D. K. Durdiev, J. Sh. Safarov, 2D kernel identification problem in viscoelasticity equation with a weakly horizontal homogeneity , *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2022, Volume 25, Number 1, 14–38

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.102

УДК 517.968.72

ЗАДАЧА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДВУМЕРНОГО ЯДРА УРАВНЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОСТИ СО СЛАБО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

© 2022 Д. К. Дурдиев[1a], Ж. Ш. Сафаров[1,2b]

[1] *Институт математики им. В. И. Романовского АН Республики Узбекистан, ул. Университетская, 4б, Ташкент 100170, Узбекистан,*
[2] *Ташкентский университет информационных технологий, просп. Амира Темура, 108, Ташкент 100084, Узбекистан*

E-mails: [a]durdiev65@mail.ru, [b]j.safarov65@mail.ru

Поступила в редакцию 11.08.2021 г.; после доработки 01.10.2021 г.;
принята к публикации 21.10.2021 г.

В ограниченной по переменной z области, имеющей слабо горизонтальную неоднородность, рассматривается задача определения сверточного ядра $k(t,x)$, $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}$, входящего в уравнение вязкоупругости. Предполагается, что это ядро слабо зависит от переменной x и разлагается в степенной ряд по степеням малого параметра ε. Построен метод нахождения первых двух коэффициентов $k_0(t)$, $k_1(t)$ этого разложения. Получены теоремы глобальной однозначной разрешимости поставленной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, вязкоупругость, интегральное уравнение, ядро интеграла, теорема Банаха.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.102

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим двумерное гиперболическое интегро-дифференциальное уравнение

$$u_{tt} = \Delta u + \int_0^t k(\tau,x)\Delta u(t-\tau,x,z)\,d\tau \tag{1}$$

в ограниченной по переменной z области $D := \{(t,x,z) \mid (t,x) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < z < l\}$ с начальным и граничными условиями

$$u|_{t<0} \equiv 0, \tag{2}$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \int_0^t k(\tau,x)\frac{\partial u}{\partial z}(t-\tau,x,z)\,d\tau\right)\right|_{z=0} = \delta(x)\delta'(t), \tag{3}$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \int_0^t k(\tau,x)\frac{\partial u}{\partial z}(t-\tau,x,z)d\tau\right)\right|_{z=l} = 0, \tag{4}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа, $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака, $l > 0$ — некоторое число.

Уравнение (1) возникает в теории вязкоупругих тел с постоянной плотностью и коэффициентами Ламе. Здесь функция $u(t,x,z)$ имеет физический смысл, y — компоненты вектора смещений частиц тела. Интегральный оператор в этом уравнении описывает влияние предыстории на процесс распространения упругих волн, вызванных сосредоточенной силой (3), приложенной на границе области D. Граничное условие на левом конце рассматриваемой области означает, что одна из компонент тензора напряжений имеет мгновенную направленную силу. В тоже время такая сила отсутствует на правом конце.

Обратную задачу поставим следующим образом: требуется найти ядро $k(t,x)$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}$, интегрального члена в (1), если известны значения решения задачи (1)–(4) при $z=0$, т. е. задана функция

$$u(t,x,0)=g(t,x),\quad t>0,\quad x\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

К настоящему времени изучение одномерных и многомерных обратных задач определения ядра интегрального члена интегро–дифференциальных уравнений гиперболического типа стало объектом исследования многих учёных. В работах [1, 2] рассматривались одномерные задачи нахождения ядра гиперболических интегро–дифференциальных уравнений с распределёнными источниками возмущения, а в работах [3–12] — задачи нахождения ядра, входящего в интегро–дифференциальное уравнение с дельта-функцией в правой части либо на граничном условии. Для поставленных в этих работах задач доказаны теоремы существования, единственности и получены оценки устойчивости на основе принципа сжимающих отображений.

В работах [13–17] исследовались задачи определения многомерной памяти из интегро–дифференциальных уравнений Максвелла и вязкоупругости. Получены оценки условной устойчивости решения рассматриваемых обратных задач. В работах [18–21] для многомерных обратных задач нахождения ядра в гиперболических интегро-дифференциальных уравнений второго порядка доказаны теоремы однозначной локальной разрешимости в классе аналитических функций по пространственным и непрерывным по временной переменным.

Работы [22–24] посвящены численным решениям прямых задач для системы уравнений вязкоупругости, [25–35] — численным решениям прямых и обратных задач для гиперболических интегро–дифференциальных уравнений и систем. В них, в частности, построен численный метод определения параметров функции памяти для горизонтально-слоистой среды.

Задача (1)–(5) относится к числу многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. В настоящей работе, развивая методы решения обратных задач, использованные в [37], мы исследуем задачу восстановления сверточного ядра интегрального члена уравнения (1). При этом предполагается, что ядро $k(t,x)$ слабо зависит от горизонтальной переменной x:

$$k(t,x)=k_0(t)+\varepsilon x k_1(t)+\dots, \tag{6}$$

где ε — малый параметр.

Основным результатом данной работы является то, что в ней предложен метод нахождения одномерных функций $k_0(t)$ и $k_1(t)$ с точностью до величины порядка $O(\varepsilon^2)$. Для этого, как мы увидим далее, достаточно задать образ Фурье от функции $g(t,x)$ по x для одного фиксированного значения преобразования.

2. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ К СЕРИИ ОДНОМЕРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Решение прямой задачи (1)–(4) будем искать в виде ряда по степеням ε, т. е.

$$u(t,z,x)=u_0(t,z,x)+\varepsilon u_1(t,z,x)+\dots. \tag{7}$$

Подставляя (7) в уравнение (1) и приравнивая выражения при одинаковых степенях ε, получим, в итоге, рекуррентную систему прямых задач, из которых находятся u_0, u_1 и т. д. Тогда, очевидно, согласно формуле (7) функция $g(t,x)$ будет иметь такую же структуру:

$$g(t,x)=g_0(t,x)+\varepsilon g_1(t,x)+\dots. \tag{8}$$

Нетрудно проверить, что функции $u_n(t,z,x)$ (а следовательно, и $g_n(x,t)$) — чётные функции по x при чётных n и нечётные — при нечётных n. Это видно из нижеприведённых прямых задач: u_n с чётным n (нечётным n) — решение задачи с чётными (нечётными) по x данными. Тем самым по известной функции $g(t,x)$ можно найти $g_0(t,x)$ и $g_1(t,x)$ с точностью до $O(\varepsilon^2)$:

$$g_0(t,x) = (g(t,x)+g(t,-x))/2, \quad g_1(t,x) = g(t,x)-g(t,-x))/2.$$

Перейдём к решению задачи. Используя разложения функции u по формуле (7), функции k по формуле (6) и приравнивая выражения при одинаковых степенях ε, находим, что обратная задача (1)–(5) распадается на следующие задачи последовательного определения $k_0, k_1, \ldots$:

$$u_{0tt} = \Delta u_0 + \int_0^t k_0(t-\tau)\Delta u_0(\tau,x,z)\,d\tau, \quad (t,x,z)\in D, \tag{9}$$

$$u_0|_{t<0} \equiv 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(u_0 + \int_0^t k_0(t-\tau)u_0(\tau,x,z)\,d\tau\right)\Bigg|_{z=0} = \delta(x)\delta'(t), \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(u_0 + \int_0^t k_0(t-\tau)u_0(\tau,x,z)\,d\tau\right)\Bigg|_{z=l} = 0, \tag{12}$$

$$u_0|_{z=0} = g_0(t,x), \quad (t,x)\in\mathbb{R}^2, \tag{13}$$

$$u_{ntt} = \Delta u_n + \int_0^t \sum_{j=0}^n x^j k_j(t-\tau)\Delta u_{n-j}(\tau,x,z)\,d\tau, \quad (t,x,z)\in D, \tag{14}$$

$$u_n|_{t<0} \equiv 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(u_n + \int_0^t \sum_{j=0}^n x^j k_j(t-\tau)u_{n-j}(\tau,x,z)\,d\tau\right)\Bigg|_{z=0} = 0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(u_n + \int_0^t \sum_{j=0}^n x^j k_j(t-\tau)u_{n-j}(\tau,x,z)\,d\tau\right)\Bigg|_{z=l} = 0, \tag{17}$$

$$u_n|_{z=0} = g_n(t,x), \quad (t,x)\in\mathbb{R}^2, \quad n=1,2,\ldots. \tag{18}$$

В дальнейшем нас будут интересовать задачи определения функций $k_0(t)$ и $k_1(t)$. Для этого достаточно рассмотреть задачи (9)–(13) и (14)–(18) при $n=1$.

Перейдём от функций $u_j(t,x,z)$, $j=1,2,\ldots$, к их экспоненциальным образам Фурье по переменной x:

$$\tilde{u}_i(t,\lambda,z) = \int_{\mathbb{R}} u_i(t,x,z)e^{-i\lambda x}\,dx, \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Преобразование Фурье функций $u_j(t,x,z)$, $j=1,2,\ldots$, существует при любом конечном t, так как каждая u_j представляет сумму некоторой сингулярной обобщённой функции конечного порядка и регулярной функции, причём носители функций u_j ограничены.

Обратные задачи (9)–(13) и (14)–(18) в терминах функций $\tilde{u}_j$ выглядят как задачи нахождения $k_0(t)$, $k_1(t)$ из следующих задач:

$$\tilde{u}_{0tt} = \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \lambda^2\right]\left(\tilde{u}_0 + \int\limits_0^t k_0(t-\tau)\tilde{u}_0(\tau,\lambda,z)\,d\tau\right), \quad (t,\lambda) \in \mathbb{R}^2, \quad z \in (0,l), \tag{19}$$

$$\tilde{u}_0|_{t<0} \equiv 0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\tilde{u}_0 + \int\limits_0^t k_0(t-\tau)\tilde{u}_0(\tau,\lambda,z)\,d\tau\right)\Bigg|_{z=0} = \delta'(t), \tag{21}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\tilde{u}_0 + \int\limits_0^t k_0(t-\tau)\tilde{u}_0(\tau,\lambda,z)\,d\tau\right)\Bigg|_{z=l} = 0, \tag{22}$$

$$\tilde{u}_0|_{z=0} = \tilde{g}_0(\lambda,t), \quad (\lambda,t) \in \mathbb{R}^2, \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{1tt} = \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \lambda^2\right]&\left(\tilde{u}_1 + \int\limits_0^t k_0(t-\tau)\tilde{u}_1(\tau,\lambda,z)\,d\tau\right)\\ - i\int\limits_0^t k_1(t-\tau)&\left[2\lambda\tilde{u}_0(\tau,\lambda,z) + \lambda^2\tilde{u}_{0\lambda}(\tau,\lambda,z) - \frac{\partial^2\tilde{u}_{0\lambda}}{\partial z^2}\right]d\tau, \quad (t,\lambda) \in \mathbb{R}^2, \quad z \in (0,l),\end{aligned} \tag{24}$$

$$\tilde{u}_1|_{t<0} \equiv 0, \tag{25}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\tilde{u}_1 + \int\limits_0^t \left(k_0(t-\tau)\tilde{u}_1(\tau,\lambda,z)d\tau - ik_1(t-\tau)\frac{\partial\tilde{u}_0}{\partial\lambda}(t-\tau,\lambda,z)\right)d\tau\right)\Bigg|_{z=0} = 0, \tag{26}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\tilde{u}_1 + \int\limits_0^t \left(k_0(t-\tau)\tilde{u}_1(\tau,\lambda,z)d\tau - ik_1(t-\tau)\frac{\partial\tilde{u}_0}{\partial\lambda}(t-\tau,\lambda,z)\right)d\tau\right)\Bigg|_{z=l} = 0, \tag{27}$$

$$\tilde{u}_1|_{z=0} = \tilde{g}_1(t,\lambda), \quad (t,\lambda) \in \mathbb{R}^2, \tag{28}$$

соответственно, где $\tilde{g}_m(t,\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} g_m(t,x)e^{-i\lambda x}\,dx$, $m = 0,1,\ldots$.

В следующих разделах мы исследуем обратные задачи (19)–(23) и (24)–(28).

3. ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ k_0 И $\tilde{u}_0$

Обратная задача (19)–(23) является переопределённой, так как для определения одной функции $k_0(t)$ задаётся функция двух переменных (условие (23)). Ниже мы увидим, что для однозначной разрешимости обратной задачи достаточно задать образ Фурье функции $g_0(t,x)$ для одного фиксированного значения параметра преобразования. В дальнейшем, не оговаривая каждый раз, будем считать, что в равенствах (19)–(28) параметр λ фиксирован и всюду $\lambda \neq 0$.

Введём в рассмотрение новую функцию $v(t,\lambda,z)$, определив её равенством

$$v(t,\lambda,z) := \tilde{u}_0(t,\lambda,z) + \int\limits_0^t k_0(t-\tau)\tilde{u}_0(\tau,\lambda,z)\,d\tau.$$

Нетрудно проверить, что функция $\tilde{u}_0(t,\lambda,z)$ выражается через $v(t,\lambda,z)$ по формуле

$$\tilde{u}_0(t,\lambda,z) = v(t,\lambda,z) + \int\limits_0^t r(t-\tau)v(\tau,\lambda,z)\,d\tau, \tag{29}$$

где

$$r(t) = -k_0(t) - \int\limits_0^t k_0(t-\tau)r(\tau)\,d\tau. \tag{30}$$

Для простоты предположим $k_0(0) = k_0'(0) = 0$. Следовательно, как следуют из (30) $r(0) = r'(0) = 0$. Нетрудно в дальнейшем видеть, что этого можно добиться, выбирая подходящим образом $f(t)$ при $t = 0$. Относительно новых функций $v(t,\lambda,z)$ и $r(t)$ уравнения (19)–(22) с учётом (23) принимают вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \lambda^2 v - \int\limits_0^t h(t-\tau)v(\tau,\lambda,z)d\tau, \quad (t,z) \in D, \tag{31}$$

$$v|_{t<0} \equiv 0, \tag{32}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=0} = \delta'(t), \quad \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=l} = 0, \tag{33}$$

где введено обозначение $h(t) := r''(t)$. Дополнительное условие (23) выглядит как

$$v(t,\lambda,0) = \tilde{g}_0(t,\lambda) + \int\limits_0^t k_0(t-\tau)\tilde{g}_0(\tau,\lambda)\,d\tau. \tag{34}$$

Лемма 1. *Имеют места следующие равенства:*

$$v(t,\lambda,z) \equiv 0, \quad (z,t) \in D_1 := \{(z,t) \mid 0 < z < l,\ 0 < t < z\}, \tag{35}$$

$$v(t,\lambda,z) = -\delta(t-z) + \int\limits_0^{t-z}\int\limits_0^{\tau/2}\left[\lambda^2 v(\tau-\xi,\lambda,\xi) + \int\limits_0^{\tau-2\xi} h(\alpha)v(\tau-\xi-\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha\right]d\xi d\tau$$
$$+ \int\limits_{t-z}^{t}\int\limits_{\tau-t+z}^{\frac{2\tau-t+z}{2}}\left[\lambda^2 v(2\tau-t+z-\xi,\lambda,\xi) + \int\limits_0^{2\tau-t+z-2\xi} h(\alpha)v(2\tau-t+z-\xi-\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha\right]d\xi d\tau \tag{36}$$

для $(z,t) \in D_2 := \{(z,t) \mid 0 < z < l,\ z < t < 2l - z\}$.

Доказательство. В области $D_0 := \{(z,t) \mid 0 < z < l,\ 0 < t < l/2 - |z - l/2|\} \subset D_1$ по формуле Даламбера получим однородное интегральное уравнение вольтерровского типа относительно $v(t,\lambda,z)$, отсюда следует $v(t,\lambda,z) \equiv 0$.

В области $D_1 \setminus D_0$ представляем волновой оператор в виде произведения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

интегрируем равенство (31) вдоль отрезка фиксированной характеристики пучка $\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial z}$ и, используя условие (32), находим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\right)v\bigg|_{z=l}=-\int\limits_{t/2}^{t}\left[\lambda^2 v(\tau,\lambda,\tau-t+l,)+\int\limits_0^{\tau}h(\tau-\alpha)v(\alpha,\lambda,\tau-t+l)\,d\alpha\right]d\tau,\quad t\in(0,l).$$

С учётом граничного условия (33) при $z=l$ из этого равенства получим

$$v(t,\lambda,l)=-\int\limits_0^{t}\int\limits_{\tau/2}^{\tau}\left[\lambda^2 v(\tau_1,\lambda\tau_1+\tau+l)+\int\limits_0^{\tau_1}h(\tau_1-\alpha)v(\alpha,\lambda,\tau_1-\tau+l)\,d\alpha\right]d\tau_1 d\tau,\quad t\in(0,l).$$

Произведя замену переменных во внутреннем интеграле τ_1 на ξ по формуле $\tau_1-\tau+l=\xi$, последнее уравнение перепишем в виде

$$v(t,\lambda,l)=-\int\limits_0^{t}\int\limits_{l-\tau/2}^{l}\left[\lambda^2 v(\tau-l+\xi,\lambda,\xi)+\int\limits_0^{\tau-l+\xi}h(\tau-l+\xi-\alpha)v(\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha\right]d\xi d\tau,\quad t\in(0,l).\quad(37)$$

Интегрируя уравнение (31) вдоль характеристики $\dfrac{dz}{dt}=1$, получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\right)v(t,\lambda,z)$$
$$=-\int\limits_{\frac{l+z-t}{2}}^{z}\left[\lambda^2 v(\xi+t-z,\lambda,\xi)+\int\limits_0^{\xi+t-z}h(\xi+t-z-\alpha)v(\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha\right]d\xi,\quad (t,z)\in D_1\backslash D_0.$$

Далее, используя формулу (37), находим уравнение для $v(t,\lambda,z)$ в области $D_1\backslash D_0$:

$$v(t,\lambda,z)=-\int\limits_0^{t+z-l}\int\limits_{l-\tau/2}^{l}\left[\lambda^2 v(\tau-l+\xi,\lambda,\xi)+\int\limits_0^{\tau-l+\xi}h(\tau-l+\xi-\alpha)v(\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha\right]d\xi d\tau$$
$$-\int\limits_{t+z-l}^{t}\int\limits_{\frac{l+t+z-2\tau}{2}}^{t+z-\tau}\left[\lambda^2 v(\xi,\xi+2\tau-t-z)+\int\limits_0^{\xi+2\tau-t-z}h(\xi+2\tau-t-z-\alpha)v(\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha\right]d\xi d\tau.$$

Полученное уравнение является однородным уравнением вольтерровского типа с непрерывным ядром. Следовательно, $v(t,\lambda,z)\equiv 0$ в области $D_1\backslash D_0$.

Рассмотрим теперь область $D_2:=\{(t,z)\mid 0<z<l,\ z<t<2l-z\}$. Интегрируя (31) вдоль соответствующей характеристики, находим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\right)v|_{x=0}=\int\limits_0^{t/2}\left[\lambda^2 v(t-\xi,\lambda,\xi)+\int\limits_0^{t-2\xi}h(\alpha)v(t-\xi-\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha\right]d\xi,\quad t\in(0,2l).$$

В сочетании с граничным условием (33) находим $v(t,\lambda,z)$ при $z=0$:

$$v|_{z=0}=-\delta(t)+\int\limits_0^{t}\int\limits_0^{\tau/2}\left[\lambda^2 v(\tau-\xi,\lambda,\xi)+\int\limits_0^{\tau-2\xi}h(\alpha)v(\tau-\xi-\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha\right]d\xi d\tau,\quad t\in(0,2l).$$

Используя последнее равенство, интегрированием (31) по характеристикам $\dfrac{dz}{dt} = -1$ и $\dfrac{dz}{dt} = 1$ получим интегральное уравнение (36) для $v(t, \lambda, z)$ в области D_2. $\square$

В уравнении (36) заменим во внешнем интеграле последнего слагаемого переменное интегрирование τ на β по формуле $t - \tau = \beta$ и функцию $v(t, \lambda, z)$ представим в виде

$$v(t, \lambda, z) = \tilde{v}(t, \lambda, z) - \delta(t - z), \tag{38}$$

где $\tilde{v}(t, \lambda, z)$ — регулярная функция. Тогда уравнение (36) принимает вид

$$\begin{aligned}\tilde{v}(t, \lambda, z) = -\frac{\lambda^2}{2}t + \int_0^{t-z}\int_0^{\tau/2}\Bigg[\lambda^2\tilde{v}(\tau - \xi, \lambda, \xi) - h(\tau - 2\xi) + \int_0^{\tau-2\xi} h(\alpha)\tilde{v}(\tau - \xi - \alpha, \lambda, \xi)\, d\alpha\Bigg] d\xi d\tau \\ + \int_0^{z}\int_{z-\beta}^{\frac{t-2\beta+z}{2}}\Bigg[\lambda^2\tilde{v}(t - 2\beta + z - \xi, \lambda, \xi) - h(t - 2\beta + z - 2\xi) \\ + \int_0^{t-2\beta+z-2\xi} h(\alpha)\tilde{v}(t - 2\beta + z - \xi - \alpha, \lambda, \xi)\, d\alpha\Bigg] d\xi d\beta,\end{aligned} \tag{39}$$

следовательно, $\tilde{v}(t, \lambda, z)|_{t=z+0} = -z\lambda^2/2$. Для разрешимости обратной задачи заметим, что функция $\tilde{g}_0(t, \lambda)$ должна иметь следующую структуру: $\tilde{g}_0(t, \lambda) = \tilde{g}_{00}(t, \lambda) - \delta(t)$. Тогда из условия (34) получим

$$\tilde{v}(t, \lambda, 0) = \tilde{g}_{00}(t, \lambda) - k_0(t) + \int_0^t k_0(t - \tau)\tilde{g}_{00}(\tau, \lambda)\, d\tau. \tag{40}$$

Таким образом, функция $\tilde{v}(t, \lambda, z)$ удовлетворяет в области D_2 уравнениям

$$\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial z^2} - \lambda^2\tilde{v} - h(t - z) - \int_0^t h(t - \tau)\tilde{v}(\tau, \lambda, z)\, d\tau, \quad (t, z) \in D_2, \tag{41}$$

$$\tilde{v}|_{t<0} \equiv 0, \tag{42}$$

$$\left.\frac{\partial\tilde{v}}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\tilde{v}}{\partial z}\right|_{z=l} = 0. \tag{43}$$

В уравнении (39) положим $z = 0$ и воспользуемся дополнительным условием (40):

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{00}(t, \lambda) - k_0(t) + \int_0^t k_0(t - \tau)\tilde{g}_{00}(\tau, \lambda)\, d\tau = -\frac{\lambda^2}{2}t \\ + \int_0^t\int_0^{\tau/2}\Bigg[\lambda^2\tilde{v}(\tau - \xi, \lambda, \xi) - h(\tau - 2\xi) + \int_0^{\tau-2\xi} h(\alpha)\tilde{v}(\tau - \xi - \alpha, \lambda, \xi)\, d\alpha\Bigg] d\xi d\tau, \quad t \in (0, 2l).\end{aligned}$$

Отсюда, в частности, следует необходимое условие разрешимости обратной задачи $\tilde{g}_{00}(0, \lambda)$=0.

Дифференцируя предыдущее интегральное уравнение два раза по t, разрешая относительно $h(t)$, получим

$$h(t) = -\frac{\lambda^4}{4}t - 2\tilde{g}''_{00t}(t,\lambda) + 2k''_0(t) - 2\int_0^t k''_0(t-\tau)\tilde{g}_{00}(\tau,\lambda)\,d\tau$$
$$+ 2\int_0^{t/2}\left[\lambda^2\tilde{v}_t(t-\xi,\lambda,\xi) - \frac{\lambda^2}{2}\xi h(t-2\xi) + \int_0^{t-2\xi} h(\alpha)\tilde{v}_t(t-\xi-\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha\right]d\xi. \quad (44)$$

Отсюда

$$h'(t) = -\frac{3\lambda^4}{4} + \frac{\lambda^2 t^2}{4}h(0) - 2\tilde{g}'''_{00t}(t,\lambda) + 2k'''_0(t) + 2\int_0^t k''_0(\tau)\tilde{g}'_{00}(t-\tau,\lambda)\,d\tau - \frac{\lambda^2}{4}\int_0^t h(\xi)\,d\xi$$
$$+ 2\int_0^{t/2}\left[\lambda^2\tilde{v}_{tt}(t-\xi,\lambda,\xi) - \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{1}{2}h(0)\xi\right)h(t-2\xi) + \int_0^{t-2\xi} h(\alpha)\tilde{v}_{tt}(t-\xi-\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha\right]d\xi. \quad (45)$$

Для дальнейших исследований нам необходимо знать производные $\tilde{v}_t$ и $\tilde{v}_{tt}$ функции $\tilde{v}$. Вычислим их:

$$\tilde{v}_t(t,\lambda,z) = -\frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4}{8}tz - \frac{1}{2}h(t-z)z$$
$$+ \int_0^{\frac{t-z}{2}}\left[\lambda^2\tilde{v}(t-z-\xi,\lambda,\xi) - h(t-z-2\xi) + \int_0^{t-z-2\xi} h(\alpha)\tilde{v}(t-z-\xi-\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha\right]d\xi$$
$$+ \int_0^z\int_{z-\beta}^{\frac{t+z-2\beta}{2}}\left[\lambda^2\tilde{v}_t(t+z-2\beta-\xi,\lambda,\xi) - \frac{\lambda^2}{2}\xi h(t-2\beta+z-2\xi)\right.$$
$$\left. + \int_0^{t-2\beta+z-2\xi} h(\alpha)\tilde{v}_t(t-2\beta+z-\xi-\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha\right]d\xi d\beta, \quad (46)$$

$$\tilde{v}_{tt}(t,\lambda,z) = -\frac{\lambda^4}{8}t(1+z) - \frac{z}{2}h'(t-z) + \frac{1}{2}m(z)h(t-z)$$
$$+ \int_0^{\frac{t-z}{2}}\left[\lambda^2\tilde{v}_t(t-z-\xi,\lambda,\xi) - \frac{\lambda^2}{2}\xi h(t-z-2\xi) + \int_0^{t-z-2\xi} h(\alpha)\tilde{v}_t(t-z-\xi-\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha\right]d\xi$$
$$- \int_0^z\int_{z-\beta}^{\frac{t+z-2\beta}{2}}\left[\lambda^2\tilde{v}_{tt}(t+z-2\beta-\xi,\lambda,\xi) - 1\left(\frac{\lambda^4}{8}\xi^2 - \frac{h(0)}{2}\xi + \frac{\lambda^2}{2}\right)h(t+z-2\beta-2\xi)\right.$$
$$\left. - \int_0^{t+z-2\beta-2\xi} h(\alpha)\tilde{v}_{tt}(t+x-2\beta-\xi-\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha\right]d\xi d\beta, \quad (47)$$

где введено обозначение $m(z) = \lambda^2 z^2/4 - 1$. Для замыкания системы интегральных уравнений (39) и (44)–(47) используются следующие очевидные равенства:

$$k_0(t) = \int_0^t (t-\tau) k_0''(\tau)\, d\tau, \tag{48}$$

$$k_0'(t) = \int_0^t k_0''(\tau)\, d\tau, \tag{49}$$

$$k_0''(t) = -h(t) - \lambda^2 k_0(t) - \int_0^t h(t-\tau) k_0(\tau)\, d\tau, \tag{50}$$

$$k_0'''(t) = -h'(t) - \lambda^2 k_0'(t) - \int_0^t h(\tau) k_0'(t-\tau)\, d\tau. \tag{51}$$

Теорема 1. *Пусть $\tilde g_{00}(t,\lambda) \in C^3[0,2l]$ и $\tilde g_{00}(+0,\lambda) = 0$, $\tilde g_{00t}'(+0,\lambda) = -\lambda^2/2$. Тогда существует единственное решение обратной задачи (9)–(13): $k_0(t) \in C^3[0,2l]$ для любого $l > 0$.*

Доказательство. Уравнения (39) и (44)–(51) определяют в D_2 замкнутую систему интегральных уравнений, относительно девяти неизвестных функций $\tilde v(t,\lambda,z)$, $\tilde v_t(t,\lambda,z)$, $\tilde v_{tt}(t,\lambda,z)$, $h(t)$, $h'(t)$, $k_0(t)$, $k_0'(t)$, $k_0''(t)$, $k_0'''(t)$. Отметим тот факт, что было бы достаточно рассмотрения шести функций $\tilde v(t,\lambda,z)$, $\tilde v_t(t,\lambda,z)$, $h(t)$, $k_0(t)$, $k_0'(t)$, $k_0''(t)$, также образующих замкнутую систему в D_2, но при доказательстве теоремы 3 возникает необходимость функций $\tilde v_{tt}(t,\lambda,z)$, $h'(t)$, $k_0'''(t)$, поэтому с самого начало будем рассматривать систему из девяти функций. Эту систему можно представить в виде операторного уравнения

$$A\varphi = \varphi, \tag{52}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi &= [\varphi_1(t,\lambda,z), \varphi_2(t,\lambda,z), \varphi_3(t,\lambda,z), \varphi_4(t), \varphi_5(t), \varphi_6(t), \varphi_7(t), \varphi_8(t), \varphi_9(t)] \\ &= \Big[\tilde v(t,\lambda,z), \tilde v_t(t,\lambda,z) + \frac{z}{2}h(t-z), \tilde v_{tt}(t,\lambda,z) + \frac{z}{2}h'(t-z) + \frac{1}{2}m(z)h(t-z), h(t) - 2k_0''(t), \\ &\qquad h'(t) - 2k_0'''(t), k_0(t),\ k_0'(t),\ k_0''(t) + h(t) + \lambda^2 k_0(t), k_0'''(t) + h'(t) + \lambda^2 k_0'(t)\Big] \end{aligned}$$

— векторная функция с компонентами φ_i, $i = \overline{1,9}$, а оператор A определён на множестве функций $\varphi \in C[D_2]$ и в соответствии с равенствами (39) и (44)–(51) имеет вид $A = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9)$, где

$$\begin{aligned} A_1\varphi = \varphi_{01} &+ \int_0^{t-z}\int_0^{\tau/2} \Big[\lambda^2 \varphi_1(t-\xi,\lambda,\xi) - \frac{1}{3}(2\varphi_8(t-2\xi) + \varphi_4(t-2\xi) - 2\lambda^2\varphi_6(t-2\xi)) \\ &+ \frac{1}{3}\int_0^{t-2\xi} [2\varphi_8(\alpha) + \varphi_4(\alpha) - 2\lambda^2\varphi_6(\alpha)]\varphi_1(\xi,\lambda,t-\xi-\alpha)\, d\alpha\Big] d\xi d\tau \\ &+ \int_{t-z}^{t} \int_{\tau-t+z}^{\frac{2\tau-t+z}{2}} \Big[\lambda^2 \varphi_1(t-2\beta+z-\xi,\lambda,\xi) \end{aligned}$$

$$
- \frac{1}{3}\Big(2\varphi_8(t-2\beta+z-2\xi) + \varphi_4(t-2\beta+z-2\xi) - 2\lambda^2\varphi_6(t-2\beta+z-2\xi)\Big)
$$
$$
+ \frac{1}{3}\int\limits_0^{2\tau-t+z-2\xi} [2\varphi_8(\alpha)+\varphi_4(\alpha)-2\lambda^2\varphi_6(\alpha)]\varphi_1(2\tau-t+z-\xi-\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha\Bigg] d\xi d\tau, \quad (53)
$$

$$
A_2\varphi = \varphi_{02} + \int\limits_0^{\frac{t-z}{2}} \Bigg[\varphi_1(t-z-\xi,\lambda,\xi) - \frac{1}{3}(2\varphi_8(t-z-2\xi)+\varphi_4(t-z-2\xi)-2\lambda^2\varphi_6(t-z-2\xi))
$$
$$
- \frac{1}{3}\int\limits_0^{t-z-2\xi} [2\varphi_8(\alpha)+\varphi_4(\alpha)-2\lambda^2\varphi_6(\alpha)]\varphi_1(t-z-\xi-\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha\Bigg] d\xi
$$
$$
+ \int\limits_0^{z}\int\limits_{x-\beta}^{\frac{t+z-2\beta}{2}} \Bigg[\lambda^2\varphi_2(t+z-2\beta-\xi,\lambda,\xi) - \frac{\lambda^2}{6}\xi[2\varphi_8(t+z-2\beta-2\xi)+\varphi_4(t+z-2\beta-\xi)
$$
$$
- 2\lambda^2\varphi_6(t+z-2\beta-2\xi)] + \frac{1}{3}\int\limits_0^{t+z-2\beta-2\xi} [2\varphi_8(\alpha)+\varphi_4(\alpha)-2\lambda^2\varphi_6(\alpha)]\Big(\lambda^2\varphi_2(t+z-2\beta-\xi,\lambda,\xi)
$$
$$
- \frac{\lambda^2}{6}\xi[2\varphi_8(t+z-2\beta-2\xi)+\varphi_4(t+z-2\beta-\xi)-2\lambda^2\varphi_6(t+z-2\beta-2\xi)]\Big) d\alpha\Bigg] d\xi d\beta, \quad (54)
$$

$$
A_3\varphi = \varphi_{03} + \int\limits_0^{\frac{t-z}{2}} \Bigg[\lambda^2\varphi_2(t-z-\xi,\lambda,\xi) - \frac{\lambda^2}{6}\xi[2\varphi_8(t-z-2\xi)+\varphi_4(t-z-2\xi)-2\lambda^2\varphi_6(t-z-2\xi)]
$$
$$
+ \frac{1}{3}\int\limits_0^{t-z-2\xi} [2\varphi_8(\alpha)+\varphi_4(\alpha)-2\lambda^2\varphi_6(\alpha)]\Big(\lambda^2\varphi_2(t-z-\xi-\alpha,\lambda,\xi)
$$
$$
- \frac{\lambda^2}{6}\xi[2\varphi_8(t-z-2\xi-\alpha)+\varphi_4(t-z-2\xi-\alpha)-2\lambda^2\varphi_6(t-z-2\xi-\alpha)]\Big) d\alpha\Bigg] d\xi
$$
$$
+ \int\limits_0^{z}\int\limits_{z-\beta}^{\frac{t+z-2\beta}{2}} \Bigg[\lambda^2\varphi_2(t+z-2\beta-\xi,\lambda,\xi) - \frac{\lambda^2}{6}[2\varphi_8(t+z-2\beta-2\xi)+\varphi_4(t+z-2\beta-2\xi)-2\lambda^2\varphi_6(t+z-2\beta-2\xi)]
$$
$$
- \frac{\lambda^2\xi}{6}[2\varphi_9(t+x-2\beta-\xi)+\varphi_5(t+x-2\beta-\xi)-2\lambda^2\varphi_7(t+x-2\beta-\xi)]
$$
$$
- \left(\frac{h(0)}{6}\xi - \frac{\lambda^2}{6}\right)[2\varphi_8(t+z-2\beta-2\xi)+\varphi_4(t+z-2\beta-2\xi)-2\lambda^2\varphi_6(t+z-2\beta-2\xi)]
$$
$$
+ \frac{1}{3}\int\limits_0^{t+z-2\beta-2\xi} \Bigg[2\varphi_8(\alpha)+\varphi_4(\alpha)-2\lambda^2\varphi_6(\alpha)\Big]\Big[\varphi_3(t+x-2\beta-\xi-\alpha,\lambda,\xi) - \frac{\xi}{6}[2\varphi_9(t+x-2\beta-2\xi-\alpha)
$$
$$
+ \varphi_5(t+x-2\beta-2\xi-\alpha) - 2\lambda^2\varphi_7(t+x-2\beta-2\xi-\alpha)] + \frac{1}{6}[2\varphi_8(t+z-2\beta-2\xi-\alpha)
$$
$$
+ \varphi_4(t+z-2\beta-2\xi-\alpha) - 2\lambda^2\varphi_6(t+z-2\beta-2\xi-\alpha)]\Big] d\alpha\Bigg] d\xi d\beta, \quad (55)
$$

$$A_4\varphi = \varphi_{04} - \frac{1}{3}\int\limits_0^t [2\varphi_8(\tau) - \varphi_4(\tau) - 2\lambda^2\varphi_6(\tau)]\tilde{g}_{00}(t-\tau,\lambda)\,d\tau$$

$$- 2\int\limits_0^{t/2}\Bigg[\lambda^2[\varphi_2(t-\xi,\lambda,\xi) - \frac{\xi}{6}[2\varphi_8(t-2\xi) + \varphi_4(t-2\xi) - 2\lambda^2\varphi_6(t-2\xi)] - \lambda^2\varphi_5(t-2\xi)]$$

$$- \frac{1}{3}\int\limits_0^{t-2\xi}[2\varphi_8(\alpha) + \varphi_4(\alpha) - 2\lambda^2\varphi_6(\alpha)][\varphi_2(t-\xi-\alpha,\lambda,\xi)$$

$$- \frac{\xi}{6}[2\varphi_8(t-2\xi-\alpha) - \varphi_4(t-2\xi-\alpha) - 2\lambda^2\varphi_6(t-2\xi]\,d\alpha\Bigg]d\xi, \quad (56)$$

$$A_5\varphi = \varphi_{05} - \frac{1}{3}\int\limits_0^t [\varphi_8(\tau) - 2\varphi_4(\tau) - \lambda^2\varphi_6(\tau)]\tilde{g}_{00}'(t-\tau,\lambda)\,d\tau$$

$$- 2\int\limits_0^{t/2}\Bigg[\lambda^2[\varphi_3(t-\xi,\lambda,\xi) - \frac{\xi}{6}[2\varphi_9(t-2\xi) + \varphi_5(t-2\xi) - 2\lambda^2\varphi_7(t-2\xi)]$$

$$- \frac{1}{6}[2\varphi_8(t-2\xi) + \varphi_4(t-2\xi) - 2\lambda^2\varphi_6(t-2\xi)]$$

$$- \left(\frac{h(0)}{6}\xi - \frac{\lambda^2}{6}\right)[2\varphi_8(t-2\xi) + \varphi_4(t-2\xi) - 2\lambda^2\varphi_6(t-2\xi)]$$

$$+ \frac{1}{3}\int\limits_0^{t-2\xi}[2\varphi_8(\alpha) + \varphi_4(\alpha) - 2\lambda^2\varphi_6(\alpha)]\Bigg(\varphi_3(t-\xi-\alpha,\lambda,\xi) + \frac{\xi}{6}[2\varphi_8(t-2\xi-\alpha)$$

$$+ \varphi_4(t-2\xi-\alpha) - 2\lambda^2\varphi_6(t-2\xi-\alpha)]$$

$$- \frac{1}{6}[2\varphi_8(t-2\xi-\alpha) + \varphi_4(t-2\xi-\alpha) - \lambda^2\varphi_6(t-2\xi-\alpha)]\Bigg)d\alpha\Bigg]d\xi, \quad (57)$$

$$A_6\varphi = \varphi_{06} + \frac{1}{3}\int\limits_0^t (t-\tau)[\varphi_8(\tau) - \varphi_4(\tau) - \lambda^2\varphi_6(\tau)]\,d\tau, \quad (58)$$

$$A_7\varphi = \varphi_{07} + \frac{1}{3}\int\limits_0^t [\varphi_8(\tau) - \varphi_4(\tau) - \lambda^2\varphi_6(\tau)]\,d\tau, \quad (59)$$

$$A_8\varphi = \varphi_{08} + \frac{1}{3}\int\limits_0^t [2\varphi_8(\tau) + \varphi_4(\tau) - 2\lambda^2\varphi_6(\tau)]\varphi_6(t-\tau)\,d\tau, \quad (60)$$

$$A_9\varphi = \varphi_{09} + \frac{1}{3}\int\limits_0^t [2\varphi_8(\tau) + \varphi_4(\tau) - 2\lambda^2\varphi_6(\tau)]\varphi_7(t-\tau)\,d\tau, \quad (61)$$

где введено обозначение

$$\varphi_0(t,\lambda,z)=(\varphi_{01},\varphi_{02},\varphi_{03},\varphi_{04},\varphi_{05},\varphi_{06},\varphi_{07},\varphi_{08},\varphi_{09})$$
$$:=\Big[-\frac{\lambda^2}{2}(t-z),-\frac{\lambda^2}{2},-\frac{\lambda^2}{8}h(0)tz-\frac{\lambda^4 z}{4},-2\tilde g''_{00t}(t,\lambda),\frac{\lambda^4}{2}+\frac{1}{4}h(0)t-2\tilde g'''_{00t}(t,\lambda),0,0,0,0\Big].$$

Обозначим через C_σ банахово пространство непрерывных функций, порождённых семейством весовых норм

$$\|\varphi\|_\sigma=\max\{\sup_{(t,\lambda,z)\in D_2}|\varphi_i(t,\lambda,z)e^{-\sigma t}|,i=\overline{1,3},\ \sup_{t\in[0,2l]}|\varphi_j(t)e^{-\sigma t}|,\ j=\overline{4,9}\},\quad \sigma\geqslant 0.$$

При $\sigma=0$ данное пространство совпадает с пространством непрерывных функций с обычной нормой. Эту норму будем обозначать далее $\|\varphi\|$. Из неравенства

$$e^{-\sigma t}\|\varphi\|\leqslant\|\varphi\|_\sigma\leqslant\|\varphi\| \tag{62}$$

следует эквивалентность норм $\|\varphi\|_\sigma$ и $\|\varphi\|$ при любом фиксированном $l\in(0,\infty)$. Число σ выберем позже. Пусть $Q_\sigma(\varphi_0,\|\varphi_0\|):=\{\varphi\mid\|\varphi-\varphi_0\|\leqslant\|\varphi_0\|\}$ — шар радиуса $\|\varphi_0\|$ с центром в точке φ_0 некоторого весового пространства $C_\sigma(\sigma\geqslant 0)$, в котором

$$\|\varphi_0\|=\max(\|\varphi_{01}\|,\|\varphi_{02}\|,\|\varphi_{03}\|,\|\varphi_{04}\|,\|\varphi_{05}\|,\|\varphi_{06}\|),\|\varphi_{07}\|,\|\varphi_{08}\|,\|\varphi_{09}\|).$$

Нетрудно заметить, что для $Q_\sigma(\varphi_0,\|\varphi_0\|)$ имеет место оценка

$$\|\varphi\|_\sigma\leqslant\|\varphi_0\|_\sigma+\|\varphi_0\|\leqslant 2\|\varphi_0\|.$$

Пусть $\varphi(x,t)\in Q_\sigma(\varphi_0,\|\varphi_0\|)$. Покажем, что при подходящем выборе $\sigma>0$ оператор A переводит шар в шар, т. е. $A\varphi\in Q_\sigma(\varphi_0,\|\varphi_0\|)$. На самом деле, с помощью равенств (53)–(61) составляя норму разностей, для $(t,z)\in D_2$ имеем

$$\|A_1\varphi-\varphi_{01}\|_\sigma=\sup_{(t,z)\in D_2}|(A_1\varphi-\varphi_{01})e^{-\sigma t}|=\sup_{(t,z)\in D_2}\Bigg|\int\limits_0^{t-z}\int\limits_0^{\tau/2}\Bigg[\lambda^2\varphi_1(t-\xi,\lambda,\xi)e^{-\sigma(t-\xi)}e^{-\sigma\xi}$$
$$-\frac{1}{3}(2\varphi_8(t-2\xi)+\varphi_4(t-2\xi)-2\lambda^2\varphi_6(t-2\xi))e^{-\sigma(t-2\xi)}e^{-2\sigma\xi}$$
$$+\frac{1}{3}\int\limits_0^{t-2\xi}[2\varphi_8(\alpha)+\varphi_4(\alpha)-2\lambda^2\varphi_6(\alpha)]e^{-\sigma\alpha}\varphi_1(t-\xi-\alpha,\lambda,\xi)e^{-\sigma(t-\xi-\alpha)}e^{-\sigma\xi}\,d\alpha\Bigg]d\xi d\tau$$
$$+\int\limits_{t-z}^{t}\int\limits_{\tau-t+z}^{\frac{2\tau-t+z}{2}}\Bigg[\lambda^2\varphi_1(2\tau-t+z-\xi,\lambda,\xi)e^{-\sigma(2\tau-t+z-\xi)}e^{-\sigma(\xi-2\tau-z)}$$
$$-\frac{1}{3}(2\varphi_8(t-2\beta+z-2\xi)+\varphi_4(t-2\beta+z-2\xi)-2\lambda^2\varphi_6(t-2\beta+z-2\xi))e^{-\sigma(2\tau-t+z-2\xi)}e^{-\sigma(2\xi-2\tau-z)}$$
$$+\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\tau-t+z-2\xi}[2\varphi_8(\alpha)+\varphi_4(\alpha)-2\lambda^2\varphi_6(\alpha)]e^{-\sigma\alpha}\varphi_1(2\tau-t+z-\xi-\alpha,\lambda,\xi)$$
$$\times e^{-\sigma(2\tau-t+z-\xi-\alpha)}e^{-\sigma(2t+\xi-2\tau-z)}\,d\alpha\Bigg]d\xi d\tau\Bigg|\leqslant\frac{2\|\varphi_0\|}{\sigma}l[3\lambda^2+(3+2\lambda^2)(4\|\varphi_0\|l+2/3)]=:\frac{\|\varphi_0\|}{\sigma}\alpha_1.$$

Аналогичным образом получим оценки

$$\|A_j\varphi-\varphi_{0j}\|_\sigma\leqslant\frac{\|\varphi_0\|}{\sigma}\alpha_j,\quad j=\overline{2,9},$$

где

$$(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8,\alpha_9)=\Big\{2[\lambda^2 l+1+L(1+\lambda^2 l^2+(16+2\lambda^2(1+l))\|\varphi_0\|)],$$

$$2[\lambda^2 L(1+L+\frac{1}{2}L(1+l))+\lambda^2(L+1)(4\lambda^2 L+3(1+lL))\|\varphi_0\|],$$

$$2[6\lambda^2+2L(G_0+l+8(1+l^2L)|\varphi_0\|)],2[2(\lambda^2+L(G_1+l+1+6L_0)+8(2L+l^2)/3\|\varphi_0\|],$$

$$\frac{(2+\lambda^2)}{3}l,\frac{(2+\lambda^2)}{3},2\left[\frac{2}{9}l^2\|\varphi_0\|\left(3+\frac{5\lambda^2}{2}\right)\left(2+\frac{5\lambda^2}{4}\right)\right]\Big\},2\left[\frac{2}{9}l^3\|\varphi_0\|\left(3+\frac{5\lambda^2}{2}\right)\left(2+\frac{5\lambda^2}{4}\right)\right].$$

Здесь введены обозначения:

$$L=(3+2\lambda^2)/6,\quad L_0=h(0)l/6-\lambda^2/6,\quad G_0=\max_{t\in[0,2l]}|g_0(t,\lambda)|,\quad G_1=\max_{t\in[0,2l]}\left|g_0'(t,\lambda)\right|.$$

Выбирая $\sigma\geqslant\alpha_0:=\max(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8,\alpha_9)$, получим, что A переводит шар $Q_\sigma(\varphi_0,\|\varphi_0\|)$ в шар $Q_\sigma(\varphi_0,\|\varphi_0\|)$.

Пусть теперь φ^1, φ^2 — любые два элемента из $Q_\sigma(\varphi_0,\|\varphi_0\|)$. Тогда, используя вспомогательные неравенства вида

$$\left|\varphi_i^1\varphi_j^1-\varphi_i^2\varphi_j^2\right|e^{-\sigma t}\leqslant\left|\varphi_i^1\right|\left|\varphi_j^1-\varphi_j^2\right|e^{-\sigma t}+\left|\varphi_j^2\right|\left|\varphi_i^1-\varphi_i^2\right|e^{-\sigma t}\leqslant4\|\varphi_0\|\left\|\varphi^1-\varphi^2\right\|_\sigma$$

для $(t,z)\in D_2$, получим

$$\|(A\varphi^1-A\varphi^2)_j\|_\sigma=\sup_{(t,z)\in D_2}|(A\varphi^1-A\varphi^2)_je^{-\sigma t}|\leqslant\frac{\|\varphi^1-\varphi^2\|_\sigma}{\sigma}\beta_0,$$

где

$$\beta_0=\max\Big\{[3\lambda^2+(3+2\lambda^2)(8\|\varphi_0\|l+2/3)],[\lambda^2 l+1+L(1+\lambda^2 l^2+2(16+2\lambda^2(1+l))\|\varphi_0\|)],$$

$$[\lambda^2L(1+L+L(1+l)/2)+2\lambda^2(L+1)(4\lambda^2L+3(1+lL))\|\varphi_0\|],[6\lambda^2+2L(G_0+l+16(1+l^2L)|\varphi_0\|)],$$

$$[2(\lambda^2+L(G_1+l+1+6L_0)+16(2L+l^2/3)\|\varphi_0\|],\frac{(2+\lambda^2)}{6}\,l,\frac{(2+\lambda^2)}{6},$$

$$2\left[\frac{2}{9}\,l^2\|\varphi_0\|\left(3+\frac{5\lambda^2}{2}\right)\left(2+\frac{5\lambda^2}{4}\right)\right]\Big\},2\left[\frac{2}{9}\,l^3\|\varphi_0\|\left(3+\frac{5\lambda^2}{2}\right)\left(2+\frac{5\lambda^2}{4}\right)\right].$$

Из полученных оценок следует, что если число σ будет выбрано из условия $\sigma>\max(\alpha_0,\beta_0)$, то оператор A является сжимающим на $Q_\sigma(\varphi_0,\|\varphi_0\|)$ и по принципу Банаха существует единственное решение уравнения (52) в $Q_\sigma(\varphi_0,\|\varphi_0\|)$ при любом фиксированном $l>0$. Теорема 1 доказана. □

Пусть $K(m_0)$ — множество функций $k_0(t)\in C[0,2l]$, удовлетворяющих при некотором $l>0$ условию $\|k_0\|_{C[0,2l]}\leqslant m_0$ с постоянной $m_0>0$.

Теорема 2. *Пусть $k_0^1(t),k_0^2(t)\in K(m_0)$ — два решения обратной задачи* (9)–(13) *с данными g_0^1 и g_0^2 соответственно. Тогда найдётся такое положительное число $C=C(m_0,l)$, что выполняется неравенство*

$$\left\|k_0^1(t)-k_0^2(t)\right\|_{C[0,2l]}\leqslant C\left\|g_0^1-g_0^2\right\|_{C^3[0,2l]}.\tag{63}$$

Доказательство. Пусть φ^1 и φ^2 — две вектор-функции, которые являются решениями (52) с данными g_0^1 и g_0^2 соответственно, т. е. $\varphi^j = A\varphi^j$ при $j = 1, 2$. Переходя в интегральных уравнениях к разностям $\varphi_i^1 - \varphi_i^2$, $i = \overline{1,8}$, как в работе [37], из рассуждений, сделанных при доказательстве теоремы 1 для $\sigma > \sigma_0$, получим оценку

$$\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma \leqslant C_0\big\|g_0^1 - g_0^2\big\|_{C^3[0,2l]} + \frac{\sigma}{\sigma_0}\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma, \tag{64}$$

где постоянная C_0 зависит от тех же параметров, что и C. Из неравенств (62) и (64) следует оценка

$$\big\|k_0^1(t) - k_0^2(t)\big\|_{C[0,2l]} \leqslant \frac{C_0\sigma}{|\sigma - \sigma_0|}\big\|g_0^1 - g_0^2\big\|_{C^3[0,2l]}.$$

Если в этом неравенстве обозначить

$$\frac{C_0\sigma}{|\sigma - \sigma_0|} =: C,$$

то получим оценку (63). Теорема 2 доказана. □

А теперь установим некоторые факты, которые пригодятся при доказательствах теорем разд. 4. Из формул (29) и (38) следует, что u_0 выражается через $\tilde v$ по формуле

$$\tilde u_0(t,\lambda,z) = \tilde v(t,\lambda,z) - \delta(t-z) + \int\limits_0^t r(t-\tau)(\tilde v(\tau,\lambda,z) - \delta(\tau - z))\,d\tau. \tag{65}$$

Так как в области $t > z > 0$ имеем $\tilde v(t,x,z) = v(t,x,z)$, то, убирая волну функции $\tilde v$ и дифференцируя уравнение (65) по λ, получим

$$\tilde u_{0\lambda}(t,\lambda,z) = v_\lambda(t,\lambda,z) + \int\limits_z^t r(t-\tau)v_\lambda(\tau,\lambda,z)\,d\tau. \tag{66}$$

Следует отметить, что для функции v_λ справедлива следующая задача, получаемая дифференцированием (40)–(43) по λ:

$$\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial z^2} - 2\lambda v - \lambda^2 v_\lambda - \int\limits_z^t h(t-\tau)v_\lambda(\tau,\lambda,z)d\tau, \quad (t,z) \in D_2, \tag{67}$$

$$v_\lambda|_{t=z+0} = -\lambda z, \tag{68}$$

$$\left.\frac{\partial v_\lambda}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial v_\lambda}{\partial z}\right|_{z=l} = 0, \tag{69}$$

$$\tilde v_\lambda(t,\lambda,0) = \tilde g_{0\lambda}(t,\lambda) + \int\limits_0^t k_0(t-\tau)\tilde g_{0\lambda}(\tau,\lambda)\,d\tau. \tag{70}$$

Лемма 2. *В области D_2 функция $\tilde v_\lambda(t,\lambda,z) \in C^3(D_2)$ и имеет место интегральное уравнение*

$$v_\lambda(t,\lambda,z) = \frac{1}{2}\Bigg[\tilde g_{0\lambda}(t+z,\lambda) + \tilde g_{0\lambda}(t-z,\lambda) + \int\limits_0^{t+z} k_0(t+z-\tau)\tilde g_{0\lambda}(\tau,\lambda)\,d\tau + \int\limits_0^{t_z} k_0(t-z-\tau)\tilde g_{0\lambda}(\tau,\lambda)\,d\tau\Bigg]$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^z\int\limits_{t-z+\xi}^{t+z-\xi}\Bigg[\lambda^2 v_\lambda(\tau,\lambda,\xi) + 2\lambda v(\tau,\lambda,\xi) + \int\limits_\xi^\tau h(\tau-\alpha)v(\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha + \int\limits_\xi^\tau k_1(\tau-\alpha)\,d\alpha\Bigg]d\tau d\xi, \tag{71}$$

Доказательство. Воспользуемся эквивалентным описанием области D_2 в виде $D_2 = \{(t,z) \mid 0 < t < 2l,\ t < z < 2l - t\}$. С помощью формулы Даламбера из уравнения (67) и начальных условий (70), (69)(имеется в виду первое из двух условий (69)) получим линейное интегральное уравнение (71) в области D_2. Из теории интегральных уравнений следует, что уравнение (71) имеет единственное, непрерывное решение в D_2. Степень гладкости решения устанавливается при помощи дифференцирования уравнения (71) достаточное количество раз. Легко проверяется, что правая часть продифференцированного уравнения будет непрерывной, а следовательно, будет непрерывна и левая часть [38, гл. 2]. Таким образом, $v_\lambda \in C^3[D_2]$. □

4. ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ k_1 и $\tilde{u}_1$

Функции k_0 и $\tilde{u}_0$ будем считать известными. Введём в рассмотрение новую функцию $w(t,\lambda,z)$, как в предыдущем разделе, следующим образом:

$$w(t,\lambda,z) := \tilde{u}_1(t,\lambda,z) + \int_0^t k_0(t-\tau)\tilde{u}_1(\tau,\lambda,z)\,d\tau.$$

Тогда функция $\tilde{u}_1(t,\lambda,z)$ выражается через $w(t,\lambda,z)$ по формуле

$$\tilde{u}_1(t,\lambda,z) = w(t,\lambda,z) + \int_0^t r(t-\tau)w(\tau,\lambda,z)\,d\tau,$$

где

$$r(t) = -k_0(t) - \int_0^t k_0(t-\tau)r(\tau)\,d\tau.$$

Относительно новых функций $w(t,\lambda,z)$ и $r(t)$ уравнения (24)–(27) с учётом (28) принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \lambda^2 w - \int_0^t h(t-\tau)w(\tau,\lambda,z)\,d\tau \\ &- i\int_0^t k_1(t-\tau)\left[2\lambda\tilde{u}_0(\tau,\lambda,z) + \lambda^2\tilde{u}_{0\lambda}(\tau,\lambda,z) - \frac{\partial^2\tilde{u}_{0\lambda}}{\partial z^2}\right]d\tau, \quad (z,t)\in D_2, \quad \lambda\in\mathbb{R}, \end{aligned} \tag{72}$$

$$w|_{t<0} \equiv 0, \tag{73}$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial z} - i\int_0^t k_1(t-\tau)\frac{\partial\tilde{u}_{0\lambda}}{\partial z}\,d\tau\right]\Bigg|_{z=0} = 0, \tag{74}$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial z} - i\int_0^t k_1(t-\tau)\frac{\partial\tilde{u}_{0\lambda}}{\partial z}\,d\tau\right]\Bigg|_{z=l} = 0, \tag{75}$$

$$w|_{z=0} = a_1(t,\lambda), \tag{76}$$

$$w|_{t=z} = 0, \tag{77}$$

где $h(t) := r''(t)$,

$$a_1(t,\lambda) := \tilde{g}_1(t,\lambda) + \int_0^t k_0(t-\tau)\tilde{g}_1(\tau,\lambda)\,d\tau. \tag{78}$$

Используя формулы (65)–(69), последние слагаемые (72), (74) и (75) преобразуются следующим образом:

$$\int_0^t k_1(t-\tau)\frac{\partial \tilde{u}_{0\lambda}}{\partial z}\,d\tau = \int_z^t k_1(t-\tau)\left[\frac{\partial v_\lambda(\tau,\lambda,z)}{\partial z}\,d\tau - \int_z^\eta r(\tau-\eta)\frac{\partial v_\lambda(\tau,\lambda,\eta)}{\partial z}\,d\eta\right]d\tau,$$

$$\int_0^t k_1(t-\tau)\frac{\partial^2 \tilde{u}_{0\lambda}}{\partial z^2}\,d\tau = \int_z^t k_1(t-\tau)\left[\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial z^2}\,d\tau - \int_z^\eta r(\tau-\eta)\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial z^2}\,d\eta\right]d\tau,$$

$$\int_0^t \lambda^2 k_1(t-\tau)u_{0\lambda}(\tau,\lambda,z)\,d\tau = \int_z^t \lambda^2 k_1(t-\tau)\left[v(\tau,\lambda,z) - \int_z^\eta r(\tau-\eta)v(\tau,\lambda,\eta)\,d\eta\right]d\tau,$$

$$\int_0^t 2\lambda k_1(t-\tau)\widetilde{u}_0(\tau,\lambda,z) = -2\lambda k_1(t-z) - 2\lambda\int_z^t k_1(t-\tau)r(\tau-z)d\tau$$
$$+ 2\lambda\int_z^t k_1(t-\tau)\left[v(\tau,\lambda,z) + \int_z^\tau r(\tau-\eta)v(\eta,\lambda,z)\,d\eta\right]d\tau.$$

Таким образом, задачу (72)–(77) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \lambda^2 w + \lambda_1 k_1(t-z) - \int_z^t h(t-\tau)w(\tau,\lambda,z)\,d\tau - \int_z^t k_1(t-\tau)s(\tau,\lambda,z)\,d\tau,\\ (z,t)\in D_2, \quad \lambda\in\mathbb{R}, \quad \lambda_1 := 2i\lambda,\end{gathered} \tag{79}$$

$$w|_{t<0} \equiv 0, \tag{80}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}\,|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z}\,|_{z=l} = 0, \tag{81}$$

$$w|_{z=0} = a_1(t,\lambda), \tag{82}$$

$$w|_{t=z} = 0, \tag{83}$$

$$\begin{aligned}s(t,\lambda,z) := i\Bigg[\lambda^2\left(v(t,\lambda,z) - \int_z^t r(t-\tau)v(\tau,\lambda,z)\,d\tau\right) + \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial z^2} - \int_z^t r(t-\tau)\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial z^2}\,d\tau\\ + 2\lambda\int_z^t k_1(t-\tau)r(\tau-z)\,d\tau - 2\lambda\int_z^t k_1(t-\tau)\left[v(\tau,\lambda,z) + \int_z^\tau r(\tau-\eta)v(\eta,\lambda,z)\,d\eta\right]\Bigg].\end{aligned} \tag{84}$$

Лемма 3. *В области D_2 имеет место соотношение*

$$s(t,\lambda,z)|_{t=z+0} = -\frac{i\lambda^2}{2}z. \tag{85}$$

Доказательство. При $t = z + 0$ все слагаемые (84), кроме первого, обратятся в нуль, а в первом слагаемом, если вместо $(v(z+0,\lambda,z)$ поставим известное значение $\tilde{v}(t,\lambda,z)|_{t=z+0} = -\dfrac{\lambda^2}{2}z$, исходящее непосредственно из (39), то получим (85). $\square$

Заметим, что неизвестные функции входят в уравнение (24) линейным образом. Заменим систему равенств (79)–(83) эквивалентными интегральными уравнениями. С помощью формулы Даламбера из (79), (81), (82) получим уравнение

$$w(t,\lambda,z) = \frac{1}{2}[a_1(t-z,\lambda)+a_1(t+z,\lambda)] - \frac{1}{2}\int\limits_0^z \int\limits_{t-z+\xi}^{t+z-\xi} \Bigg[\lambda^2 w(\tau,\lambda,\xi) - \lambda_1 k_1(\tau-\xi)$$
$$+ \int\limits_\xi^\tau h(\tau-\alpha)w(\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha + \int\limits_\xi^\tau k_1(\tau-\alpha)s(\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha\Bigg] d\tau d\xi. \tag{86}$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $t \to z+0$ и учитывая условия $w|_{t=z} = 0$ и $a_1(0,\lambda) = 0$, находим

$$a_1(2z,\lambda)$$
$$= \int\limits_0^z \int\limits_\xi^{2z-\xi} \Bigg[\lambda^2 w(\tau,\lambda,\xi) - \lambda_1 k_1(\tau-\xi) + \int\limits_0^{\tau-\xi} h(\alpha)w(\tau-\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha + \int\limits_0^{\tau-\xi} k_1(\alpha)s(\tau-\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha\Bigg] d\tau d\xi.$$

Для получения интегрального уравнения относительно $k_1(t)$ дифференцируем два раза по t последнее уравнение, предварительно заменив $2z$ на t:

$$k_1(t) = \frac{2}{\lambda_1}a_1''(t,\lambda) - \frac{2}{\lambda_1}\Bigg\{\int\limits_0^{t/2}\Bigg[\lambda^2 w_t(t-\xi,\lambda,\xi)$$
$$+ \int\limits_0^{t-2\xi} h(\alpha)w_t(t-\xi-\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha + \int\limits_0^{t-2\xi} k_1(\alpha)s_t(t-\xi-\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha\Bigg] d\xi\Bigg\}. \tag{87}$$

Дифференцируя (86) по t, с учётом (85) получим уравнения относительно w_t:

$$w_t(t,\lambda,z)$$
$$= \frac{1}{2}\big[a_1'(t-z,\lambda)+a_1'(t+z,\lambda)\big] - \frac{1}{2}\lambda_1 k_1(t-z)z + \frac{1}{2}\int\limits_0^z \Bigg\{\lambda^2 w(t+z-\xi,\lambda,\xi) - \lambda^2 w(t-z+\xi,\lambda,\xi)$$
$$- \lambda_1 k_1(t+z-2\xi) - \int\limits_0^{t+z-2\xi} h(\alpha)w(t+z-\xi-\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha + \int\limits_0^{t-z} h(\alpha)w(t-z+\xi-\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha$$
$$+ \int\limits_0^{t+z-2\xi} k_1(\alpha)s(t+z-\xi-\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha - \int\limits_0^{t-z} k_1(\alpha)s(t-z+\xi-\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha\Bigg\} d\xi. \tag{88}$$

Уравнения (86)–(88) образуют замкнутую линейную систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода в области D_2 относительно функций $w(t,x,z)$, $w_t(t,x,z)$, $k_1(t)$ для фиксированного λ.

Так как в уравнении (87) присутствует $s_t(t,\lambda,z)$, то для дальнейших рассуждений мы должны показать принадлежность $s(t,\lambda,z)$ классу $C^1[D_2]$. Следовательно, необходимо показать, что $v_\lambda(t,\lambda,z)\in C^3[D_2]$. Принадлежность $v_\lambda(t,\lambda,z)$ классу $C^3[D_2]$ доказана в лемме 2.

Основными результатами этого раздела являются теоремы 3 и 4 однозначной глобальной разрешимости и устойчивости обратной задачи определения $k_1(t)$.

Теорема 3. *Пусть* $\tilde g_{00}(t,\lambda)\in C^3[0,2l]$, $\tilde g_{00}(+0,\lambda)=0$, $\tilde g_{00}'(+0,\lambda)=-\lambda^2/2$, $\tilde g_1(+0,\lambda)\in C^2[0,2l]$, $\tilde g_1(+0,\lambda)=\tilde g_1'(+0,\lambda)=0$. *Тогда существует единственное решение обратной задачи* (24)–(28), $k_1(t)\in C^2[0,2l]$, *для любого* $l>0$.

Доказательство. Система уравнений (86)–(88) образует замкнутую систему интегральных уравнений в D_2. Запишем эту систему в виде операторного уравнения

$$\psi = F\psi, \tag{89}$$

где

$$\psi=[\psi_1(t,\lambda,z),\psi_2(t,\lambda,z),\psi_3(t)]=\left[w(t,\lambda,z),w_t(t,\lambda,z)+\frac{1}{2}\lambda_1k_1(t-z)z,k_1(t)\right]$$

— векторная функция с компонентами $\psi_i, i=\overline{1,3}$, а оператор A определён на множестве функций $\varphi\in C[D_2]$ и в соответствии с равенствами (86)–(88) имеет вид $F=(F_1,F_2,F_3)$, где

$$F_1\psi=\psi_{01}-\frac{1}{2}\int\limits_0^z\int\limits_{t-z+\xi}^{t+z-\xi}\Bigg[\lambda^2\psi_1(\tau,\lambda,\xi)-\lambda_1\varphi_3(\tau-\xi)$$
$$+\int\limits_\xi^\tau h(\tau-\alpha)\psi_1(\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha+\int\limits_\xi^\tau\psi_3(\tau-\alpha)s(\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha\Bigg]d\tau d\xi, \tag{90}$$

$$F_2\psi=\psi_{02}-\frac{1}{2}\int\limits_0^z\Bigg\{\lambda^2\psi_1(t+z-\xi,\lambda,\xi)-\lambda^2\psi_1(t-z+\xi,\lambda,\xi)$$
$$-\int\limits_0^{t+z-2\xi}h(\alpha)\psi_1(t+z-\xi-\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha+\int\limits_0^{t-z}h(\alpha)\psi_1(t-z+\xi-\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha$$
$$+\int\limits_0^{t+z-2\xi}\varphi_3(\alpha)s(t+z-\xi-\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha-\int\limits_0^{t-z}\varphi_3(\alpha)(\alpha)s(t-z+\xi-\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha\Bigg\}d\xi, \tag{91}$$

$$F_3\psi=\psi_{03}-\frac{2}{\lambda_1}\Bigg\{\int\limits_0^{t/2}\Bigg[\lambda^2\Big(\psi_2(t-\xi,\lambda,\xi)-\frac{1}{2}\lambda_1\psi_3(t-2\xi)\xi\Big)$$
$$+\int\limits_0^{t-2\xi}h(\alpha)\Big(\psi_2(t-\xi-\alpha,\lambda,\xi)-\frac{1}{2}\lambda_1\psi_3(t-2\xi-\alpha)\xi\Big)\,d\alpha$$

$$+\int\limits_0^{t-2\xi}\psi_3(\alpha)s_t(t-\xi-\alpha,\lambda,\xi)\,d\alpha\Bigg]d\xi\Bigg\},\quad (92)$$

где

$$\psi_0(x,t)=(\psi_{01},\psi_{02},\psi_{03}):=\Big[a_1(t-z,\lambda)+a_1(t+z,\lambda),\frac{1}{2}\big[a_1'(t-z,\lambda)+a_1'(t+z,\lambda)\big],\frac{2}{\lambda_1}a_1''(t,\lambda)\Big].$$

Покажем, что некоторая степень n, $n\in\mathbb{N}$, линейного отображения $F\psi$ является сжатием. Положим

$$\|\psi\|=\max\{\max_{(t,z)\in D_2}|\psi_j(t,\lambda,z)|,\ j=1,2,\ \max_{t\in[0,2l]}|\psi_3(t)|\}.$$

Пусть ψ^1, ψ^2 — две непрерывные вектор-функции в D_2, удовлетворяющие линейной системе интегральных уравнений (90)–(92). Положим

$$\Delta(t,z)=\{(\xi,\tau)\mid 0\leqslant\xi\leqslant z,\ t-z+\xi\leqslant\tau\leqslant t+z-\xi\},\quad \Pi(t,\xi,z)=\{\tau\mid(\xi,\tau)\in\Delta(t,z)\}.$$

Тогда для $(t,z)\in D_2$ имеем (в оценках используем тот факт, что в уравнении (87) $t=2z$):

$$|F_1\psi^{(1)}-F_1\psi^{(2)}|(t,\lambda,z)\leqslant\gamma_1\int\limits_0^z\max\big\{\max_{(t,\lambda,z)\in\Pi}\big|\psi_1^{(1)}-\psi_1^{(2)}\big|(\tau,\lambda,\xi),\big|\psi_3^{(1)}-\psi_3^{(2)}\big|(2\xi)\big\}\,d\xi$$

$$\leqslant\gamma_1\int\limits_0^z\max\big\{\max_{(\xi,\tau)\in D_2}\big|\psi_1^{(1)}-\psi_1^{(2)}\big|(\tau,\lambda,\xi),\max_{(\xi)\in[0,l]}\big|\psi_3^{(1)}-\psi_3^{(2)}\big|(2\xi)\big\}d\xi\leqslant\gamma_1 z\big\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\big\|,$$

$$|F_2\psi^{(1)}-F_2\psi^{(2)}|(t,\lambda,z)$$

$$\leqslant\gamma_2\int\limits_0^z\max\big\{\max_{(\xi,\tau)\in D_2}\big|\psi_1^{(1)}-\psi_1^{(2)}\big|(\tau,\lambda,\xi),\max_{(\xi)\in[0,l]}\big|\psi_3^{(1)}-\psi_3^{(2)}\big|(2\xi)\big\}\,d\xi\leqslant\gamma_2 z\big\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\big\|,$$

$$|F_3\psi^{(1)}-F_3\psi^{(2)}|(2z)$$

$$\leqslant\gamma_3\int\limits_0^z\max\big\{\max_{(\xi\in[0,l]}\big|\psi_2^{(1)}-\psi_2^{(2)}\big|(2l-\xi,\lambda,\xi),\max_{(\xi)\in[0,l]}\big|\psi_3^{(1)}-\psi_3^{(2)}\big|(2\xi)\big\}\,d\xi\leqslant\gamma_3 z\big\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\big\|,$$

где γ_j — константы, зависящие от величин, входящих в C (теорема 2).

Полагая $M=\max\{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\}$, получаем $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant 3}|F_j\psi^{(1)}-F_j\psi^{(2)}|(t,\lambda,z)\leqslant Mz\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\|$. Далее,

$$|F_1^2\psi^{(1)}-F_1^2\psi^{(2)}|(t,\lambda,z)$$

$$\leqslant\gamma_1\int\limits_0^z\max\big\{\max_{(t,\lambda,z)\in\Pi}\big|F_1\psi_1^{(1)}-F_1\psi_1^{(2)}\big|(\tau,\lambda,\xi),\big|F_1\psi_3^{(1)}-F_1\psi_3^{(2)}\big|(2\xi)\big\}\,d\xi$$

$$\leqslant\gamma_1 M\int\limits_0^z\xi\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\|\,d\xi\leqslant\gamma_1 M\frac{z^2}{2!}\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\|,$$

$$|F_2^2\psi^{(1)} - F_2^2\psi^{(2)}|(t,\lambda,z)$$
$$\leqslant \gamma_2 \int\limits_0^z \max\Big\{ \max_{(t,\lambda,z)\in\Pi} \big|F_2\psi_1^{(1)} - F_2\psi_1^{(2)}\big|(\tau,\lambda,\xi), \big|F_2\psi_3^{(1)} - F_2\psi_3^{(2)}\big|(2\xi)\Big\}\, d\xi$$
$$\leqslant \gamma_2 M \int\limits_0^z \xi \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|\, d\xi \leqslant \gamma_2 M \frac{z^2}{2!}\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|,$$

$$|F_3^2\psi^{(1)} - F_3^2\psi^{(2)}|(2z)$$
$$\leqslant \gamma_3 \int\limits_0^z \max\Big\{ \max_{(\tau\in[\xi,2z-\xi]} \big|F_3\psi_2^{(1)} - F_3\psi_2^{(2)}\big|(2l-\xi,\lambda,\xi), \big|F_3\psi_3^{(1)} - F_3\psi_3^{(2)}\big|(2\xi)\Big\}\, d\xi$$
$$\leqslant \gamma_3 M \frac{z^2}{2!}\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|.$$

Отсюда

$$\max_{1\leqslant j\leqslant 3} \big|F_j^2\psi^{(1)} - F_j^2\psi^{(2)}\big|(t,\lambda,\xi) \leqslant M^2\frac{z^2}{2!}\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|, \quad (t,z)\in D_2,$$

следовательно,

$$\max_{1\leqslant j\leqslant 3} \big|F_j^n\psi^{(1)} - F_j^n\psi^{(2)}\big|(t,\lambda,\xi) \leqslant M^n\frac{z^n}{n!}\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|, \quad (t,z)\in D_2,$$
$$|F^n\psi^{(1)} - F^n\psi^{(2)}|(t,\lambda,\xi) \leqslant M^n\frac{l^n}{n!}\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|.$$

При любом фиксированном l число n можно выбрать настолько большим, что $M^n\dfrac{l^n}{n!} < 1$. Тогда отображение F^n является сжатием. Согласно обобщению принципа сжимающих отображений уравнение (89) имеет единственное решение, принадлежащее $C(D_2)$. Данное решение может быть найдено методом последовательных приближений. Теорема 3 доказана. $\square$

Пусть $K(m_1)$ — множество функций $k_1(t)\in C[0,2l]$, удовлетворяющих при некотором $l>0$ условию $\|k_1\|_{C[0,2l]} \leqslant m_1$ с постоянной $m_1>0$.

Теорема 4. *Пусть* $k_1^1(t), k_1^2(t)\in K(m_1)$ *— два решения обратной задачи* (24)–(28) *с данными* $\big(\tilde g_1^1, k_0^1, u_0^1\big)$ *и* $\big(\tilde g_1^2, k_0^2, u_0^2\big)$ *соответственно. Тогда найдётся такое положительное число* $C_1 = C_1(k_1,l)$, *что выполняется неравенство*

$$\big\|k_1^1(t) - k_1^2(t)\big\|_{C[0,2l]} \leqslant C_1\big[\big\|\tilde g_1^1 - \tilde g_1^2\big\|_{C_1^3[0,2l]} + \big\|k_0^1(t) - k_0^2(t)\big\|_{C[0,2l]}\big].$$

Доказательство теоремы 4 проводится аналогично доказательству теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lorenzi A.* An identification problem related to a nonlinear hyperbolic integro-differential equation // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 1994. V. 22, N 1. P. 21–44; Zbl: 0818.93014
2. *Janno J., Von Wolfersdorf L.* Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity // Math. Meth. Appl. Sci. 1997. V. 20, N 4. P. 291–314.
3. *Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д.* Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 2. С. 72–82.
4. *Дурдиев Д.К., Сафаров Ж.Ш.* Обратная задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной области // Мат. заметки. 2015. Т. 97, № 6. С. 855–867.

5. *Дурдиев Д.К., Рахмонов А.А.* Обратная задача для системы интегро-дифференциальных уравнений SH-волн в вязкоупругой пористой среде: глобальная разрешимость // Теор. и мат. физика. 2018. Т. 195, № 3. С. 491–506.

6. *Durdiev D.K., Totieva Z.D.* The problem of determining the one-dimensional matrix kernel of the system of viscoelasticity equations // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. V. 41, N 17. P. 8019–8032.

7. *Totieva Z.D., Durdiev D.K.* The problem of finding the one-dimensional kernel of the thermoviscoelasticity equation // Math. Notes. 2018. V. 103, N 1–2. P. 118–132.

8. *Safarov Z.S., Durdiev D.K.* Inverse problem for an integro-differential equation of acoustics // Differ. Equa. 2018. V. 54, N 1. P. 134–142.

9. *Durdiev D.K., Totieva Z.D.* The problem of determining the one-dimensional kernel of viscoelasticity equation with a source of explosive type // J. Inverse and Ill-Posed Probl. 2020. V. 28, N 1. P. 43–52.

10. *Safarov J.Sh.* Global solvability of the one-dimensional inverse problem for the integro-differential equation of acoustics // J. Sib. Fed. Univ. Math Phys. 2018. V. 11, N 6. P. 753–763;
DOI: https://doi.org/10.17516/1997-1397-2018-11-6-753-763

11. *Safarov J.Sh.* Inverse problem for an integro-differential equation with distributed initial data // Uzb. Math. J. 2019. N 1. P. 117–124.

12. *Дурдиев У.Д.* Обратная задача для системы уравнений вязкоупругости в однородных анизотропных средах // Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22, № 4(80). С. 26-32;
DOI: 10.33048/sibjim.2019.22.403

13. *Romanov V.G.* Inverse problems for equation with a memory // Euras. J. Math. and Computer Appl. 2014. V. 2, N 4. P. 51–80.

14. *Romanov V.G.* Problem of determining the permittivity in the stationary system of Maxwell equations // Dokl. Math. 2017. V. 95, N 3. P. 230-234; Zbl 1375.35532

15. *Романов В.Г.* Оценки устойчивости решения в задаче об определении ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 1. С. 86–98.

16. *Romanov V.G.* On the determination of the coefficients in the viscoelasticity equations // Siber. Math. J. 2014. V. 55, N 3. P. 503–510.

17. *Романов В.Г.* Задача об определения ядра в уравнении вязкоупругости // Докл. АН. 2012. Т. 446, № 1. С. 18–20.

18. *Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д.* Задача об определении многомерного ядра уравнения вязкоупругости // Владикавказ. мат. журн. 2015. Т. 17, № 4. С. 18–43.

19. *Durdiev D.K.* Some multidimensional inverse problems of memory determination in hyperbolic equations // Журн. мат. физики, анализа, геометрии. 2007. V. 3, № 4. P. 411–423.

20. *Дурдиев Д.К., Рахмонов А.А.* Задача об определении двумерного ядра в системе интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23, № 2. С. 63–80.

21. *Durdiev D.K., Rahmonov A.A.* A 2D kernel determination problem in a visco-elastic porous medium with a weakly horizontally inhomogeneity // Math. Meth. Appl. Sci. 2020. V. 43, N 15. P. 8776–8796.

22. *Teshaev M.K., Safarov I.I., Kuldashov N.U., Ishmamatov M.R., Ruziev T.R.* On the distribution of free waves on the surface of a viscoelastic cylindrical cavity // J. Vibrational Engineering and Technologies. 2020. V. 8, N 4. P. 579–585.

23. *Safarov I., Teshaev M., Toshmatov E., Boltaev Z., Homidov F.* Torsional vibrations of a cylindrical shell in a linear viscoelastic medium // IOP Conf. Ser.: Materials Science and Engineering. 2020. V. 883, N 1. P. 012190.

24. *Teshaev M.K., Safarov I.I., Mirsaidov M.* Oscillations of multilayer viscoelastic composite toroidal pipes // J. Serbian Soc. Computational Mechanics. 2019. V. 13, N 2. P. 104–115.

25. *Dedok V.A., Karchevsky A.L., Romanov V.G.* A numerical method of determining permittivity from the modulus of the electric intensity vector of an electromagnetic field // J. Appl. Industr. Math. 2019. V. 13, N 3. P. 436–446.

26. *Karchevsky A.L.* A frequency-domain analytical solution of Maxwell's equations for layered anisotropic media // Russian Geology and Geophysics. 2007. V. 48, N 8. P. 689–695.

27. *Romanov V.G., Karchevsky A.L.* Determination of permittivity and conductivity of medium in a vicinity of a well having complex profile // Euras. J. Math. Computer Appl. 2018. V. 6, N 4. P. 62–72.

28. *Karchevsky A.L.* A numerical solution to a system of elasticity equations for layered anisotropic media // Russian Geology and Geophysics. 2005. V. 46, N 3. P. 339–351.

29. *Karchevsky A.L.* The direct dynamical problem of seismics for horizontally stratified media // Sib. Electron. Mat. Izv. 2005. N 2. P. 23–61; Zbl: 1125.86004

30. *Karchevsky A.L.* Numerical solution to the one-dimensional inverse problem for an elastic system // Dokl. Earth Sci. 2000. V. 375, N 8. P. 1325–1328; Zbl: 1059.74530

31. *Karchevsky A.L.* Simultaneous reconstruction of permittivity and conductivity // Inverse Ill-Posed Probl. 2009. V. 17, N 4. P. 387–404; Zbl: 1177.35253

32. *Kurpinar E., Karchevsky A.L.* Numerical solution of the inverse problem for the elasticity system for horizontally stratified media // Inverse Problems. 2004. V. 20, N 3. P. 953–976; Zbl: 1062.74025

33. *Karchevsky A.L.* Numerical reconstruction of medium parameters of member of thin anisotropic layers // Inverse III-Posed Probl. 2004. V. 12, N 5. P. 519–534; Zbl: 1080.74035

34. *Durdiev U.D.* Numerical method for determining the dependence of the dielectric permittivity on the frequency in the equation of electrodynamics with memory // Sib. Electron. Mat. Izv. 2020. V. 17. P. 179–189; DOI: 10.33048/semi.2020.17.013

35. *Bozorov Z.R.* Numerical determining a memory function of a horizontally-stratified elastic medium with aftereffect // Euras. J. Math. Computer Appl. 2020. V. 8, N 2. P. 4–16.

36. *Благовещенский А.С., Федоренко Д.А.* Уравнения акустики в слабо горизонтально-неоднородной среде // Записки научн. семинаров ПОМИ. 2008. Т. 354. С. 81–99.

37. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.968.72

2D KERNEL IDENTIFICATION PROBLEM IN VISCOELASTICITY EQUATION WITH A WEAKLY HORIZONTAL HOMOGENEITY

© 2022 D. K. Durdiev[1a], J. Sh. Safarov[1,2b]

[1] *V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, ul. Universitetskaya 4b, Tashkent 100174, Uzbekistan,*
[2] *Tashkent University of Information Technologies, ul. Amira Temura 108, Tashkent 100084, Uzbekistan*

E-mails: [a]durdiev65@mail.ru, [b]j.safarov65@mail.ru

Received 11.08.2021, revised 01.10.2021, accepted 21.10.2021

Abstract. We consider the problem of determining the kernel $k(t,x)$, $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}$, entering the equation of viscoelasticity in a bounded domain with respect to z with weakly horizontal homogeneity. It is assumed that this kernel weakly depends on the variable x and decomposes into a power series by degrees of the small parameter ε. A method for finding unknown functions k_0, k_1 is constructed. The global uniquely solvability and stability theorems are obtained.

Keywords: viscoelasticity equation, inverse problem, delta-function, integral equation, Banach theorem.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.102

REFERENCES

1. Lorenzi A. An identification problem related to a nonlinear hyperbolic integro-differential equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 1994, Vol. 22, No. 1, pp. 21–44; Zbl: 0818.93014
2. Janno J., Von Wolfersdorf L. Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 1997, Vol. 20, No. 4, pp. 291–314.
3. Durdiev D.K., Totieva Zh.D. Zadacha ob opredelenii odnomernogo yadra uravneniya vyazkouprugosti [The problem of determining a one-dimensional kernels of the equation of viscoelasticity]. *Sib. Zhurn. Industr. Matematiki*, 2013, Vol. 16, No. 2, pp. 72–82 (in Russian).
4. Durdiev D.K., Safarov Zh.Sh. Obratnaya zadacha ob opredelenii odnomernogo yadra uravneniya vyazkouprugosti v ogranichennoi oblasti [Inverse Determination Problem the one-dimensional kernel of the viscoelasticity equation in a bounded area]. *Mat. zametki*, 2015, Vol. 97, No. 6, pp. 855–867 (in Russian).
5. Durdiev D.K., Rakhmonov A.A. Obratnaya zadacha dlya sistemy integro-differentsial'nykh uravnenii SH-voln v vyazkouprugoi poristoi srede: global'naya razreshimost'[Inverse problem for the system integro-differential equations of SH-waves in viscoelastic porous environment: global solvability]. *Theor. Math. Physics.*, 2018, Vol. 195, No. 3, pp. 491–506 (in Russian).
6. Durdiev D.K., Totieva Z.D. The problem of determining the one-dimensional matrix kernel of the system of viscoelasticity equations. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2018, Vol. 41, No. 17, pp. 8019–8032.
7. Totieva Z.D., Durdiev D.K. The problem of finding the one-dimensional kernel of the thermoviscoelasticity equation. *Math. Notes*, 2018, Vol. 103, No. 1–2, pp. 118–132.
8. Safarov Z.S., Durdiev D.K. Inverse problem for an integro-differential equation of acoustics. *Differ. Equa.*, 2018, Vol. 54, No. 1, pp. 134–142.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2022, Vol. 16, No. 1.

9. Durdiev D.K., Totieva Z.D. The problem of determining the one-dimensional kernel of viscoelasticity equation with a source of explosive type. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2020, Vol. 28, No. 1, pp. 43–52.
10. Safarov J.Sh. Global solvability of the one-dimensional inverse problem for the integro-differential equation of acoustics. *J. Sib. Fed. Univ. Math Phys.*, 2018, Vol. 11, No. 6, pp. 753–763; DOI: https://doi.org/10.17516/1997-1397-2018-11-6-753-763
11. Safarov J.Sh. Inverse problem for an integro-differential equation with distributed initial data. *Uzb. Math. J.*, 2019, No. 1, pp. 117–124.
12. Durdiev U.D. Obratnaya zadacha dlya sistemy uravnenii vyazkouprugosti v odnorodnykh anizotropnykh sredakh. *Sib. Zhurn. Indust. Matematiki*, 2019, Vol. 22, No. 4(80), pp. 26-32 (in Russian); DOI: 10.33048/sibjim.2019.22.403
13. Romanov V.G. Inverse problems for equation with a memory. *Euras. J. Math. Computer Appl.*, 2014, Vol. 2, No. 4, pp. 51–80.
14. Romanov V.G. Problem of determining the permittivity in the stationary system of Maxwell equations. *Dokl. Math.*, 2017, Vol. 95, No. 3, pp. 230-234; Zbl 1375.35532
15. Romanov V.G. Otsenki ustoichivosti resheniya v zadache ob opredelenii yadra uravneniya vyazkouprugosti [Estimates of the stability of the solution in the problem of determining kernels of the equation of viscoelasticity]. *Sib. Zhurn. Industr. Matematiki*, 2012, Vol. 15, No. 1, pp. 86–98.
16. Romanov V.G. On the determination of the coefficients in the viscoelasticity equations. *Sib. Math. J.*, 2014, Vol. 55, No. 3, pp. 503–510.
17. Romanov V.G. Zadacha ob opredeleniya yadra v uravnenii vyazkouprugosti [The problem of determining the kernel in the equation viscoelasticity]. *Dokl. Akad. Nauk*, 2012, Vol. 446, No. 1, pp. 18–20 (in Russian).
18. Durdiev D.K., Totieva Zh.D. Zadacha ob opredelenii mnogomernogo yadra uravneniya vyazkouprugosti [The problem of defining a multidimensional kernels of the equation of viscoelasticit]. *Vladikavkaz. Mat. Zhurn.*, 2015, Vol. 17, No. 4, pp. 18–43 (in Russian).
19. Durdiev D.K. Some multidimensional inverse problems of memory determination in hyperbolic equations [Some multidimensional inverse problems of memory determination in hyperbolic equations]. *Zhurn. Mat. Fiziki, Analiza, Geometrii*, 2007, Vol. 3, No. 4, pp. 411–423 (in Russian).
20. Durdiev D.K., Rakhmonov A.A. Zadacha ob opredelenii dvumernogo yadra v sisteme integro-differentsial'nykh uravnenii vyazkouprugoi poristoi sredy [The problem of defining a two-dimensional kernel in a system of integro-differential equations of viscoelastic porous medium]. *Sib. Zhurn. Industr. Matematiki*, 2020, Vol. 23, No. 2, pp. 63–80 (in Russian).
21. Durdiev D.K., Rahmonov A.A. A 2D kernel determination problem in a visco-elastic porous medium with a weakly horizontally inhomogeneity. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2020, Vol. 43, No. 15, pp. 8776–8796.
22. Teshaev M.K., Safarov I.I., Kuldashov N.U., Ishmamatov M.R., Ruziev T.R. On the distribution of free waves on the surface of a viscoelastic cylindrical cavity. *J. Vibrational Engineering and Technologies*, 2020, Vol. 8, No. 4, pp. 579–585.
23. Safarov I., Teshaev M., Toshmatov E., Boltaev Z., Homidov F. Torsional vibrations of a cylindrical shell in a linear viscoelastic medium. *IOP Conf. Ser.: Materials Science and Engineering*, 2020, Vol. 883, No. 1, pp. 012190.
24. Teshaev M.K., Safarov I.I., Mirsaidov M. Oscillations of multilayer viscoelastic composite toroidal pipes. *J. Serbian Soc. Computational Mechanics*, 2019, Vol. 13, No. 2, pp. 104–115.
25. Dedok V.A., Karchevsky A.L., Romanov V.G. A numerical method of determining permittivity from the modulus of the electric intensity vector of an electromagnetic field. *J. Appl. Industr. Math.*, 2019, Vol. 13, No. 3, pp. 436–446.
26. Karchevsky A.L. A frequency-domain analytical solution of Maxwell's equations for layered anisotropic media. *Russian Geology and Geophysics*, 2007, Vol. 48, No. 8, pp. 689–695.
27. Romanov V.G., Karchevsky A.L. Determination of permittivity and conductivity of medium in a vicinity of a well having complex profile. *Euras. J. Math. Computer Appl.*, 2018, Vol. 6, No. 4, pp. 62–72.
28. Karchevsky A.L. A numerical solution to a system of elasticity equations for layered anisotropic media. *Russian Geology and Geophysics*, 2005, Vol. 46, No. 3, pp. 339–351.

29. Karchevsky A.L. The direct dynamical problem of seismics for horizontally stratified media. *Sib. Electron. Mat. Izv.*, 2005, No. 2, pp. 23–61; Zbl: 1125.86004

30. Karchevsky A.L. Numerical solution to the one-dimensional inverse problem for an elastic system. Dokl. Earth Sci., 2000, Vol. 375, No. 8, pp. 1325–1328; Zbl: 1059.74530

31. Karchevsky A.L. Simultaneous reconstruction of permittivity and conductivity. *Inverse Ill-Posed Probl.*, 2009, Vol. 17, No. 4, pp. 387–404; Zbl: 1177.35253

32. Kurpinar E., Karchevsky A.L. Numerical solution of the inverse problem for the elasticity system for horizontally stratified media. *Inverse Problems*, 2004, Vol. 20, No. 3, pp. 953–976; Zbl: 1062.74025

33. Karchevsky A.L. Numerical reconstruction of medium parameters of member of thin anisotropic layers. *Inverse III-Posed Probl.*, 2004, Vol. 12, No. 5, pp. 519–534; Zbl: 1080.74035

34. Durdiev U.D. Numerical method for determining the dependence of the dielectric permittivity on the frequency in the equation of electrodynamics with memory. *Sib. Electron. Mat. Izv.*, 2020, Vol. 17, pp. 179–189; DOI: 10.33048/semi.2020.17.013

35. Bozorov Z.R. Numerical determining a memory function of a horizontally-stratified elastic medium with aftereffect. *Euras. J. Math. Computer Appl.*, 2020, Vol. 8, No. 2, pp. 4–16.

36. Blagoveshchenskii A.S., Fedorenko D.A. Uravneniya akustiki v slabo gorizontal'no-neodnorodnoi srede [Acoustics equations in a weakly horizontally inhomogeneous medium]. *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*, 2008, Vol. 354, pp. 81–99.

37. Romanov V.G. Obratnye zadachi matematicheskoi fiziki [Inverse problems of mathematical physics]. Moscow: Nauka, 1984 (in Russian).