



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Яковлев, Разрушение тонкостенных конструкций и локализации деформаций по схеме жесткопластического течения,  
*Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2014, выпуск 7, 96–103

<https://www.mathnet.ru/vsgu431>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

15 мая 2025 г., 02:54:11



## РАЗРУШЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ И ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЕФОРМАЦИЙ ПО СХЕМЕ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

© 2014 А.С. Яковлев<sup>1</sup>

В статье рассматривается модель разрушения тонких пластин с трещинами, являющаяся продолжением и обобщением КРТ-модели (модель Леонова—Панасюка—Дагдейла и основанная на представлении пластических областей у вершин трещины как зон, в которых деформации происходят по схеме жесткопластического течения Прагера.

**Ключевые слова:** жесткопластическое течение, тонкостенная пластина, трещина, модель Леонова — Панасюка — Дагдейла, пластическая деформация, объемная плотность энергии диссипации, уравнение Фредгольма, метод "малого параметра".

Жесткопластический анализ задачи о растяжении полосы при плоской деформации, включая обоснование и введение критериев разрушения, проведем, следуя результатам, полученным в [1–3].

Рассмотрим области  $A_1OB_1$  и  $C_1OD_1$ , они движутся как жесткие в направлении к т. О (рис. 1).

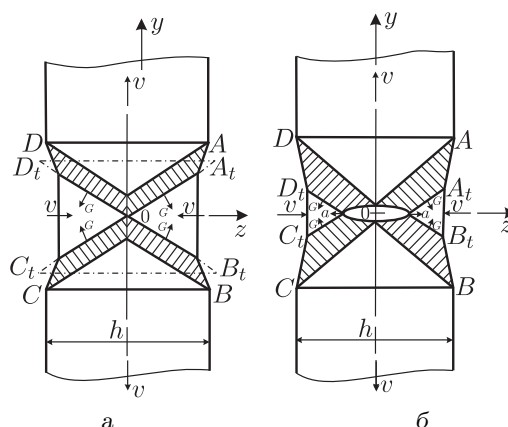


Рис. 1. Линии скольжения и внутренняя трещина в полосе:

$A$  — линии скольжения по схеме Прагера;  $B$  — развитие внутренней трещины в полосе

<sup>1</sup>Яковлев Александр Степанович (Sash84\_777@bk.ru), кафедра теоретической механики Самарского государственного аэрокосмического университета им. акад. С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Жесткопластический анализ соответствующей задачи о растяжении полосы при плоской деформации, включая обоснование и введение критериев разрушения, проведем, следуя результатам, полученным в [3]. Области  $A_1OB_1$  и  $C_1OD_1$  движутся как жесткие в направлении к т.  $O$ . Пластическая деформация локализуется вдоль изолированных линий скольжения  $B_1OD_1$  и  $A_1OC_1$ , которые являются линиями разрыва скоростей перемещений. При пересечении этих линий частицами материала происходят скачкообразное увеличение деформаций и их локализация в заштрихованных областях.

Мерой общих деформаций можно выбрать первое главное значение тензора конечных деформаций Альманси  $E_1$  и сформулировать следующий критерий: разрушение материала наступит в том случае, если расстояние между бесконечно близкими частицами изменяется на критическую величину, определяемую постоянной  $E_*$ :

$$\max E_1 \geq E_*. \quad (1)$$

В работе [3] показано, что можно сформулировать эквивалентный (1) критерий, использующий имеющую физический смысл величину объемной плотности энергии диссипации  $W$ , получаемой материальной частицей при пересечении линии разрыва скоростей перемещений:

$$\max W_1 \geq W_*. \quad (2)$$

Здесь  $W$  определяется в виде:

$$W_1 = \frac{[V_r]}{G + V_n} k, \quad (3)$$

где  $[V_r]$  — разрыв касательной составляющей скорости перемещения;  $V_n$  — нормальная компонента скорости движения частиц на линии разрыва;  $G$  — нормальная скорость движения линии разрыва;  $k$  — предел текучести материала на сдвиг. Величины  $E_*$  и  $W_*$  являются экспериментально определяемыми характеристиками материала [4].

Для рассматриваемой схемы течения входящие в (3) величины определяются следующими соотношениями:

$$[V_r] = v \cdot \sqrt{2}; \quad V_n = \frac{v}{\sqrt{2}}; \quad \bar{W} = \frac{W}{k}; \quad E_1 = \frac{\bar{W}^2}{4} \left( \sqrt{1 + \frac{4}{\bar{W}^2}} - 1 \right), \quad (4)$$

где  $v$  — смещение берегов пластической зоны в единицу времени.

Очевидно, что в точке пересечения линий разрыва (т.  $O$ ) величины  $\bar{W}$  и  $E_1$  для разных линий определенным образом суммируются, вследствие чего в т.  $O$  зарождается внутренняя трещина, которая будет распространяться вдоль оси  $Z$  в обе стороны со скоростью  $a$  (см. рис. 1, б):

$$a = |G| \cdot \sqrt{2}; \quad a = v \left( \frac{2}{\bar{W}} - 1 \right). \quad (5)$$

Разрушение полосы произойдет при  $a + v = \frac{h}{2}$ , когда внутренняя трещина выйдет на свободную поверхность. Составим уравнение равновесия для полосы, с учетом (5) получим:

$$P \cdot h = 2k(h - 2(a + v)) = \sigma_s \left( h - \frac{4v}{\bar{W}_*} \right). \quad (6)$$

Здесь  $P$  — усилие, растягивающее полосу,  $\sigma_s$  — предел текучести.

Полученное уравнение используем в качестве граничных условий для задачи о бесконечной пластине (рис. 2) толщиной  $h$  с центральной трещиной длиной  $2l$ , растягиваемой на бесконечности усилиями (сечению  $A-A$  соответствует рис. 1, б).

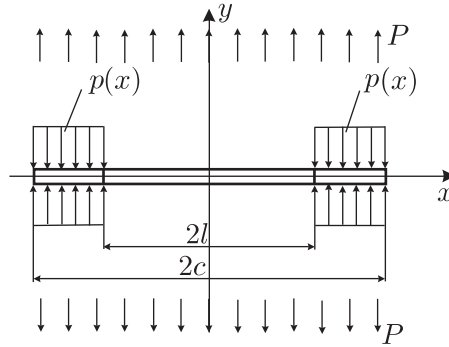


Рис. 2. Бесконечная пластина со сквозной трещиной

В пластических зонах длиной  $c-l$  реализуется рассмотренное выше течение по схеме Прагера и справедливо уравнение (6):

$$p(x) = \sigma_s \left( 1 - \frac{4v(x)}{h\bar{W}_*} \right). \quad (7)$$

Отметим, что в КРТ-модели вместо (7) используется условие  $p(x) = \sigma_s$ . Таким образом, в рассматриваемой задаче на части контура, соответствующего пластическим зонам, задается не распределение усилий, а связь между напряжениями и смещениями.

Предельное состояние пластины с трещиной определяется согласно КРТ-критерию при условии достижения раскрытием трещины в ее вершине критического значения:

$$v(l) \geq v_*. \quad (8)$$

Очевидно, совершенно логичной будет выглядеть увязка этого условия с моментом выхода внутренней трещины на свободные поверхности. Исходя из этого, можно определить связь между КРТ-критерием и энергетическим критерием (2):

$$v(l) = \frac{\bar{W}_* \cdot h}{4}. \quad (9)$$

С другой стороны, условие (9) представляет собой теоретическую зависимость между критическим раскрытием трещины и толщиной материала. Ее характер качественно совпадает с характером имеющихся экспериментальных данных.

Решение упругой задачи с граничными условиями (7) будем искать путем суперпозиции двух решений, первое из которых — это однородное растяжение пластины без трещины, второе — решение для трещины с приложенными на ее берегах напряжениями, исчезающими на бесконечности. Поскольку первое решение не даст вклада в концентрацию напряжений, рассмотрим только второе состояние, для которого запишем следующие граничные условия:

$$p(x) = \begin{cases} -P, & |x| \leq l, \\ -P + \sigma_s \left(1 - \frac{4v(x)}{W_* \cdot h}\right), & l \leq |x| \leq c; \\ v(x, 0) = 0, & |x| \geq c. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь  $v(x)$  — смещение берегов трещины и пластических зон.

В полученной задаче на оси  $x$  касательные напряжения  $\sigma_{xy} = 0$ . В этом случае напряжения и перемещения могут быть выражены через одну аналитическую функцию комплексного переменного по формулам Колосова—Мусхелишвили [5]. Не останавливаясь на подробностях ее отыскания [6; 7], сразу выпишем решение в наиболее удобном для дальнейшего исследования виде:

$$v(x) = \frac{1}{\pi E} \int_{-c}^c p(\xi)(c, x, \xi) d\xi, \quad |x| \leq c; \quad (11)$$

$$\sigma(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{x^2 - c^2}} \int_{-c}^c \frac{p(\xi)\sqrt{c^2 - \xi^2}}{x - \xi} d\xi, \quad |x| \leq c.$$

Подставим граничные условия (10) в первое уравнение (11) и после некоторых преобразований получим неоднородное уравнение Фредгольма второго рода относительно смещений берегов трещины  $v(x)$ :

$$v(x) - \lambda \frac{2}{h} \left( \int_{-c}^{-l} + \int_l^c \right) v(\xi) \Gamma(c, x, \xi) d\xi = f_a(x). \quad (12)$$

Здесь

$$\Gamma(c, x, \xi) = \ln \frac{c^2 - x \cdot \xi - \sqrt{(c^2 - x^2)(c^2 - \xi^2)}}{c^2 - x \cdot \xi + \sqrt{(c^2 - x^2)(c^2 - \xi^2)}}, \quad \lambda = \frac{2\sigma_s}{\pi E W_*}, \quad (13)$$

$$f_a(x) = \frac{\sigma_s}{\pi \cdot E} \left( \frac{P}{\sigma_s} \int_{-c}^c \Gamma(c, x, \xi) d\xi - \left( \int_{-c}^{-l} + \int_l^c \right) \Gamma(c, x, \xi) d\xi \right).$$

К уравнению (12) для определения величины "с" необходимо присоединить условие плавности смыкания берегов пластических зон или эквивалентное условие конечности напряжений:

$$\lim_{x \rightarrow c} v'(x) = 0. \quad (14)$$

Полученное неоднородное интегральное уравнение (12) с ядром, обладающим логарифмической особенностью, согласно теореме Фредгольма имеет решение при любой правой части  $f(x)$ , поскольку соответствующее однородное уравнение не имеет решений, отличных от тривиального нулевого. Действительно, равенство нулю правой части (12) означает отсутствие внешних сил, действующих на контур трещины, что сразу же позволяет сделать вывод о справедливости тождества  $v(x) \equiv 0$ .

Таким образом, согласно теории интегральных уравнений, решение (12) можно представить в виде ряда:

$$v(x) = v_0(x) + \lambda v_1(x) + \lambda^2 v_2(x) + \dots \quad (15)$$

Этот ряд будет сходящимся при достаточно малом  $\lambda$  поэтому необходимо сделать оценку величины этого параметра. В выражении (13) для большинства металлов справедлива оценка  $0,001 \leq \frac{\sigma_s}{E} \leq 0,01$ , причем нижняя граница соответствует пластичным материалам, верхняя более хрупким.

Имеющиеся экспериментальные значения  $\overline{W}_*$  находятся в пределах  $0,3 \leq \overline{W}_* \leq 2$  [3]. Здесь нижняя граница соответствует более хрупким материалам, верхняя — идеально пластичным. Комбинируя эти оценки, можно получить средневзвешенное значение  $\lambda$  для основных конструкционных металлов:  $\lambda_{cp} \cong 0,003$ .

Полученный порядок малости величины  $\lambda$  позволяет сделать вывод о сходимости ряда (15) и, следовательно, о возможности нахождения решения уравнения (12) в виде (15).

Следует отметить, что точным условием сходимости (15) является нормируемость ядра:

$$\left( \int_{-c}^{-l} + \int_l^c \right) |\Gamma(c, x, \xi)|^2 d\xi \leq A, \quad (16)$$

которую можно доказать непосредственным интегрированием. Здесь  $A$  — ограниченная постоянная.

Подставив ряд (15) в уравнение (12) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $\lambda$ , получим рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} v_i(x) &= \frac{2}{h} \left( \int_{-c}^{-l} + \int_l^c \right) \Gamma(c, x, \xi) v_{i-1}(\xi) d\xi, \quad i = 1, 2, \dots, \\ v_0(x) &= f(x), \quad |x| \leq c. \end{aligned} \quad (17)$$

Принимая во внимание, что  $\lambda \approx 10^{-5}$ , для дальнейшего исследования ограничимся двумя членами ряда (15) и запишем решение уравнения в виде:

$$\begin{aligned} v_i(x) &= f(x) + \lambda \frac{2}{h} \left( \int_{-c}^{-l} + \int_l^c \right) f(\xi) \Gamma(c, x, \xi) d\xi, \quad i = 1, 2, \dots; \\ f(x) &= \frac{\sigma_s}{\pi E} \left\{ 2\sqrt{c^2 - x^2} \left( \pi \frac{P}{\sigma_s} + 2 \arccos \frac{l}{c} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{l-c}{c} \Gamma(c, x, l) - \frac{l+x}{c} \Gamma(c, x, -l) \right\}; \\ \lim_{x \rightarrow c} v'(x) &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Отметим, что нулевое приближение этого решения  $v_0(x) = f(x)$  совпадает с решением КРТ-модели.

Таким образом, получено решение краевой задачи (10) в квадратурах, пригодное после регуляризации для численного анализа. В качестве иллюстрации численных результатов на рис. 3 представлена в изометрическом изображении схема деформирования пластической зоны, в момент выхода внутренней трещины на свободные боковые поверхности.

Результаты решения данной задачи получили развитие в работах [8; 9], где были проведены исследования предельных состояний тонкостенных пластин с поверхностной трещиной постоянной и переменной глубины соответственно.

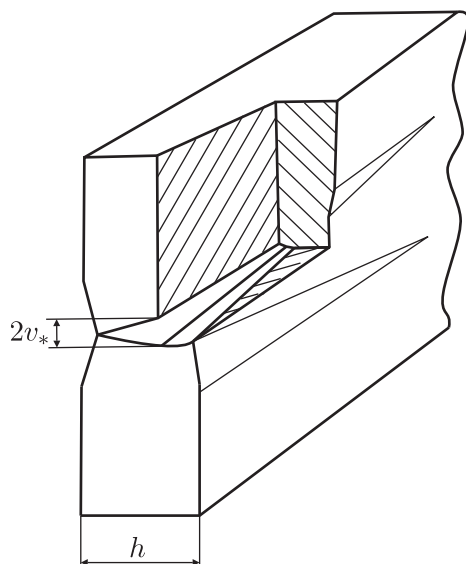


Рис. 3. Схема деформирования пластической зоны у вершины трещины

Механизм перехода от решения задач о тонкостенных пластинах с поверхностными трещиновидными дефектами к задачам о тонкостенных оболочках рассмотрен в работе [10].

## Литература

- [1] Онат Е., Прагер В. Образование шейки при пластическом течении растягиваемого плоского образца // *Механика*. 1995. № 4(32). С. 93.
- [2] Dugdale D. Yielding of steel sheets contains slitsh // *J. Mech. And Phys. Solids*, 1960. V. 8. № 2. P. 100.
- [3] Хромов А.И. Деформация и разрушение жесткопластических тел. Владивосток: Дальнаука, 1996. 181 с.
- [4] Козлова О.В., Хромов А.И. Константы разрушения для идеальных жесткопластических тел // *Доклады РАН*. 2002. Т. 385. № 3. С. 342–345.
- [5] Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
- [6] Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещины в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 442 с.
- [7] Быковцев Г.И., Лукашев Л.Г., Степанов С.Л. Об одной модели разрушения в идеальных упругопластических средах // *Проблемы прочности*. 1982. № 3. С. 72–75.
- [8] Яковлев А.С. Оценка влияния несквозных трещин на прочность конструкций при проектировании летательных аппаратов // *Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета*. 2012. № 4(35). С. 193–196.
- [9] Астафьев В.И., Яковлев А.С. Тонкостенные пластины и оболочки с несквозными трещиновидными дефектами в упругопластическом приближении // *Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета*. 2012. № 5(36). Ч. 1. С. 73–79.

- [10] Яковлев А.С. Тонкостенные пластины с несквозными трещиновидными дефектами в приближении Дагдейла // Вестник Самарского государственного университета. 2013. № 9/2(110). С. 140–146.

## References

- [1] Onat E., Prager V. Formation of a neck at a plastic current of stretched flat sample. *Mekhanika [Mechanics]*, 1995, no. 4(32), pp. 93–98. (in Russian)
- [2] Dugdale D. Yielding of steel sheets contains slitsh. *J. Mech. And Phys. Solids*, 1960, Vol. 8, no. 2, pp. 100–104.
- [3] Khromov A.I. Deformation and destruction of hard-plastic bodies. Vladivostok: Dal'nauka, 1996, 181 p. in Russian
- [4] Kozlova O.V., Khromov A.I. On a destruction constant for ideal hard-plastic bodies. *Doklady RAN [Reports of the Russian Academy of Sciences]*, 2002, Vol. 385, no. 3, pp. 342–345. (in Russian)
- [5] Muskhelishvili N.I. Some main objectives of mathematical theory of elasticity. M., Nauka, 1966, 708 p. (in Russian)
- [6] Panasyuk V.V., Savruk M.P., Datsyshin A.P. Distribution of tension around a crack in plates and covers. Kiev: Naukova dumka, 1976, 442 p. (in Russian)
- [7] Bykovtsev G.I., Lukashev L.G., Stepanov S.L. About one model of destruction in elasto-plastic ideal environments. *Problemy prochnosti [Problems of durability]*, 1982, no. 3, pp. 72–75. (in Russian)
- [8] Yakovlev A.S. Valuation of influence of not through cracks on durability of constructions at the design of aircrafts. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta [Vestnik of Samara State Aerospace university]*, 2012, no. 4(35), pp. 193–196.
- [9] Astafiev V.I., Yakovlev A.S. Thin-walled plates and covers with not through crack-shaped defects in elasto-plastic approach. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta [Vestnik of Samara State Aerospace university]*, 2012, no. 5(36), P. 1, pp. 73–79. (in Russian)
- [10] Yakovlev A.S. Thin-walled plates with not through crack defects in the Dugdale approach. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta [Vestnik of Samara State University]*, 2013, no. 9/2(110), pp. 140–146. (in Russian)

Поступила в редакцию 27/III/2014;  
в окончательном варианте — 27/III/2014.



## THIN-WALLED STRUCTURES DESTRUCTION AND LOCATION STRAIN ON CHART RIGID-CURRENT

© 2014 A.S. Yakovlev<sup>2</sup>

In this article the model of fracture of thin plates with cracks, which is a continuation and generalization of rocket fuel components model (Leonov-Panasyuk-Dugdale) and based on the idea of plastic zone at the crack tip as the areas in which deformations occur on a rigid scheme of Prager flow.

**Key words:** rigid-plastic stream, thin-walled plate, crack, model of Leonov Panasyuk-Dugdale, plastic deformation, volume density of energy dissipation, Fredholm equation, method of "small parameter".

Paper received 27/III/2014.

Paper accepted 27/III/2014.

---

<sup>2</sup>Yakovlev Alexander Stepanovich ([sash84\\_777@bk.ru](mailto:sash84_777@bk.ru)), the Dept. of Theoretical Mechanics, Samara State Aerospace University, Samara, 443086, Russian Federation