С. Дориченко, Л. Медников, А. Шаповалов, XXXII Турнир городов,
Квант, 2011, номер 4, 53–54

https://www.mathnet.ru/kvant2306

XXXII Турнир городов

ЗАДАЧИ ВЕСЕННЕГО ТУРА

Базовый вариант

8–9 классы

1 (3)[1]. См. задачу М2229 «Задачника «Кванта».

2 (4). Прямоугольник разбили на 121 прямоугольную клетку десятью вертикальными и десятью горизонтальными прямыми. У 111 клеток периметры целые. Докажите, что и у остальных десяти клеток периметры целые.

А.Шаповалов

3 (5). Длина взрослого червяка 1 метр. Если червяк взрослый, его можно разрезать на две части в любом отношении длин. При этом получаются два новых червяка, которые сразу начинают расти со скоростью 1 метр в час каждый. Когда длина червяка достигает метра, он становится взрослым и прекращает расти. Можно ли из одного взрослого червяка получить 10 взрослых червяков быстрее, чем за час?

М.Хачатурян

4 (5). Дан выпуклый четырехугольник. Если провести в нем любую диагональ, он разделится на два равнобедренных треугольника. А если провести в нем обе диагонали сразу, он разделится на четыре равнобедренных треугольника. Обязательно ли этот четырехугольник – квадрат?

В.Шевяков

5. Дракон заточил в темницу рыцаря и выдал ему 100 разных монет, половина из которых волшебные (какие именно – знает только дракон). Каждый день рыцарь раскладывает все монеты на две кучки (не обязательно равные). Если в кучках окажется поровну волшебных монет или поровну обычных, дракон отпустит рыцаря. Сможет ли рыцарь гарантированно освободиться не позже, чем:
а) (2) на 50-й день;
б) (3) на 25-й день?

А.Шаповалов, жюри

10–11 классы

1 (3). См. задачу М2230 «Задачника «Кванта».

2 (4). См. задачу 3 базового варианта для 8–9 классов.

3 (4). По кругу лежат 100 белых камней. Дано целое число k в пределах от 1 до 50. За ход разрешается выбрать любые k подряд идущих камней, первый и последний из которых белые, и покрасить первый и последний камни в черный цвет. При каких k можно за несколько таких ходов покрасить все 100 камней в черный цвет?

А.Бердников

4 (5). Четыре перпендикуляра, опущенные из вершин выпуклого пятиугольника на противоположные стороны, пересекаются в одной точке. Докажите, что пятый такой перпендикуляр тоже проходит через эту точку.

Фольклор

5 (5). См. задачу М2232 «Задачника «Кванта».

[1] *Здесь и далее в скобках после номера задачи указано максимальное количество баллов, присуждавшихся за ее решение.*

Сложный вариант

8–9 классы

1 (4). Можно ли какой-нибудь шестиугольник разбить одной прямой на четыре равных треугольника?

Н.Стрелкова

2 (4). Через начало координат проведены прямые (включая оси координат), которые делят координатную плоскость на углы в 1°. Найдите сумму абсцисс точек пересечения этих прямых с прямой $y = 100 - x$.

А. Шаповалов

3 (5). У барона Мюнхгаузена есть 50 гирь. Веса этих гирь – различные натуральные числа, не превосходящие 100, а суммарный вес гирь – четное число. Барон утверждает, что нельзя часть этих гирь положить на одну чашу весов, а остальные – на другую так, чтобы весы оказались в равновесии. Могут ли эти слова барона быть правдой?

А.Толпыго

4 (6). Докажите, что для любого натурального числа N найдутся такие две пары натуральных чисел, что суммы в парах одинаковы, а произведения отличаются ровно в N раз.

Б.Френкин

5 (7). См. задачу М2233 «Задачника «Кванта».

6 (10). Два муравья проползли каждый по своему замкнутому маршруту на доске 7×7. Каждый муравей полз только по сторонам клеток доски и побывал в каждой из 64 вершин клеток ровно один раз. Каково наименьшее возможное число таких сторон, по которым проползали и первый, и второй муравьи?

А.Заславский

7 (10). Дана квадратная таблица, в каждой клетке которой записано по числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма двух наибольших чисел равна a, а в каждом столбце таблицы сумма двух наибольших чисел равна b. Докажите, что $a = b$.

Р.Бапат

10–11 классы

1 (4). См. задачу 3 сложного варианта для 8–9 классов.

2 (6). См. задачу М2234 «Задачника «Кванта».

3. От балки в форме треугольной призмы с двух сторон отпилили (плоской пилой) по куску. Спилы не задели ни оснований, ни друг друга.
а) (3) Могут ли спилы быть подобными, но не равными треугольниками?
б) (4) Может ли один спил быть равносторонним треугольником со стороной 1, а другой – равносторонним треугольником со стороной 2?

П.Сергеев (б), А.Шаповалов (а)

4. Даны N синих и N красных палочек, причем сумма длин синих палочек равна сумме длин красных. Известно, что из синих палочек можно сложить N-угольник и из красных – тоже. Всегда ли можно выбрать одну синюю и одну красную палочки и перекрасить их (синюю – в красный цвет, а красную – в синий) так, что снова из синих палочек можно будет сложить N-угольник и из красных – тоже? Решите задачу:

а) (4) для $N = 3$;

б) (4) для произвольного натурального N, большего 3.

А. Грибалко

5 (8). Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ являются соответственно хордами окружностей ω_1 и ω_2, касающихся друг друга внешним образом. Градусные меры касающихся дуг AB и CD равны α и β. Окружности ω_3 и ω_4 также имеют хорды AB и CD соответственно. Их дуги AB и CD, расположенные с той же стороны от хорд, что соответствующие дуги первых двух окружностей, имеют градусные меры β и α. Докажите, что ω_3 и ω_4 тоже касаются.

Ф.Ивлев

6 (8). См. задачу 7 сложного варианта для 8–9 классов.

7 (11). См. задачу М2235 «Задачника «Кванта».

Устный тур для 11 класса

1. В ряд выложены n монет. Два игрока по очереди выбирают монету и переворачивают ее. Расположение орлов и решек не должно повторяться. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник?

Б.Френкин

2. На доске написаны 49 натуральных чисел. Все их попарные суммы различны. Докажите, что наибольшее из чисел больше 600.

Б.Френкин

3. Даны три попарно пересекающихся луча. В некий момент времени по каждому лучу из его начала начинает двигаться точка с постоянной скоростью. Известно, что эти три точки в любой момент времени образуют треугольник, причем центр описанной окружности этого треугольника тоже движется равномерно и прямолинейно. Верно ли, что все эти треугольники подобны друг другу?

Ф.Нилов

4. Подмножество студенческой группы назовем *идеальной компанией*, если:

1) в этом подмножестве все девушки нравятся всем юношам;

2) в это подмножество нельзя никого добавить, не нарушив условие 1.

В некой группе учатся 9 студенток и 15 студентов. Староста группы составил список всевозможных идеальных компаний в этой группе. Какое наибольшее число компаний могло оказаться в этом списке?

А.Клячко, Б.Мельников

5. Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, что $a^{1000}+1$ делится на b^{619} и $b^{1000}+1$ делится на a^{619}.

М.Мурашкин

6. На плоскости расположен центрально-симметричный выпуклый многоугольник площади 1 и две его копии (каждая получена из многоугольника некоторым параллельным переносом). Известно, что никакая точка плоскости не покрыта тремя многоугольниками сразу. Докажите, что общая площадь, покрытая многоугольниками, не меньше 2.

И.Богданов

Публикацию подготовили
С.Дориченко, Л.Медников, А.Шаповалов

Избранные задачи LXXIV Московской математической олимпиады

1. Перед футбольным матчем команд «Север» и «Юг» было дано пять прогнозов:

а) ничьей не будет;

б) в ворота «Юга» забьют;

в) «Север» выиграет;

г) «Север» не проиграет;

д) в матче будет забито ровно 3 гола.

После матча выяснилось, что верными оказались ровно три прогноза. С каким счетом закончился матч? (6) [1]

Л.Федулкин, Е.Федулкина

2. Дракон запер в пещере шестерых гномов и сказал: «У меня есть семь колпаков семи цветов радуги. Завтра утром я завяжу вам глаза и надену на каждого по колпаку, а один колпак спрячу. Затем сниму повязки, и вы сможете увидеть колпаки на головах у других, но общаться я вам уже не позволю. После этого каждый втайне от других скажет мне цвет спрятанного колпака. Если угадают хотя бы трое, всех отпущу. Если меньше – съем на обед». Как гномам заранее договориться действовать, чтобы спастись? (6)

А.Шаповалов

[1] *В скобках после текста каждой задачи указан класс, в котором она предлагалась*

3. Прямоугольный лист бумаги согнули, совместив вершину с серединой противоположной короткой стороны (рис.1). Оказалось, что треугольники I и II равны. Найдите длинную сторону прямоугольника, если короткая равна 8. (7)

А.Хачатурян

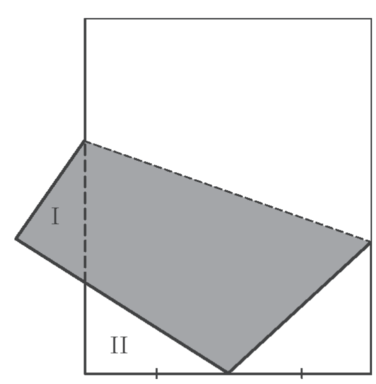

Рис. 1

4. Числа от 1 до 16 расставлены в таблице 4×4. В каждой строке, в каждом столбце и на каждой диагонали (включая диагонали из одной клетки) отметили самое большое из стоящих в ней чисел. (Одно число может быть отмечено несколько раз.) Могли ли оказаться отмечены:

а) все числа, кроме, быть может, двух;

б) все числа, кроме, быть может, одного;

в) все числа? (7)

А.Шаповалов