это предположение правомерно, т. к. уравнение (6) определяет в этом случае гиперплоскость по координатам $p_{\bar I}$ в окрестности границ карты (U, I) при специальном выборе карт $\{(U, I)\}$ таким образом, чтобы точка x не принадлежала границе по переменным $x^{\bar I}$ канонической проекции карт (U, I) на физическое пространство. Будем называть канонический атлас, удовлетворяющий перечисленным требованиям, специализированным. Отметим, что уравнение (6) определяет некоторую глобальную поверхность в пространстве (x, p), поскольку, как будет показано ниже, фазовые функции при координатных переходах связаны преобразованием Лежандра, а также из-за лагранжевости многообразия M^n.

Предложение 2. *Решение сравнения* (5) *существует и не зависит от* φ. *Более того, предъявляемый оператор* ${}^AV^J_I$ *обладает следующими свойствами*:

1°. *Оператор* ${}^AV^J_I$ *есть композиция элементарного оператора перехода* π^J_I *и разложения по степеням* A^{-1} *с коэффициентами—дифференциальными операторами.*

2°. *Оператор* ${}^AV^J_I$ *обратим, причем*

$$({}^AV^J_I)^{-1} = {}^AV^I_J \text{ на } \Gamma((U, I)\cap(V, J), F^A|_{(U,I)\cap(V,J)}). \tag{7}$$

Доказательство. Из определения оператора $K^A_{(U,I)}$ следует, что сравнение (5) эквивалентно следующему сравнению:

$$F^A_{\substack{p_{\bar I}\to x^{\bar I}\\ x^{\bar J}\to p_{\bar J}}} \exp(iAS_I)J_I^{-1/2}e_x\varphi \equiv \exp(iAS_J)J_J^{-1/2}e^A_x V^I_J\varphi.$$

В обозначениях, принятых выше, сравнение для операторов ${}^AV^J_I$ перепишется в виде

$$F^A_{\substack{p_{I_3}\to x^{I_3}\\ x^{I_2}\to p_{I_2}}} \exp(iAS_I)J_I^{-1/2}e_x\varphi \equiv \exp(iAS_J J)_J^{-1/2}e^A_x V^I_J\varphi. \tag{8}$$

Применим к выражению в левой части сравнения (8) формулу обобщенного метода стационарной фазы (см. [1] — [3]). (Наличие функции e_x дает аналитический вклад в разложение от границ карт (поскольку переход всегда можно сделать через карту $(U, [n])$), а на остальные преобразования не влияет. Поэтому с учетом выше сделанного замечания в выкладках мы будем опускать функцию e_x). Для этого найдем стационарную точку фазы рассматриваемого интеграла, которая равна $p_{I_3}x^{I_3} - p_{I_2}x^{I_2} + S_I$.

Уравнения стационарной точки имеют вид

$$\begin{aligned} x^{I_3} - x^{I_3}(x^{I_2}, \; p_{I_3}) = 0, \\ -p_{I_2} + p_{I_2}(x^{I_2}, \; p_{I_3}) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Поскольку

$$\frac{\partial(p_{I_2}, \; -x^{I_3})}{\partial(x^{I_2}, \; p_{I_3})} \neq 0,$$

то решение системы (9) единственно, и, более того, совпадает с функциями

$$x^{I_2} = x^{I_2}(x^{I_3}, \; p_{I_2}); \quad p_{I_3} = p_{I_3}(x^{I_3}, \; p_{I_2}).$$

При подстановке стационарной точки в исходную фазовую функцию получим

$$\begin{aligned} p_{I_3}(x^{I_3}, \; p_{I_2})\cdot x^{I_3} - p_{I_2}\cdot x^{I_2}(x^{I_3}, \; p_{I_2}) + \\ + S_I(x^{I_1}, \; x^{I_2}(x^{I_3}, \; p_{I_2}), \; p_{I_3}(x^{I_3}, \; p_{I_2}), \; p_{I_4}) = S_J. \end{aligned}$$

По формуле обобщенного метода стационарной фазы оставшаяся часть разложения имеет вид

$$(-1)^{[I_2]/2}\pi_I^J[\operatorname{Hess}_{x^{I_2}, p_{I_3}}(-S_I)] J_I^{-1/2} {}^{A}V_J^I.$$

Правильность модуля и аргумента якобиана в карте (V, J) следует из определения аргумента и того, что

$$J_I = \det\frac{\partial(x^{I_1}, \; x^{I_2}, \; p_{I_3}, \; p_{I_4})}{\partial\sigma},$$

$$J_J = \det\frac{\partial(x^{I_1}, \; x^{I_3}, \; p_{I_2}, \; p_{I_4})}{\partial\sigma}.$$

Дадим конструкцию (явные формулы) оператора ${}^{A}V_J^I$. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функция

$$u(x^{I_3}, \; p_{I_2}, \; \xi_{I_3}, \; \pi^{I_2}, \; t) = (2\pi A^{-1} i \sin t)^{-n/2} \int_{R^1} \dots \int_{R^1}$$

$$\exp[iA(2\sin t)^{-1}(\cos t\{(\xi_{I_3}, \; \xi_{I_3}) + (\pi^{I_2}, \; \pi^{I_2})\} -$$

$$-2\{(x^{I_2}, \pi^{I_2})+(p_{I_3}, \xi_{I_3})\}+\cos t\{(x^{I_2}, x^{I_2}\}+$$

$$+(p_{I_3}, p_{I_3})\})]\exp[iA\{x^{I_3}p_{I_3}-x^{I_2}p_{I_2}+S_I\}]\cdot J_I^{-1/2}\varphi dx^{I_2}dp_{I_3}$$

является решением следующей задачи:

$$iA^{-1}\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{A^{-2}}{2}\Delta_{\xi_{I_3}},{}_{\pi^{I_2}}u+\frac{1}{2}[(\xi_{I_3}, \xi_{I_3})+(\pi^{I_2}, \pi^{I_2})]u,$$

$$u(x^{I_3}, p_{I_2}, \xi_{I_3}, \pi^{I_2}, 0)=(\exp iA\{\xi_{I_3}x^{I_3}-\pi^{I_2}p_{I_2}+S_I\})J_I^{-1/2}\varphi,$$

где $\Delta_{\xi_{I_3}}, {}_{\pi^{I_2}}$ — оператор Лапласа по ξ_{I_3} и π^{I_2}. Поскольку из предыдущего следует, что после применения к левой части сравнения (8) обобщенного метода стационарной фазы получим в качестве мультипликативной составляющей величину $\exp(iAS_J)\times\times J_J^{-1/2}(x^{I_3}, p_{I_2})$, то подставляя разложение с неопределенными коэффициентами левой части сравнения (8), в уравнение и приравнивая члены при одинаковых степенях A^{-1}, получим уравнение для величины

$${}^A\mathcal{F}^I_J\varphi(x^{I_3}, p_{I_2}, \xi_{I_3}, \pi^{I_2}, t)\left(\text{при } \xi_{I_3}=0, \pi^{I_2}=0, t=\frac{\pi}{2}-{}^AV^I_J\varphi\right),$$

являющееся рекуррентным соотношением для его разложения по гладкости (ср. с [6], [4]):

$$({}^A\mathcal{F}^I_J)\varphi(x^{I_3}, p_{I_2}, \xi_{I_3}, \pi^{I_2}, t)=({}^A\mathcal{F}^I_J\varphi)(x^{I_3}, p_{I_2}, \xi_{I_3}, \pi^{I_2}, 0)+$$

$$+i(2A)^{-1}\int_0^t Q_{IJ}^{1/2}\Delta_{IJ}Q_{IJ}^{-1/2}\,{}^A\mathcal{F}^I_J\varphi(x^{I_3}, p_{I_2}, \xi_{I_3}, \pi^{I_2}, \tau)\,d\tau; \qquad (10)$$

здесь

$$\Delta_{IJ}=\left(\frac{\partial Z}{\partial W}\frac{\partial}{\partial Z}\right)^2, \quad Z=(x^{I_2}, p_{I_3}), \quad W=(\pi^{I_2}, \xi_{I_3}),$$

$$\pi^{I_2}=x^{I_2}\cos t+\frac{\partial\Phi_{IJ}}{\partial x^{I_2}}\sin t,$$

$$\xi_{I_3}=p_{I_3}\cos t+\frac{\partial\Phi_{IJ}}{\partial p_{I_3}}\sin t,$$

$$\Phi_{IJ}=p_{I_3}x^{I_3}-p_{I_2}x^{I_2}+S_I,$$

$$Q=\det\left\|\delta^i_j\cos t+\sin t\,\frac{\partial(p_{I_2}, -x^{I_3})}{\partial(x^{I_2}, p_{I_3})}\right\|.$$

Интегрирование в формуле (10) происходит по кривой, соединяющей точки 0 и t в комплексной плоскости τ, не проходящей через нули функции Q_{IJ}.

Докажем формулу (7) для операторов ${}^AV^J_I$. По определению операторов ${}^AV^J_I$ для ростков аналитических функций над пересечением карт $(U, I)\cap(V, J)$ имеем

$$K^A_{(U,I)}\varphi\equiv K^A_{(V,J)}{}^AV^I_J\varphi\equiv K^A_{(U,I)}{}^AV^J_I\,{}^AV^I_J\varphi.$$

Свойство 2° операторов ${}^{A}V_{I}^{J}$ следует из единственности асимптотического разложения в $1/h$-теории, поскольку (ср. с [7]) явный вид дифференциальных операторов в разложениях ${}^{A}V_{I}^{J}$ одинаков в обоих случаях.

Введем на многообразии M^n некоторый пучок $\mathfrak{M}$ (см. [7]), который строится из сечений пучка F^A над картами канонического атласа с помощью функций склейки ${}^{A}V_{J}^{I}$. Корректность этого определения следует из предложения 2. На сечениях пучка $\mathfrak{M}$ над картами канонического покрытия определим канонический оператор

$$\mathscr{K}^{A}_{(U,I)}: \Gamma((U,I), \mathfrak{M}|_{(U,I)}) \to L_2(R^n, H_s) | \Gamma(F_0^A), \tag{11}$$

полагая $\mathscr{K}^{A}_{(U,I)}\varphi = K_{(U,I)}\varphi$.

3. Инвариантность канонического оператора

Предложение 3. *На сечениях пучка $\mathfrak{M}$ над множеством $(U, I) \cap (V, J)$ справедливо соотношение*

$$\mathscr{K}^{A}_{(U,I)}\varphi^I \equiv \mathscr{K}^{A}_{(V,J)}\varphi^J \operatorname{mod} \Gamma(F_0^A),$$

где φ^I — ограничение сечения φ на карту (U, I) в канонических координатах этой карты.

Доказательство. По определению оператора $\mathscr{K}^{A}_{(U,I)}$ имеем

$$\mathscr{K}^{A}_{(U,I)}\varphi^I \equiv K^{A}_{(U,I)}\varphi^I \equiv K^{A}_{(V,J)}\,{}^{A}V_{J}^{I}\varphi^I \equiv$$

$$\equiv K^{A}_{(V,J)}\varphi^J \equiv \mathscr{K}^{A}_{(V,J)}\varphi^J.$$

Отметим, что в наших предположениях пучок F^A можно заменить пучком кусочно-аналитических функций над картами канонического покрытия многообразия M^n со значениями в соболевской шкале пространств по переменной τ (аналитичных по переменной τ в окрестности нуля за исключением точки $\tau = 0$) таких, что:

1°. Поверхность (6) не касается границ областей аналитичности и не пересекается с ними в особых точках.

2°. Точка x не принадлежит границе канонической проекции областей аналитичности на пространство с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$.

При этом справедливы определение операторов ${}^{A}V_{I}^{J}$, а также предложения 2 и 3. Таким путем можно определить сечения некоторого пучка на M^n вида $\chi\varphi$, где φ — некоторое сечение пучка $\mathfrak{M}$, а χ — функция на многообразии M^n, постоянная вне границ карт канонического покрытия.

Теорема. *Пусть на квантованном лагранжевом многообразии M^n выбран специализированный канонический атлас и в каждой окрестности (U, I) определен канонический оператор*

$$\mathscr{K}^{A}_{(U,I)}: \Gamma((U,I), \mathfrak{M}_{(U,I)}) \to L_2(R^n, H_s) | \Gamma(F_0^A),$$

причем в пересечении карт $(U, I)\cap(V, J)$ *выполняется равенство*

$$\mathcal{K}^A_{(U,I)}\varphi^I=\mathcal{K}^A_{(V,J)}\varphi^J.$$

Тогда локально равномерно по x существует единственный линейный оператор $\mathcal{K}^A$, *не зависящий от выбора специализированного атласа карт, причем*

$$\mathcal{K}^A:\Gamma(M^n, \mathfrak{M})\to L_2(R^n, H_s)\,|\,\Gamma(F_0^A), \tag{12}$$

$$\mathcal{K}^A|_{(U,I)}=\mathcal{K}^A_{(U,I)}. \tag{13}$$

Доказательство. Докажем, что необходимым условиям удовлетворяет оператор

$$\mathcal{K}^A\varphi=\sum_{(W,K)}K^A_{(W,K)}\chi\varphi^K, \tag{14}$$

где функция χ равна обратной величине числа карт специализированного атласа, накрывающих данную точку многообразия M^n. Оператор $\mathcal{K}^A$ линеен, что видно из определения (14). Докажем, что для любого сечения ограничения пучка $\mathfrak{M}$ на карту (U, I) выполняется соотношение (13). Используя определение пучка $\mathfrak{M}$ и операторов ${}^AV_I^J$, получаем

$$\mathcal{K}^A\varphi|_{(U,I)}=\sum_{(W,K),\,(W,K)\cap(U,I)\neq\varnothing}K^A_{(W,K)}\chi\varphi^K|_{(U,I)}\equiv$$

$$\equiv\sum_{(W,K),\,(W,K)\cap(U,I)\neq\varnothing}K^A_{(W,K)}\chi^A V^I_K\varphi^I|_{(W,K)}\equiv$$

$$\equiv K^A_{(U,I)}\sum_{(W,K),\,(W,K)\cap(U,I)\neq\varnothing}\chi\varphi^I|_{(W,K)}=\mathcal{K}^A_{(U,I)}\varphi^I|_{(U,I)}.$$

Докажем независимость оператора (14) от выбора специализированного канонического атласа. Обозначим символами $\{(U, I)\}$ и $\{(W, K)\}$ наборы канонических карт двух различных канонических атласов, символами $\mathcal{K}^A_1$ и $\mathcal{K}^A_2$, χ_1 и χ_2 — канонические операторы и функции, относящиеся к различным атласам. Тогда

$$\mathcal{K}^A_1\varphi=\sum_{(U,I)}K^A_{(U,I)}\chi_1\varphi^I=\sum_{(U,I)}\sum_{(W,K),\,(W,K)\cap(U,I)\neq\varnothing}K^A_{(U,I)}\chi_2\chi_1\varphi^I|_{(W,K)}\equiv$$

$$\equiv\sum_{(U,I)}\sum_{(W,K),\,(W,K)\cap(U,I)\neq\varnothing}K^A_{(W,K)}\chi_2\chi_1\varphi^K|_{(U,I)}=$$

$$=\sum_{(W,K)}K^A_{(W,K)}\chi_2\sum_{(U,I)}\chi_1\varphi^K|_{(U,I)}=\sum_{(W,K)}K^A_{(W,K)}\chi_2\varphi^K.$$

Из условия предложения следует независимость глобального оператора от локального представления сечения φ. Действительно,

$$\mathcal{K}^A\varphi^I=\mathcal{K}^A_{(U,I)}\varphi^I\equiv\mathcal{K}^A_{(V,J)}\varphi^J=\mathcal{K}^A\varphi^J \text{ на } (U, I)\cap(V, J).$$

Поэтому, представляя сечение φ в виде

$$\varphi = \sum_{(U, I)} \chi\varphi^I$$

и используя линейность оператора $\mathscr{K}^A$, получим

$$\mathscr{K}^A \varphi = \mathscr{K}^A \sum_{(U, I)} \chi\varphi^I = \sum_{(U, I)} \mathscr{K}^A \chi\varphi^I = \sum_{(U, I)} \mathscr{K}^A_{(U, I)} \chi\varphi^I.$$

Отсюда следует доказываемое предложение.

Замечание. С точностью до сечений пучка F_0^A в определении (14) можно ограничиться ростками сечений пучка $\mathfrak{M}$ над прообразами рассматриваемой точки x при канонической проекции.

4. Коммутация канонического оператора и оператора Гамильтона, ассоциированного с ним

Будем говорить, что канонический оператор $\mathscr{K}^A$ ассоциирован с оператором Гамильтона $H(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})$, если многообразие M^n и невырожденная мера σ инвариантны относительно гамильтонова векторного поля

$$V(H) = H_p(x, p)\frac{\partial}{\partial x} - H_x(x, p)\frac{\partial}{\partial p}.$$

Предложение 4. *На квантованном лагранжевом многообразии справедливо сравнение*

$$\hat{H}(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}})\mathscr{K}^A\varphi = -i\sum_{s\geqslant 1} A^{-s}\mathscr{K}^A\mathscr{P}_s\varphi,$$

$$\mathscr{P}_1 = V(H) - \frac{1}{2}\operatorname{trace} H_{x, p}(x, p). \tag{15}$$

Доказательство. Из леммы о действии оператора Гамильтона на быстроосциллирующую экспоненту (см. [5]) следует, что

$$H(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}})F^A_{p_{\bar{I}}\to x^{\bar{I}}} \exp(iAS_I(x^I, p_{\bar{I}}))\cdot\varphi(x^I, p_{\bar{I}}) =$$

$$= F^A_{p_{\bar{I}}\to x^{\bar{I}}}\Big(\exp(iAS_I)\cdot\Big[H\Big(x^I, -\frac{\partial S_I}{\partial p_{\bar{I}}}, \frac{\partial S_I}{\partial x^I}, p_{\bar{I}}\Big) +$$

$$+ iA^{-1}\exp(iAS_I)\cdot\Big[\frac{\partial H}{\partial x^{\bar{I}}}\cdot\frac{\partial}{\partial p_{\bar{I}}} - \frac{\partial H}{\partial p_I}\cdot\frac{\partial}{\partial x^I} -$$

$$-\frac{1}{2}\Big\{\frac{\partial^2 S_I}{\partial p_{\bar{I}}\partial p_{\bar{K}}}\cdot\frac{\partial^2 H}{\partial x^{\bar{I}}\partial x^{\bar{K}}} + \frac{\partial^2 S_I}{\partial x^I\partial x^K}\cdot\frac{\partial^2 H}{\partial p_I\partial p_K} -$$

$$-2\frac{\partial^2 S_I}{\partial p_{\bar{I}}\partial x^K}\cdot\frac{\partial^2 H}{\partial x^{\bar{I}}\partial p_K}\Big\} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^{\bar{I}}\partial p_{\bar{I}}}\Big] +$$

$$+\sum_{j=2}^{\infty} A^{-j}\exp(iAS_I)\cdot\mathscr{P}_j\Big)\,\varphi,$$

где дифференциальные операторы $\mathscr{P}_j$ имеют порядок $j>1$. Поэтому в результате коммутации оператора Гамильтона и элементарного канонического оператора получим

$$H(\overset{2}{x},\overset{1}{\hat{p}})\,\mathscr{K}^{A}_{(U,I)}\,\varphi^I\equiv\mathscr{K}^{A}_{(U,I)}\cdot$$

$$H\left(x^I,-\frac{\partial}{\partial p_{\bar{I}}}S_I,\ \frac{\partial}{\partial x^I}S_I,\ p_{\bar{I}}\right)\cdot\varphi^I+$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty} A^{-j}\,\mathscr{K}^{A}_{(U,I)}J_I^{1/2}\ \ \mathscr{P}^{j}_{(U,I)}J_I^{-1/2}\,\varphi^I,$$

где оператор

$$H\left(x^I,-\frac{\partial S_I}{\partial p_{\bar{I}}},\ \frac{\partial S_I}{\partial x^I},\ p_{\bar{I}}\right)$$

называется оператором Гамильтона — Якоби, а оператор $i\mathscr{P}^{1}_{(U,I)}$ — оператором переноса.

Используя лемму С. Л. Соболева, оператор $i\mathscr{P}^{1}_{(U,I)}$ преобразуем к виду (15). Оператор Гамильтона — Якоби обращается в нуль на лагранжевом многообразии M^n. Действительно,

$$0=dx\wedge dp\,(V(H),\ X)=dH(X),$$

где поле $X\in TM^n$. В силу инвариантности канонического оператора формула коммутации имеет вид (15). Это доказывает следующее предложение.

Предложение 5. *На пересечении карт* $(U,I)\cap(V,J)$ *справедливо соотношение*

$$-iA^{-1}\mathscr{P}_{(U,I)}\,\varphi^I=-iA^{-1}\,\mathscr{P}_{(V,J)}\varphi^J,$$

$$\mathscr{P}_{(W,K)}=\sum_{s\geqslant 1}A^{-s+1}\,\mathscr{P}_s\big|_{(W,K)},$$

$$\varphi\in\Gamma((U,I)\cap(V,I),\ \mathfrak{M}\,|\,(V,I)\cap(V,J)).$$

По определению оператора $\mathscr{P}_{(U,I)}$ справедливо сравнение

$$\mathscr{K}^{A}_{(U,I)}[-iA^{-1}\mathscr{P}_{(U,I)}]\,\varphi^I\equiv\hat{H}\,\mathscr{K}^{A}_{(U,I)}\,\varphi^I\equiv$$

$$\equiv\hat{H}\,\mathscr{K}^{A}_{(V,J)}\,\varphi^J\equiv\mathscr{K}^{A}_{(V,J)}\,[iA^{-1}\,\mathscr{P}_{(V,J)}\,\varphi^J]\equiv$$

$$\equiv\mathscr{K}^{A}_{(U,I)}[-iA^{-1}\mathscr{P}_{(V,J)}\varphi^J].$$

Отсюда вытекает справедливость доказываемого предложения в $1/h$ теории (см. [7]). В нашем случае справедливость предложения следует из того, что в силу сделанных предположений операторы $\mathscr{P}_{(U,I)}$ и $\mathscr{P}_{(V,J)}$ определимы также, как в $1/h$-теории с естественной заменой параметра разложения.

Автор выражает искреннюю благодарность Б. Ю. Стернину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Примечание при корректуре. В настоящее время автором получен аналог этой теории в комплексной ситуации. Соответствующее изложение будет опубликовано в ближайшее время.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубнов В. Л. О каноническом операторе Маслова для гиперболических уравнений. ДАН СССР, т. 183, № 4, 1968, с. 754—757.
2. Дубнов В. Л. Обобщенный метод стационарной фазы для интегралов типа свертки. УМН, т. XXIII, № 1, 1968, с. 223—224.
3. Дубнов В. Л. Об абстрактном методе стационарной фазы. Тр. Моск. ин-та электрон. машиностр., вып. 5, 1970, с. 252—286.
4. Кучеренко В. В. Об одном способе вычисления членов асимптотического разложення $\int s^{i\omega S(x)} \varphi(x)\, dx,\ X \in R^n$ при $\omega \to \infty$. Тр. Моск. ин-та электрон. машиностр., 1968, вып. 4 , с. 189—217.
5. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. М., Изд. МГУ, 1965.
6. Маслов В. П. О регуляризации задачи Коши для псевдодифференциальных уравнений. ДАН СССР, т. 177, № 6, 1967, с. 1277—1280.
7. Мищенко А. С., Стернин Б. Ю. Канонический оператор. Ч. I. М., Изд. МИЭМ, 1974.

г. Москва

Поступила
4 IX 1973

О. С. Германов, Н. М. Писарева, Е. И. Яковлев. Первый интеграл геодезических линий и группы симметрии

(аннотация статьи, принятой к печати)

В настоящей работе вводится определение группы симметрии геометрического объекта на дифференцируемом многообразии и в пространствах аффинной связности. Кроме того, в работе получены уравнения, определяющее группу симметрии тензора, построенного по тензорам, определяющим первый интеграл геодезических линий, в пространстве Вейля и в римановом пространстве типа Лиувилля. В частном случае — четырехмерном пространстве типа Лиувилля — найден вид оператора этой группы. (Работа поступила в журнал „Математика" 10 XII 1975.)

Р. Б. Зархина. Многомерные матрицы Якоби и их применение к граничной задаче для конечно-разностных уравнений

(аннотация статьи, принятой к печати)

В заметке рассматриваются многомерные матрицы Якоби, их связь с мультипликативно-положительными функционалами и применение к граничной задаче для конечно-разностных уравнений с многими параметрами. (Работа поступила в журнал „Математика" 28 III 1977.)