Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. И. Кузьминов, И. А. Шведов, О когомологической размерности Бредона наследственно паракомпактных пространств,
Докл. АН СССР, 1976, том 231, номер 1, 24–27

https://www.mathnet.ru/dan40713

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.90
17 июля 2025 г., 03:43:50

Доклады Академии наук СССР
1976. Том 231, № 1

УДК 513.33 *МАТЕМАТИКА*

В. И. КУЗЬМИНОВ, И. А. ШВЕДОВ

О КОГОМОЛОГИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ БРЕДОНА НАСЛЕДСТВЕННО ПАРАКОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 17 VI 1976)

Бредон в ([1]), стр. 110, определил когомологическую размерность $\operatorname{Dim} X$ произвольного топологического пространства X как наименьшее n такое, что $H_\varphi^k(X;\mathcal{A})=0$ для любого $k>n$, любого пучка абелевых групп $\mathcal{A}$ над X и любого семейства носителей φ в X. Там же было установлено, что $\operatorname{Dim} X\leqslant n$ тогда и только тогда, когда каждый пучок абелевых групп над X допускает вялую резольвенту длины n. Известно, что обычная когомологическая размерность $\dim_z X$ паракомпактного пространства X не превосходит n тогда и только тогда, когда каждый пучок абелевых групп над X допускает мягкую резольвенту длины n. Поэтому $\dim_z X\leqslant\operatorname{Dim} X$ для паракомпактных X. В ([1]) Бредон установил, что для наследственно паракомпактного X выполняется неравенство $\operatorname{Dim} X\leqslant\dim_z X+1$. Следовательно, для наследственно паракомпактного X либо $\operatorname{Dim} X=\dim_z X$, либо $\operatorname{Dim} X=\dim_z X+1$. Бредон поставил вопрос о том, какая из указанных двух возможностей реализуется для эвклидова пространства R^n. Део в ([2]) дал ответ на этот вопрос для прямой R^1, установив, что $\operatorname{Dim} R^1=2$. В этой заметке мы докажем, в частности, что $\operatorname{Dim} X=\dim_z X+1$, если пространство X метризуемо и недискретно. Поэтому $\operatorname{Dim} R^n=n+1$ для любого $n>0$. Для дискретного пространства X, очевидно, $\operatorname{Dim} X=\dim_z X=0$.

Лемма. *Пусть $\mathcal{A}$ — пучок абелевых групп над X, тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *пучок $\mathcal{A}$ допускает вялую резольвенту длины n;*

2) *$H^{n+1}(X, U;\mathcal{A})=0$ для любого открытого $U\subset X$;*

3) *для любого открытого $U\subset X$ гомоморфизм i^*: $H^n(X;\mathcal{A})\to H^n(U;\mathcal{A})$, индуцированный вложением $U\subset X$, является эпиморфизмом.*

(Отметим, что в $H^n(U;\mathcal{A})$ буквой $\mathcal{A}$ обозначен пучок $\mathcal{A}|U$; аналогичные сокращения обозначений будут постоянно использованы в дальнейшем.)

Доказательство леммы. Так как $H^*(X, U;\mathcal{A})\cong H_\varphi^*(X;\mathcal{A})$, где φ — семейство всех замкнутых множеств в $X\setminus U$, а группа $H_\varphi^{n+1}(X,\mathcal{A})$ может быть вычислена с помощью произвольной вялой резольвенты пучка $\mathcal{A}$, то 1)$\to$2). Имеется точная последовательность ([1])

$$\ldots\to H^n(X;\mathcal{A})\xrightarrow{i^*}H^n(U;\mathcal{A})\to H^{n+1}(X,U;\mathcal{A})\to\ldots$$

Поэтому 2)$\to$3).

Докажем, что 3)$\to$1). Пусть $\mathcal{C}^*$ — вялая резольвента пучка $\mathcal{A}$ и $\mathcal{Z}^n$ — пучок ее n-мерных циклов. Имеем коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc}
\Gamma(\mathcal{C}^{n-1}) & \to & \Gamma(\mathcal{Z}^n) & \to & H^n(X;\mathcal{A}) & \to & 0\\
r\downarrow & & s\downarrow & & i^*\downarrow & & \\
\Gamma(\mathcal{C}^{n-1}|U) & \to & \Gamma(\mathcal{Z}^n|U) & \to & H^n(U;\mathcal{A}) & \to & 0
\end{array}$$

Гомоморфизм ограничения r является эпиморфизмом, поскольку пучок $\mathcal{C}^{n-1}$ вялый. Отсюда, если i^* — эпиморфизм, то и s — эпиморфизм. Следо-

вательно, из условия 3) вытекает вялость пучка $\mathscr{Z}^n$. Тем самым $\mathscr{A}$ допускает вялую резольвенту длины n. Лемма доказана.

Определение ([3]). $\dim_{\mathscr{A}} X$ — наименьшее из таких n, что $H^k(X; \mathscr{A}) = 0$ при $k>n$ для любого открытого множества $U \subset X$.

Определение. $\mathrm{Dim}_{\mathscr{A}} X$ — наименьшее из таких n, что $H_\varphi^k(X; \mathscr{A}_U) = 0$ для любого $k>n$, любого открытого $U \subset X$ и любого семейства носителей φ в X.

Обозначим через $S(\mathscr{A})$ множество тех точек $x \in X$, для которых $\mathscr{A}_x \neq 0$.

Теорема. *Пусть X — наследственно паракомпактное пространство с первой аксиомой счетности и $\mathscr{A}$ — пучок абелевых групп над X. Если множество $S(\mathscr{A})$ недискретно, то* $\mathrm{Dim}_{\mathscr{A}} X = \dim_{\mathscr{A}} X + 1$. *Если же множество $S(\mathscr{A})$ дискретно, то* $\mathrm{Dim}_{\mathscr{A}} X = \dim_{\mathscr{A}} X \leqslant 0$.

Доказательство. Пусть U, V — произвольные открытые в X множества. Так как

$$\dim_{\mathscr{A}} V \leqslant \dim_{\mathscr{A}} X,$$

то при $k > n = \dim_{\mathscr{A}} X$

$$H^k(V; \mathscr{A}_U) = H^k(X; \mathscr{A}_U) = 0.$$

Из точной когомологической последовательности

$$\ldots \to H^k(V; \mathscr{A}_U) \to H^{k+1}(X, V; \mathscr{A}_U) \to H^{k+1}(X; \mathscr{A}_U) \to \ldots$$

получаем $H^{k+1}(X, V; \mathscr{A}_U) = 0$ при $k>n$. По лемме пучок $\mathscr{A}_U$ допускает вялую резольвенту длины $n+1$. Но тогда $H_\varphi^k(X; \mathscr{A}_U) = 0$ при $k > n+1$ для любого семейства носителей φ. Тем самым

$$\mathrm{Dim}_{\mathscr{A}} X \leqslant \dim_{\mathscr{A}} X + 1.$$

Когомологическая размерность $\dim_{\mathscr{A}} X$ наследственно паракомпактного пространства X обладает следующим свойством локальности: если для каждой точки $x \in X$ найдется такая окрестность U_x этой точки, что $\dim_{\mathscr{A}} U_x \leqslant r$, то $\dim_{\mathscr{A}} X \leqslant r$. Это свойство локальности $\dim_{\mathscr{A}}$ легко вытекает из теоремы суммы для размерности $\dim_{\mathscr{A}}$ ([3]). Ввиду свойства локальности размерности найдется такая точка $x \in X$, что $\dim_{\mathscr{A}} V = n$ для каждой окрестности V точки x. Отметим, что в случае $n=0$ такой точкой x будет любая точка из замыкания множества $S(\mathscr{A})$, поскольку $\dim_{\mathscr{A}} V < 0$ в том и только в том случае, когда $\mathscr{A} | V = 0$. Выберем какую-нибудь точку $x \in X$ с указанным свойством, причем в случае $n=0$ эту точку выберем предельной к множеству $S(\mathscr{A})$. Для того чтобы такой выбор был возможен, будем предполагать, что множество $S(\mathscr{A})$ недискретно. Ясно, что $\dim_{\mathscr{A}}(V \setminus x) = n$ для любой окрестности V точки x.

Пусть $\{V_i\}_{i=1, 2, \ldots}$ — фундаментальная система открытых окрестностей точки x, причем $[V_{i+1}] \subset V_i$. Так как $V_i \setminus x = \bigcup\limits_{k>i} (V_i \setminus [V_k])$, то по теореме суммы для некоторого k будем иметь $\dim_{\mathscr{A}}(V_i \setminus [V_k]) = n$. Следовательно, мы не ограничиваем общности, считая в дальнейшем, что $\dim_{\mathscr{A}}(V_i \setminus [V_{i+1}]) = n$ для любого i. Найдется такое открытое множество $U_i \subset V_i \setminus [V_{i+1}]$, что $H^n(X; \mathscr{A}_{U_i}) \neq 0$. Пусть $U = \bigcup\limits_i U_i$. Тогда $\mathscr{A}_U = \sum\limits_i \mathscr{A}_{U_i}$. Мы установили, что гомоморфизм

$$i^*\colon H^n(X; \mathscr{A}) \to H^n(X \setminus x; \mathscr{A}_U)$$

не является эпиморфизмом.

Рассмотрим точную когомологическую последовательность пары $(X, [V_i])$

$$\ldots \to H^{n-1}([V_i]; \mathscr{A}_U) \to H^n(X, [V_i]; \mathscr{A}_U) \to$$
$$\to H^n(X; \mathscr{A}_U) \to H^n([V_i]; \mathscr{A}_U) \to \ldots$$

Перейдем в этой последовательности к индуктивному пределу по i.

Так как

$$\varinjlim H^*([V_i]; \mathscr{A}_U) \cong H^*(x; \mathscr{A}_U) = 0,$$

то получим изоморфизм

$$H^n(X;\mathscr{A}_U)\cong\varinjlim H^n(X,[V_i];\mathscr{A}_U).$$

Пусть $W_i=\bigcup\limits_{k=1}^{i-1}U_i$. Тогда

$$H^n(X,[V_i];\mathscr{A}_U)\cong H^n(X;\mathscr{A}_{W_i})\cong\sum_{k=1}^{i-1}H^n(X;\mathscr{A}_{U_k}).$$

Поэтому

$$H^n(X;\mathscr{A}_U)\cong\varinjlim\sum_{k=1}^{i-1}H^n(X;\mathscr{A}_{U_k})\cong\sum_{k=1}^{\infty}H^n(X;\mathscr{A}_{U_k}).$$

Так как система $\{U_i\}$ локально конечна в $X\setminus x$, то

$$H^n(X\setminus x;\mathscr{A}_U)\cong\prod_{k=1}^{\infty}H^n(X;\mathscr{A}_{U_k}).$$

Гомоморфизм i^* совпадает с каноническим вложением

$$\sum_{k=1}^{\infty}H^n(X;\mathscr{A}_{U_k})\to\prod_{k=1}^{\infty}H^n(X;\mathscr{A}_{U_k}).$$

Так как каждая группа $H^n(X;\ \mathscr{A}_{U_k})\neq 0$, то i^* — не эпиморфизм. По лемме $H^{n+1}(X,\ X\setminus x;\ \mathscr{A}_U)=H^{n+1}_{\{x\}}(X;\ \mathscr{A}_U)\neq 0$; здесь $\{x\}$ — семейство носителей, состоящее из единственной точки x. Следовательно, $\mathrm{Dim}_{\mathscr{A}}X\geqslant n+1$. Итак, если множество $S(\mathscr{A})$ недискретно, то

$$\mathrm{Dim}_{\mathscr{A}}X=\dim_{\mathscr{A}}X+1.$$

Если множество $S(\mathscr{A})$ дискретно, то пучок $\mathscr{A}_U$ вялый для любого U и обе размерности $\mathrm{Dim}_{\mathscr{A}}X$ и $\dim_{\mathscr{A}}X$ равны 0 или -1 одновременно в зависимости от того, отличен от нуля или равен нулю пучок $\mathscr{A}$.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть X — наследственно паракомпактное пространство с первой аксиомой счетности (например, метризуемое) и $\dim X<\infty$. Тогда $\mathrm{Dim}\,X=\dim X+1$, если X недискретно и $\mathrm{Dim}\,X=\dim X=0$, если X дискретно. В частности, $\mathrm{Dim}\,R^n=n+1$ для $n>0$.*

Следствие 2. *Пусть X — наследственно паракомпактное пространство с первой аксиомой счетности. Если для каждого открытого $U\subset X$ пучок Z_U допускает вялую резольвенту длины n, то и всякий пучок абелевых групп над X допускает вялую резольвенту длины n.*

Замечание 1. Из леммы легко следует, что постоянный пучок Z над R^n допускает вялую резольвенту длины n, а из теоремы вытекает, что имеются пучки вида Z_U, минимальная длина вялой резольвенты которых равна $n+1$.

Замечание 2. Теорема остается верной, если в ней условие первой аксиомы счетности заменить требованием локальной бикомпактности. В этом случае снова можно отыскать точку $x\in X$ и бесконечную локально конечную в $X\setminus x$ систему попарно непересекающихся открытых множеств U_α такую, что в каждую окрестность точки x входят все U_α, кроме, быть может, конечного их числа и $H^n(X;\ A_{U_\alpha})\neq 0$. В остальном доказательство остается прежним.

Систему $\{U_\alpha\}$ находим следующим образом. Точку $x\in X$ выбираем так же, как и в доказательстве теоремы. Не теряя общности, можно считать

X бикомпактным. Покроем пространство $X \setminus x$ локально конечной системой $\{V_\alpha\}$ открытых множеств, замыкания которых бикомпактны. Бесконечное число множеств V_α удовлетворяет условию $\dim_{\mathcal{A}} V_\alpha = \dim_{\mathcal{A}} X = n$. В каждый из этих V_α выберем точку x_α таким образом, чтобы $\dim_{\mathcal{A}} V = n$ для любой ее окрестности V. Опуская повторения, можно считать, что x_α различны. Пространство $X \setminus x$ коллективно нормально. Поэтому существуют открытые окрестности W_α точек x_α, удовлетворяющие следующим двум условиям: 1) множества W_α попарно не пересекаются, 2) $x_\alpha \in W_\alpha \subset \subset V_\alpha$. Так как $\dim_{\mathcal{A}} W_\alpha = n$, то для некоторого открытого множества $U_\alpha \subset \subset W_\alpha$ имеем $H^n(X; \mathcal{A}_{U_\alpha}) \neq 0$. Система $\{U_\alpha\}$ удовлетворяет всем поставленным выше требованиям.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
17 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

[1] *G. E. Bredon*, Sheaf Theory, N. Y., 1967. [2] *Deo Satya*, Proc. Am. Math. Soc., v. 52, 445 (1975). [3] *В. И. Кузьминов*, УМН, т. 23, в. 5 (143), 3 (1968).