A. V. Pskhu, Задача Коши для дифференциального уравнения континуального порядка, *Matem. Mod. Kraev. Zadachi*, 2004, Part 3, 180–182

УДК 517.968.7

А.В. Псху

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ КОНТИНУАЛЬНОГО ПОРЯДКА

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$D_{0x}^{[\alpha,\beta]}u(x)+\lambda u(x)=f(x), \qquad 0<\beta\le 1, \tag{1}$$

где

$$D_{0x}^{[\alpha,\beta]}u(x)=\int_\alpha^\beta D_{0x}^t u(x)dt$$

- оператор интегродифференцирования континуального порядка ([1], [2, с. 41]); D_{0x}^t - дробная производная порядка t в смысле Римана-Лиувилля (см. напр. [2, с.13]).

В работе [3] для оператора $D_{0x}^{[\alpha,\beta]}$ были построены аналоги формулы Ньютона-Лейбница и решена задача Коши для уравнения (1) при $\lambda=0$. В этой работе построено решение задачи Коши для уравнения (1) для произвольного положительного λ.

Задача Коши. Найти решение $u=u(x)$, $x\in[0,a]$, уравнения (1), такое, что $x^{1-\beta}u(x)/\ln x\in C[0,a]\cap C^1(0,a)$ и удовлетворяющее условию

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{[\alpha-1,\beta-1]}u(x)=u_0\,. \tag{2}$$

Условие (2) может быть записано в эквивалентной форме ([5])

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{1-\beta}}{\ln x}u(x)=\frac{u_0}{\Gamma(\beta)}\,.$$

2. Далее будем обозначать через

$$(g*h)(x)=\int_0^x g(t)h(x-t)dt$$

свертку функций $g(x)$ и $h(x)$.

Теорема 1. *Пусть функция $v(x)$ является решением задачи*

$$D_{0x}^{[\alpha,\beta]}v(x)+\lambda v(x)=1, \quad v(0)=0\,.$$

Тогда решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (2), представимо в виде

$$u(x)=u_0 w(x)+f(x)*w(x), \tag{3}$$

где $w(x) = v'(x)$.

3. Рассмотрим оператор

$$V_\lambda^{\mu,\nu} h(x) \equiv \left(V_\lambda^{\mu,\nu} h\right)(x) = \int_0^\infty h(t) x^{\lambda t+\mu-1} e_{1,\nu}^{1,\lambda t+\mu}\left(-\frac{t}{x^\nu}\right) dt, \quad 0 < \nu < 1,$$

$$V_\lambda^{\mu,1} h(t) \equiv V_\lambda^{\mu} h(t) = \int_0^x h(t) \frac{(x-t)^{\lambda t+\mu-1}}{\Gamma(\lambda t+\mu)} dt,$$

определенный для неотрицательных μ и λ;

$$e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\mu)\Gamma(-\beta k+\delta)}$$

- функция типа Райта ([4])

Лемма. *1) Если* $\delta \le \mu$ *, то*

$$D_{0x}^{\delta} V_\lambda^{\mu,\nu} h(x) = V_\lambda^{\mu-\delta,\nu} h(x). \tag{4}$$

2) Если функция $h(x)$ *непрерывна в нуле и имеет суммируемую производную, то*

$$D_{0x}^{\nu} V_\lambda^{\mu,\nu} h(x) = \lambda \frac{\partial}{\partial \mu} V_\lambda^{\mu,\nu} h(x) + h(0)\frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} + V_\lambda^{\mu,\nu} h'(x). \tag{5}$$

3) Если $\alpha < \beta \le \mu$*, то*

$$D_{0x}^{[\alpha,\beta]} \frac{\partial}{\partial \mu} V_\lambda^{\mu,\nu} h(x) = V_\lambda^{\mu-\alpha,\nu} h(x) - V_\lambda^{\mu-\beta,\nu} h(x). \tag{6}$$

4) Если функция $h(x)$ *непрерывна в нуле, то*

$$\lim_{x\to 0} V_\lambda^{\mu,\nu} h(x) = \begin{cases} f(0), & \mu+\nu = 1, \\ 0, & \mu+\nu > 1. \end{cases} \tag{7}$$

4. Рассмотрим функцию

$$v_\lambda(x;\mu,\nu) \equiv -\frac{\partial}{\partial \mu} V_\lambda^{\mu,\nu} e^x.$$

Из (6) следует, что если $\nu \le \mu$, то

$$D_{0x}^{[0,\nu]} v_\lambda(x;\mu,\nu) = V_\lambda^{\mu-\nu,\nu} e^x - V_\lambda^{\mu,\nu} e^x. \tag{8}$$

Из (4) и (5) получаем

$$V_{\lambda}^{\mu-\nu,\nu} e^{x} = D_{0x}^{[0,\nu]} v_{\lambda}(x;\mu,\nu) = -\lambda v_{\lambda}(x;\mu,\nu) + \frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} + V_{\lambda}^{\mu,\nu} e^{x}. \qquad (9)$$

Подставляя (9) в (8), приходим к равенству

$$D_{0x}^{[0,\nu]} v_{\lambda}(x;\mu,\nu) = -\lambda v_{\lambda}(x;\mu,\nu) + \frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}. \qquad (10)$$

В силу (7) имеем $v_{\lambda}(0;\mu,\nu) = 0$, если $\mu > 1-\nu$. Поэтому из (10) следует, что функция $v_{\lambda}(x;1,\nu)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, сформулированным для функции $v(x)$. Кроме того, из существования функции $v(x)$ и представления (3), следует единственность задачи (1), (2). Поэтому, так как в силу (4)

$$\frac{d}{dx} v_{\lambda}(x;1,\nu) = v_{\lambda}(x;0,\nu),$$

справедлива

Теорема 2. *Решение* $u(x)$, $x \in [0,a]$, $0 < a \le \infty$ *уравнения*

$$D_{0x}^{[0,\nu]} u(x) + \lambda u(x) = f(x), \quad 0 < \nu \le 1,$$

такое, что $x^{1-\nu} u(x) / \ln x \in C[0,a] \cap C^{1}(0,a)$ *и удовлетворяющее условию*

$$\lim_{x \to 0} D_{0x}^{[-1,\nu-1]} u(x) = u_0,$$

существует, единственно и представимо в виде

$$u(x) = u_0 w(x) + f(x) * w(x),$$

где $w(x) = v_{\lambda}(x;0,\nu)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Нахушев А.М.* О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 1. С. 101-109.
2. *Нахушев А.М.* Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик: КБНЦ РАН, 2000. 299 с.
3. *Псху А.В.* К теории оператора интегро-дифферненцирования континуального порядка // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 1. С. 120-127
4. *Псху А.В.* Решение краевой задачи для уравнения с частными производными дробного порядка // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 8. С. 1092-1099.