Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. В. Кунгурцева, К вопросу о разрешимости краевых задач для квазилинейных уравнений,
Изв. вузов. Матем., 1993, номер 5, 50–55

https://www.mathnet.ru/ivm4417

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.84
19 января 2026 г., 12:06:14

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1993 МАТЕМАТИКА № 5 (372)

УДК 517.929

А.В.КУНГУРЦЕВА

К ВОПРОСУ О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введем следующие обозначения: R^n есть n-мерное евклидово пространство с нормой $|\cdot|$; $\|A\|$ – норма матрицы, согласованная с выбранной нормой в R^n; $L_p^n=L_p^n[a,b]$, $1\leq p<\infty$ – пространство функций $y:[a,b]\to R^n$, компоненты которых суммируемы со степенью p,

$$\|y\|_{L_p^n} = \left\{\int_a^b |y(s)|^p ds\right\}^{1/p};$$

$D_p^n=D_p^n[a,b]$, $1\leq p<\infty$ – пространство таких абсолютно непрерывных функций $x:[a,b]\to R^n$, что $\dot{x}\in L_p^n$, с нормой

$$\|x\|_{D_p^n} = \|\dot{x}\|_{L_p^n} + |x(a)|;$$

$L_\infty^n = L_\infty^n[a,b]$ – пространство измеримых и ограниченных в существенном функций с нормой $\|x\|_{L_\infty^n}=\operatorname{vrai\,sup}_{t\in[a,b]}|x(t)|$.

Рассмотрим уравнение

$$\mathscr{L}x = Fx, \tag{1}$$

где $\mathscr{L}:D_p^n\to L_p^n$ – линейный ограниченный оператор, $F:D_p^n\to L_p^n$ – непрерывный оператор. Под решением уравнения (1) будем понимать вектор-функцию $x\in D_p^n$, удовлетворяющую уравнению (1) при почти всех $t\in[a,b]$.

Предлагаемая работа посвящена признакам разрешимости краевых задач для уравнения (1).

Будем говорить, что выполняется условие а), если для уравнения (1) существует линейный ограниченный вектор-функционал $l_1:D_p^n\to R^n$ такой, что краевая задача

$$\begin{aligned} \mathscr{L}x &= Fx, \\ l_1x &= \alpha \end{aligned} \tag{2}$$

корректно разрешима (однозначно разрешима при любом $\alpha\in R^n$, и ее решение непрерывно по норме пространства D_p^n зависит от α); и условие б), если существуют константы c, $d\geq 0$ и $\gamma<1$ такие, что

$$\|Fx\|_{L_p^n} \leq c+d\|x\|_{D_p^n}^\gamma \quad \forall x\in D_p^n.$$

Будем предполагать, что краевая задача

$$\begin{aligned} \mathscr{L}x &= f, \\ l_1x &= \alpha \end{aligned} \tag{3}$$

однозначно разрешима при любых $\alpha\in R^n$ и $f\in L_p^n$. Пусть $X(t)$ – фундаментальная $(n\times n)$-матрица решений уравнения $\mathscr{L}x=0$ такая, что $l_1X=E$, где E – единичная матрица ([1], с.115). Обо-

значим через $G:L_p^n \to D_p^n$ оператор Грина задачи (3). Как известно ([1], с.49), G имеет интегральное представление

$$(Gf)(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds,$$

$G(t,s)$ называется матрицей Грина задачи (3).

Решение задачи (2) запишем в виде

$$x(t) = X(t)\alpha + g(t,\alpha).$$

Через $\frac{d}{dt}:D_p^n \to L_p^n$ обозначим оператор дифференцирования.

ТЕОРЕМА 1. *Если выполнены условия* а) *и* б), *то*

$$\lim_{|\alpha|\to\infty} \frac{1}{|\alpha|}\|g(\cdot,\alpha)\|_{D_p^n} = 0.$$

Предварительно докажем следующие утверждения.

ЛЕММА 1. *Если выполнены условия* а) *и* б), *то существуют такие положительные константы* u_1, u_2 *и скалярная непрерывная положительная функция* v, *что* $v(\xi)\to 0$ *при* $\xi\to\infty$,

$$|g(a,\alpha)| \leq u_1+u_2|\alpha|^\gamma + v(|\alpha|)\|g'(\cdot,\alpha)\|_{L_p^n},$$

где $g'(t,\alpha)=g'_t(t,\alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$x(t) = X(t)\alpha + \int_a^b G(t,s)(Fx)(s)ds = X(t)\alpha+g(t,\alpha).$$

Отсюда получаем

$$|g(a,\alpha)| \leq \int_a^b |G(a,s)(F(X(\cdot)\alpha + g(\cdot,\alpha)))(s)|ds.$$

Используя неравенство Гёльдера, получим

$$|g(a,\alpha)| \leq \|\|G(a,\cdot)\|\|_{L_q^1}\|F(X(\cdot)\alpha+g(\cdot,\alpha))\|_{L_p^n},$$

где $1/q+1/q=1$.

Применяя условие б), имеем

$$|g(a,\alpha)| \leq \|\|G(a,\cdot)\|\|_{L_q^1}(c+d(\|\dot{X}(\cdot)\alpha\|_{L_p^n}+|X(a)\alpha|+\|g'(\cdot,\alpha)\|_{L_p^n}+|g(a,\alpha)|)^\gamma) \leq$$

$$\leq \|\|G(a,\cdot)\|\|_{L_q^1}(c+d((\|\|\dot{X}(\cdot)\|\|_{L_p^1}+\|X(a)\|)|\alpha|+\|g'(\cdot,\alpha)\|_{L_p^n}+|g(a,\alpha)|)^\gamma),$$

где через $\dot{X}$ обозначена матрица, элементы которой получены дифференцированием соответствующих элементов матрицы X. Обозначим $p_1=\|\|\dot{X}(\cdot)\|\|_{L_p^1}+\|X(a)\|$. Имеем

$$|g(a,\alpha)| \leq \|\|G(a,\cdot)\|\|_{L_q^1}(c+d(p_1|\alpha|+\|g'(\cdot,\alpha)\|_{L_p^n})^\gamma\left(1 + \frac{|g(a,\alpha)|}{p_1|\alpha|+\|g'(\cdot,\alpha)\|_{L_p^n}}\right).$$

Отсюда получаем

$$|g(a,\alpha)| \leq \frac{\|\|G(a,\cdot)\|\|_{L_q^1}(c(p_1|\alpha|+\|g'(\cdot,\alpha)\|_{L_p^n})^{1-\gamma}+d(p_1|\alpha|+\|g'(\cdot,\alpha)\|_{L_p^n}))}{(p_1|\alpha|+\|g'(\cdot,\alpha)\|_{L_p^n})^{1-\gamma}-d\|\|G(a,\cdot)\|\|_{L_q^1}}.$$

В полученном неравенстве знаменатель строго больше нуля при всех $|\alpha|$, бо́льших некоторого положительного числа r. Для таких α, продолжая оценку, получаем

$$|g(a,\alpha)| \leqslant \frac{\|\|G(a,\cdot)\|\|_{L_q^1}(cp_1^{1-\gamma}+(c/p_1^\gamma|\alpha|+1/|\alpha|^{1-\gamma})\|g'(\cdot,\alpha)\|_{L_p^n}+dp_1|\alpha|^\gamma)}{p_1^{1-\gamma}-d\|\|G(a,\cdot)\|\|_{L_q^1}/r^{1-\gamma}}.$$

Обозначим $q_1=p_1^{1-\gamma}-d\|\|G(a,\cdot)\|\|_{L_q^1}/r^{1-\gamma}$. Положим

$$u_1=\|\|G(a,\cdot)\|\|_{L_q^1}cp_1^{1-\gamma}/q_1,\ u_2=\|\|G(a,\cdot)\|\|_{L_q^1}dp_1/q_1,\ v(|\alpha|)=\|\|G(a,\cdot)\|\|_{L_q^1}\left(\frac{c}{p_1^\gamma|\alpha|}+\frac{1}{|\alpha|^{1-\gamma}}\right)\Big/q_1.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Если выполнены условия* а) *и* б), *то*

$$\lim_{|\alpha|\to\infty}\frac{1}{|\alpha|}\|g'(\cdot,\alpha)\|_{L_p^n}=0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$g'(t,\alpha)=\left(\frac{d}{dt}GF(X(\cdot)\alpha+g(\cdot,\alpha))\right)(t).$$

Отсюда, используя условие б) и то, что $\left\|\frac{d}{dt}\right\|_{D_p^n\to L_p^n}\leqslant 1$, получаем

$$\|g'(\cdot,\alpha)\|_{L_p^n}\leqslant\|G\|_{L_p^n\to D_p^n}\|F(X(\cdot)\alpha+g(\cdot,\alpha))\|_{L_p^n}\leqslant$$

$$\leqslant\|G\|_{L_p^n\to D_p^n}(c+d((\|\|\dot X(\cdot)\|\|_{L_p^1}+\|X(a)\|)|\alpha|+\|g'(\cdot,\alpha)\|_{L_p^n}+|g(a,\alpha)|)^\gamma).$$

Применяя лемму 1, имеем

$$\|g'(\cdot,\alpha)\|_{L_p^n}\leqslant\|G\|_{L_p^n\to D_p^n}(c+d((\|\|\dot X(\cdot)\|\|_{L_p^1}+\|X(a)\|)|\alpha|+$$

$$+u_1+u_2|\alpha|^\gamma+(1+v(|\alpha|))\|g'(\cdot,\alpha)\|_{L_p^n})^\gamma).$$

Разделим неравенство на $|\alpha|\neq 0$. Получаем

$$\frac{1}{|\alpha|}\|g'(\cdot,\alpha)\|_{L_p^n}\leqslant\frac{\|G\|_{L_p^n\to D_p^n}(c/|\alpha|+(d/|\alpha|^{1-\gamma})(\|\|\dot X(\cdot)\|\|_{L_p^1}+\|X(a)\|+u_1/|\alpha|+u_2/|\alpha|^{1-\gamma}))}{1-d(1+v(|\alpha|))\Big/((\|\|\dot X(\cdot)\|\|_{L_p^1}+\|X(a)\|)|\alpha|+u_1+u_2|\alpha|^\gamma)^{1-\gamma}}$$

Правая часть неравенства стремится к нулю при $|\alpha|\to\infty$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если выполнены условия а) и б), то

$$\lim_{|\alpha|\to\infty}\frac{|g(a,\alpha)|}{|\alpha|}=0.$$

Доказательство следует из лемм 1 и 2.

Из определения норм в D_p^n, используя лемму 2 и следствие, получаем утверждение теоремы 1.

Для уравнения (1) рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned}\mathscr{L}x&=Fx,\\ l_2x&=\varphi x,\end{aligned}\qquad(4)$$

где $l_2:D_p^n \to R^n$ – линейный ограниченный вектор-функционал, $\varphi:D_p^n \to R^n$ – непрерывный вектор-функционал.

ТЕОРЕМА 2. *Если выполнены условия* а) *и* б), $\det l_2X \neq 0$ *и* $\lim\limits_{\|u\|\to\infty} \frac{|\varphi(u)|}{\|u\|} = 0$, *где* l_2X *есть* $(n\times n)$*-матрица, полученная в результате последовательного применения функционала* l_2 *к столбцам матрицы* X, *то задача* (4) *имеет хотя бы одно решение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $x(t)=X(t)\alpha+g(t,\alpha)$ является решением уравнения (1). Если существует такое α, что

$$l_2(X(\cdot)\alpha+g(\cdot,\alpha)) = \varphi(X(\cdot)\alpha+g(\cdot,\alpha)),$$

то теорема будет доказана. Покажем, что это уравнение имеет решение. Имеем

$$l_2(X(\cdot))\alpha+l_2(g(\cdot,\alpha)) = \varphi(X(\cdot)\alpha+g(\cdot,\alpha)).$$

Так как $\det l_2X \neq 0$, то

$$\alpha = (l_2X)^{-1}(\varphi(X(\cdot)\alpha+g(\cdot,\alpha)) - l_2(g(\cdot,\alpha))) \equiv H(\alpha). \tag{5}$$

В силу непрерывности $g(t,\alpha)$ по α $H(\alpha)$ – непрерывная функция. Если $\lim\limits_{|\alpha|\to\infty} \frac{|H(\alpha)|}{|\alpha|} = 0$, то выполняется принцип неподвижной точки Шаудера ([2], с.627) и уравнение (5) имеет решение. Проверим это условие.

Имеем

$$\lim_{|\alpha|\to\infty} \frac{|H(\alpha)|}{|\alpha|} = \lim_{|\alpha|\to\infty} \frac{\|(l_2X)^{-1}\|\,|\varphi(X(\cdot)\alpha+g(\cdot,\alpha))-l_2(g(\cdot,\alpha))|}{|\alpha|}.$$

В силу теоремы 1

$$\frac{1}{|\alpha|}|l_2(g(\cdot,\alpha))| \leq \frac{1}{|\alpha|}\|l_2\|\|g(\cdot,\alpha)\|_{D_p^n} \to 0$$

при $|\alpha|\to\infty$;

$$\frac{|\varphi(X(\cdot)\alpha+g(\cdot,\alpha))|}{|\alpha|} = \frac{|\varphi(X(\cdot)\alpha+g(\cdot,\alpha))|}{\|X(\cdot)\alpha+g(\cdot,\alpha)\|_{D_p^n}} \frac{\|X(\cdot)\alpha+g(\cdot,\alpha)\|_{D_p^n}}{|\alpha|}.$$

Известно, что $l_1X\alpha=\alpha$. Получаем $|\alpha|\leq\|l_1\|\|X(\cdot)\alpha\|_{D_p^n}$. Имеем

$$\|X(\cdot)\alpha+g(\cdot,\alpha)\|_{D_p^n} \geq \|X(\cdot)\alpha\|_{D_p^n} - \|g(\cdot,\alpha)\|_{D_p^n} \geq \frac{|\alpha|}{\|l_1\|} - \|g(\cdot,\alpha)\|_{D_p^n} \to \infty$$

при $|\alpha|\to\infty$. Таким образом, $\frac{|\varphi(X(\cdot)\alpha+g(\cdot,\alpha))|}{|\alpha|} \to 0$ при $|\alpha|\to\infty$ в силу условия на φ и теоремы 1. Теорема доказана.

Отметим, что при условии полной непрерывности оператора F разрешимость задачи (4) была показана в работе [3].

В случае, когда $\mathcal{L}x\equiv\dot{x}$, $l_1x\equiv x(a)$, $\varphi x\equiv\text{const}$, разрешимость задачи (4) была показана в работе [4].

Положим в уравнении (1) $(Fx)(t)=f(t,(Tx)(t),(S\dot{x})(t))$. Рассмотрим полученное уравнение

$$\mathcal{L}x = f(t,(Tx)(t),(S\dot{x})(t)) \tag{6}$$

в следующих предположениях: $f:[a,b]\times R^n\times R^n \to R^n$ удовлетворяет условию Каратеодори (измерима по переменной t и при почти всех $t\in[a,b]$ непрерывна по совокупности остальных переменных), $T:D_p^n \to L_p^n$, $S:L_p^n \to L_p^n$ – линейные операторы и существуют ограниченные операто-

ры $\widehat{T}: D_p^1 \to L_1^1$ и $\widehat{S}: L_p^1 \to L_1^1$ такие, что $|(Ty)(t)| \leq (\widehat{T}|y|)(t)$, $|(Sz)(t)| \leq (\widehat{S}|z|)(t)$. Пусть существует положительная функция $c_1 \in L_p^1$ и константы $d_1, d_2 > 0$ и $\gamma < 1$ такие, что

$$|f(t,u,v)| \leq c_1(t) + d_1|u|^\gamma + d_2|v|^\gamma \tag{7}$$

для почти всех $t \in [a,b]$ и $\forall u,v$. Это условие является достаточным для непрерывного действия оператора $(Fx)(t) = f(t,(Tx)(t),(S\dot{x})(t))$ из D_p^n в L_p^n ([5], с.91).

Пусть вектор-функционал φ удовлетворяет условию теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть для уравнения* (6) *выполняется условие* а), $\det l_2 X \neq 0$. *Тогда задача*

$$\begin{aligned} \mathscr{L}x &= f(t,(Tx)(t),(S\dot{x})(t)), \\ l_2 x &= \varphi x, \end{aligned} \tag{8}$$

имеет хотя бы одно решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для уравнения (6) выполняется условие б). Используя неравенство (7), получаем

$$\left(\int_a^b |f(t,(Tx)(t),(S\dot{x})(t))|^p dt\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |c_1(t) + d_1|Tx|^\gamma(t) + d_2|S\dot{x}|^\gamma(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

Используя неравенства Минковского и Гёльдера, имеем

$$\|f(\cdot,(Tx)(\cdot),(S\dot{x})(\cdot))\|_{L_p^n} \leq \|c_1\|_{L_p^n} + d_1\|\widehat{T}x\|_{L_1^1}^\gamma + d_2\|\widehat{S}\dot{x}\|_{L_1^1}^\gamma \leq$$

$$\leq \|c_1\|_{L_p^n} + d_1\|\widehat{T}\|^\gamma\|x\|_{D_p^n}^\gamma + d_2\|\widehat{S}\|^\gamma\|\dot{x}\|_{L_p^n}^\gamma \leq \|c\|_{L_p^n} + d_1\|\widehat{T}\|^\gamma\|x\|_{D_p^n}^\gamma + d_2\|\widehat{S}\|^\gamma\|x\|_{D_p^n}^\gamma .$$

Если в условии б) возьмем $c = \|c_1\|_{L_p^n}$ и $d = d_1\|\widehat{T}\|^\gamma + d_2\|\widehat{S}\|^\gamma$, то условия теоремы 2 выполняются. Теорема доказана.

ПРИМЕР. Рассмотрим скалярное функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) - q(t)\dot{x}[t-\tau] - \int_a^t x(s)d_sR_1(t,s) = f\left(t, \int_a^t x(s)d_sR_2(t,s), \dot{x}[t-\tau]\right), \tag{9}$$

где $\dot{x}(\xi) = 0$, если $\xi \in [a-\tau, a)$; $\tau > 0$, скалярные функции q, $R_i(\cdot,s)$, $\operatorname{var} R_i(\cdot,s)$, $i = 1,2$, суммируемы на $[a,b]$, $R_2(t,s) \equiv 0$, если $a \leq s \leq \tau + t$; $q(t) \geq 0$, $R_1(t,s) \not\equiv \text{const}$ и не убывает по s при почти всех $t \in [a,b]$. При этих условиях задача Коши ($l_1 x \equiv x(a)$) для уравнения (9) корректно разрешима [6], т.к. решение этой задачи можно построить методом "шагов". Кроме того, условие относительно $q(t)$ и $R_1(t,s)$ гарантирует для фундаментального решения X уравнения $\dot{x}(t) - q(t)\dot{x}[t-\tau] - \int_a^t x(s)d_sR_1(t,s) = 0$ неравенство $X(a) < X(b)$.

Таким образом, в силу теоремы 3 для уравнения (9) задача с краевым условием $x(a) - x(b) = \varphi x$ имеет решение, если $\lim\limits_{\|x\|_{D_p^n} \to \infty} \dfrac{|\varphi x|}{\|x\|_{D_p^n}} = 0$ и f удовлетворяет условию (7).

В заключение отметим, что разрешимость задачи (8) при $\mathscr{L}x \equiv \dot{x}$, $\varphi x = \text{const}$ и при условии вольтерровости операторов T и S изучена в работе [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.

2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1984. – 752 с.

3. Максимов В.П. *О некоторых нелинейных краевых задачах* // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т.19. – №3. – С.396–414.

4. Максимов В.П. *Об одной оценке в теории нелинейных функционально-дифференциальных уравнений* // Функц.-дифференц. уравнения и краевые задачи матем. физ. – Пермь, 1978. – С.114–116.

5. Мисюркеев И.В. *Введение в нелинейный функциональный анализ.* – Пермь, 1968. – 307 с.

6. Азбелев Н.В. *О нелинейных функционально-дифференциальных уравнениях* // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т.12. – №11. – С.1923–1932.

7. Азбелев Н.В., Максимов В.П. *Априорные оценки решений задачи Коши и разрешимость краевых задач для уравнений с запаздывающим аргументом* // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т.15. – №10. – С.1731–1747.

г. Пермь

Поступила
01.06.1993