А. М. Вершик, Б. Соломяк, Адическая реализация преобразования Морса и продолжение его действия на соленоид,
Зап. научн. сем. ПОМИ, 2008, том 360, 70–90

https://www.mathnet.ru/znsl2159

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 360, 2008 г.

А. М. Вершик, Б. Соломяк

АДИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МОРСА И ПРОДОЛЖЕНИЕ ЕГО ДЕЙСТВИЯ НА СОЛЕНОИД

Памяти А. Н. Лившица

Саше Лившицу (1950–2008) принадлежит одна из важнейших теорем современной динамики, хорошо известная в настоящее время, – теорема о когомологиях гиперболических систем. Он доказал ее, еще будучи студентом. Позже Саша работал над многими другими задачами символической динамики, эргодической теории и комбинаторики. Его глубокие и важные идеи оказали огромное влияние на всех, кто с ним общался (включая второго автора данной работы). Первый автор считает его лучшим из своих учеников.

1. Введение

Динамическая система Морса была введена Морсом и получила широкую известность благодаря Хедлунду и Готшалку. Позднее она изучалась многими авторами (см. [13, 12] и приведенные там ссылки) как простейшая нетривиальная подстановочная система. Более того, исторически она была первым примером подстановочной системы. Система Морса порождается последовательностью Туэ–Морса, которая подробно исследовалась с точки зрения комбинаторики слов и теории сложности (см. [6, 11] и приведенные там ссылки). Новый подход к символической динамике и эргодическим преобразованиям (основанный на понятии адического преобразования), предложенный первым автором в работе [2], можно применить и к подстановочным системам (т.н. стационарные адические преобразования). Эта

Первый автор благодарен Институту математической физики им. Макса Планка (Бонн) и Международному институту математической физики им. Эрвина Шредингера (Вена), где была завершена работа над данной статьей, а также поддержке российских фондов по проектам РФФИ 08-01-000379a и НШ-2460.2008.1. Работа второго автора была частично поддержана NSF, грант DMS-0654408 .

идея была реализована в статье А. Н. Лившица и первого автора [14]. Позже другие авторы развили ее в контексте топологической динамики (см. [9, 8]), но в данной работе мы сосредоточим внимание на сохраняющих меру преобразованиях. Адическая реализация подстановочной динамической системы позволяет рассматривать подстановку не саму по себе, а одновременно с односторонним сдвигом, который связан с каждой подстановкой. Идея, которую первый автор пропагандировал в работе [3], состоит в том, чтобы рассмотреть естественное расширение этого сдвига и соответственно расширить подстановочную систему, с тем чтобы установить фундаментальную связь между теорией подстановок и гиперболической динамикой. В этой статье мы рассматриваем "двустороннее расширение" системы Морса, которое приводит к *морсовскому действию счетной группы* Q_2 (группы рациональных диадических чисел) на группе ее характеров – соленоиде $\widehat{Q}_2$. При этом мы более подробно излагаем результаты статьи [3] и исправляем некоторые содержащиеся в ней неточности. Кроме того, в работе получены несколько новых свойств адической реализации преобразования Морса. Одним из следствий адического подхода является возможность провести явное вычисление, которое показывает, как систему Морса можно получить заменой времени в адическом одометре. Важную роль в наших построениях играет операция дифференцирования диадических последовательностей. Спектральная теория системы Морса, восходящая к работе Какутани [10] (см. также [13, 12] и приведенные там ссылки), при таком подходе также становится более прозрачной, но в данной статье мы ее не рассматриваем.

В §2 мы приводим ряд известных и новых результатов о системе Морса, используя ее адическую реализацию. В частности, более подробно (чем в [3]) обсуждается так называемая "морсовская арифметика". В §3 описано двустороннее продолжение преобразования Морса и его вложение в морсовское действие группы Q_2 на группе $\widehat{Q}_2$, а также сформулированы некоторые открытые проблемы.

Эту статью следует рассматривать как попытку подступиться к общей задаче определения двустороннего продолжения подстановочной системы и соответствующего вложения ее в действие большей группы, исследуя частный случай преобразования Морса. Конечная цель наших построений состоит в том, чтобы продемонстрировать связь между теорией подстановок и теорией гиперболических систем.

2. Определения и адическая реализация системы Морса

2.1. Преобразование Морса как подстановочная система. Рассмотрим алфавит $\{0,1\}$. Подстановка Морса задается формулами $\zeta(0) = 01$, $\zeta(1) = 10$ и продолжается на все слова в алфавите $\{0,1\}$ при помощи конкатенации. Последовательность Туэ–Морса (иногда называемая также последовательностью Пруэ–Туэ–Морса) есть неподвижная точка этого преобразования:

$$u = u_0 u_1 u_2 \ldots = \lim_{n\to\infty} \zeta^n(0) = 0110100110010110\ldots. \tag{1}$$

Эта последовательность обладает многими замечательными свойствами (см., например, [6] и [12, гл. 2 и 5]). Легко видеть, что

$$u[0, 2^{n+1}-1] = u[0, 2^n - 1]\,\overline{u[0, 2^n - 1]} \quad \text{при} \quad n \geqslant 0,$$

где $u[i,j] = u_i \ldots u_j$ и $\overline{w}$ – так называемый “флип” (мы используем этот термин за неимением русского эквивалента) слова w в алфавите $\{0,1\}$, т.е. слово, полученное из w заменами $0 \leftrightarrow 1$. Последовательность u непериодична, но является равномерно рекуррентной и обладает корректно определенными равномерными частотами подслов. Также известно, что u_n равно сумме цифр $(\mathrm{mod}\, 2)$ в двоичном представлении числа n.

Пусть σ – левый сдвиг на пространствах $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ и $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ с топологией произведения. Подстановочную динамическую систему иногда рассматривают на пространстве односторонних последовательностей, а иногда на пространстве двусторонних последовательностей.[1]

“Одностороннее” подстановочное пространство определяется как замыкание орбиты последовательности u относительно сдвига:

$$X_\zeta^+ = \mathrm{clos}\,\{\sigma^n u : n \geqslant 0\}.$$

“Двустороннее” подстановочное пространство определяется как множество X_ζ всех бесконечных в обе стороны последовательностей из $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, каждый блок (подслово) которых встречается в последовательности u. Система (X_ζ^+, σ) есть односторонняя подстановочная динамическая система, а (X_ζ, σ) – двусторонняя подстановочная динамическая система. Преимущество двусторонней системы в том, что

[1] Выше мы использовали термины “односторонний” и “двусторонний” в совершенно ином смысле; см. также ниже.

она, в отличие от односторонней, является гомеоморфизмом. С точки зрения теории меры эти две системы изоморфны; на самом деле, обе они минимальны и строго эргодичны, при этом односторонняя система является п.в. обратимой. Последовательность, состоящая из неотрицательных координат произвольной точки пространства X_ζ, лежит в пространстве X_ζ^+, и все элементы пространства X_ζ^+ за исключением счетного числа могут быть единственным образом продолжены до элементов из X_ζ. Исключениями являются последовательность u, которая может быть продолжена до $u\,.\,u$ и $\overline{u}\,.\,u$, ее "флип" $\overline{u}$, а также их орбиты.

2.2. Адическая реализация. Здесь мы будем использовать общее определение адического преобразования из работ [2] и [14], но сосредоточим внимание только на системе Морса, как это было сделано в [3]. Рассмотрим $\mathbf{Z}_2 \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, компактную аддитивную группу 2-адических чисел, и одометр ("двоичный арифмометр") T, который является адическим преобразованием по определению – это групповой сдвиг на $\mathbf{Z}_2$ (см. ниже). Чтобы получить адическую реализацию преобразования Морса, будем *изменять порядок символов* $0, 1$ *в зависимости от следующего символа.* А именно, рассмотрим лексикографический порядок на $\mathbf{Z}_2$, индуцированный отношениями

$$0 \prec_0 1,\ 1 \prec_1 0$$

следующим образом:

$$\{x_i\} \prec \{y_i\} \Longleftrightarrow \exists\, j : x_i = y_i \text{ при } i > j \text{ и } x_j \prec_z y_j, \text{ где } z = x_{j+1} = y_{j+1}.$$

Этот порядок является частичным; две последовательности сравнимы, если они конфинальны (т.е. совпадают за исключением конечного множества позиций). Множество максимальных элементов относительно этого порядка есть $\mathtt{Max} = \{(01)^\infty, (10)^\infty\}$, а множество минимальных элементов – $\mathtt{Min} = \{(0)^\infty, (1)^\infty\}$.[2] Пусть M – преобразование на $\mathbf{Z}_2$, переводящее каждый элемент в непосредственно следующий за ним относительно порядка $\prec$. Выпишем формулы для действия преобразования M в явном виде. Если $x \notin \mathtt{Max}$, то начало последовательности x имеет вид $(01)^n00$, или $(01)^n1$, или $(10)^n0$, или $(10)^n11$, где

[2]Мы обозначаем бесконечную периодическую последовательность с периодом $(ab\ldots c)$ через $(ab\ldots c)^\infty$.

$n \geqslant 0$. Тогда

$$M((01)^n 00*) = (1^{2n+1}0*), \qquad M((01)^n 1*) = (0^{2n}1*),$$
$$M((10)^n 0*) = (1^{2n}0*), \qquad M((10)^n 11*) = (0^{2n+1}1*). \tag{2}$$

Заметим, что M корректно определено всюду кроме двух максимальных точек, т.е. элементов множества $\mathtt{Max} = \{(01)^\infty, (10)^\infty\}$. Легко видеть, что M непрерывно на множестве $\mathbf{Z}_2 \setminus \mathtt{Max}$. Однако продолжить его на эти точки по непрерывности нельзя: корректно определенных пределов $\lim_{n\to\infty} M((01)^n*)$ и $\lim_{n\to\infty} M((10)^n*)$ не существует, поскольку

$$\lim_{n\to\infty} M((01)^n 00*) = (1)^\infty,$$

но

$$\lim_{n\to\infty} M((01)^n 1*) = (0)^\infty.$$

Аналогичным образом,

$$\lim_{n\to\infty} M((10)^n 0*) = (1)^\infty,$$

но

$$\lim_{n\to\infty} M((10)^n 11*) = (0)^\infty.$$

Так как у нас есть еще две минимальные точки, можно продолжить преобразование M до биекции произвольным образом, полагая

$$M((01)^\infty) = (1)^\infty, \quad M((10)^\infty) = (0)^\infty \tag{3}$$

или наоборот. Но такое продолжение не является непрерывным в этих точках.

Очевидным следствием определения преобразования M является тот факт, что оно коммутирует с “флипами”, т.е.

$$M(\overline{x}) = \overline{M(x)} \ \text{ для любого } x \in \mathbf{Z}_2. \tag{4}$$

Действие преобразования M на множестве $\mathbf{Z}_2 \setminus \mathtt{Max}$ можно описать следующим образом: мы просматриваем последовательность x слева направо до тех пор, пока не встретим два одинаковых символа aa, после чего заменяем начало последовательности на $\overline{a}\dots\overline{a}a$, оставляя второе вхождение символа a и все, что следует за ним, без изменений.

2.3. Связь адической модели с традиционным представлением. Теперь опишем связь между динамическими системами $(\mathbf{Z}_2, M)$ и (X_ζ, σ). Пусть

$$g:\ \mathbf{Z}_2 \to X_\zeta, \quad g(x) = \{(M^{n-1}x)_0\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Мы имеем следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}_2 & \xrightarrow{M} & \mathbf{Z}_2 \\ \big\downarrow{\scriptstyle g} & & \big\downarrow{\scriptstyle g} \\ X_\zeta & \xrightarrow{\sigma} & X_\zeta. \end{array}$$

Из определений очевидно, что эта диаграмма коммутативна. Также нетрудно видеть, что отображение g сюръективно, непрерывно на множестве $\mathbf{Z}_2 \setminus \widetilde{\mathtt{Max}}$ и удовлетворяет соотношению $g(0^\infty) = \overline{u}\,.\,u$. Здесь мы обозначили через $\widetilde{\mathtt{Max}}$ множество точек из $\mathbf{Z}_2$, конфинальных точкам из множества $\mathtt{Max}$ (или, что то же самое, отрицательные полуорбиты обеих точек из $\mathtt{Max}$).

Полезно выписать отображение g^{-1} в явном виде. Рассмотрим подстановочное отображение на X_ζ:

$$\begin{aligned} &\zeta:\ X_\zeta \to X_\zeta, \\ &\zeta(\dots a_{-2}a_{-1}\,.\,a_0a_1\dots) = \dots\zeta(a_{-2})\zeta(a_{-1})\,.\,\zeta(a_0)\zeta(a_1)\dots\,. \end{aligned}$$

Хорошо известно (и легко увидеть), что для любого элемента $\mathbf{a} \in X_\zeta$ существует единственная последовательность $\mathbf{a}' \in X_\zeta$, такая, что либо $\mathbf{a} = \zeta(\mathbf{a}')$, либо $\mathbf{a} = \sigma\zeta(\mathbf{a}')$, причем эти случаи являются взаимоисключающими. Зададим отображение $\Psi:\ X_\zeta \to X_\zeta$ формулой $\Psi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}'$. Тогда мы имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}_2 & \xrightarrow{\sigma} & \mathbf{Z}_2 \\ \big\downarrow{\scriptstyle g} & & \big\downarrow{\scriptstyle g} \\ X_\zeta & \xrightarrow{\Psi} & X_\zeta, \end{array}$$

где σ – левый сдвиг на $\mathbf{Z}_2$. Следовательно, чтобы получить n-й символ последовательности $g^{-1}(\mathbf{a})$, нужно взять $(\Psi^n(\mathbf{a}))_0$ при $n = 0, 1, 2\dots$.

Теперь объясним, почему эта модель богаче, чем “двусторонняя” модель (X_ζ, σ). В адической реализации мы имеем адическое преобразование, изоморфное, если пренебречь двумя орбитами, подстановке, **а также** односторонний сдвиг в пространстве $\mathbf{Z}_2$. Рассматривая эволюцию первой цифры x_0 последовательности $\{x_i\} \in \mathbf{Z}_2$ под действием адического преобразования, мы получаем в точности орбиту последовательности u под действием преобразования σ на X_ζ. Односторонний сдвиг в пространстве $\mathbf{Z}_2$ в терминах теории подстановок есть *собственно подстановка*, т.е. замена в данной последовательности каждого символа 0 на 01, а каждого символа 1 на 10. Поэтому в адической модели мы имеем одновременную реализацию обоих преобразований: сдвига (он перешел в адический сдвиг) и подстановки (она перешла в односторонний сдвиг). Возникает вопрос, как включить в эту картину естественное продолжение одностороннего сдвига – двусторонний сдвиг и, с другой стороны, как продолжить адическое преобразование на все пространство. Мы ответим на эти вопросы в следующем параграфе, но сначала дадим интерпретацию знакомого свойства системы Морса в наших терминах.

2.4. Система Морса как 2-точечное расширение одометра.

Определение 2.1. *Классический* 2*-одометр – это следующее аффинное преобразование T на аддитивной группе $\mathbf{Z}_2$ целых диадических чисел:*

$$Tx = x + 1.$$

Преобразование T сохраняет меру Хаара (= Бернулли, Лебега) на группе $\mathbf{Z}_2$. Хорошо известно, что систему Морса можно представить в виде группового (2-точечного) расширения диадического одометра. Эта точка зрения на систему Морса наиболее популярна в динамике. Адическая реализация преобразования Морса позволяет смотреть на этот факт по-другому; гомоморфизм преобразования Морса на одометр есть в нашей модели композиция преобразования Морса с дифференцированием.

Определим одно важное отображение.

Определение 2.2. *Дифференцирование последовательностей – это отображение $D : \mathbf{Z}_2 \to \mathbf{Z}_2$, задаваемое формулой*

$$D(\{x_n\}_{n=0}^{\infty}) = \{(x_{n+1} - x_n) \bmod 2,\ n = 0, 1, \dots\}.$$

Отображение D есть не что иное, как двулистное накрытие группы $\mathbf{Z}_2$. Ясно, что дифференцирование коммутирует с определенным выше “флипом”: $D(\overline{x}) = \overline{D(x)}$.

Несмотря на всю простоту определения отображения $D : \mathbf{Z}_2 \to \mathbf{Z}_2$, для его описания нет хороших и простых “арифметических” или “аналитических” выражений. Недавно В. И. Арнольд [7], руководствуясь другими соображениями, провел много экспериментов, изучая поведение последовательностей нулей и единиц при итерировании операции дифференцирования. Однако наиболее важным для нас является тот факт, что отображение D переводит преобразование Морса в одометр.

Предложение 2.3. *Имеет место равенство $T \circ D = D \circ M$.*

Этот результат немедленно следует из формул (2). Таким образом, в адической реализации преобразование Морса M является двукратным накрытием одометра в его алгебраической форме. Дадим точное описание эквивалентности между преобразованием Морса и 2-расширением одометра. Зададим отображение F из $\mathbf{Z}_2$ в $\mathbf{Z}_2 \times \{0,1\}$ формулой $F(x) = (Dx, x_0)$. Это отображение является биекцией, и мы имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}_2 & \xrightarrow{\ M\ } & \mathbf{Z}_2 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle F} & & \Big\downarrow{\scriptstyle F} \\ \mathbf{Z}_2 \times \{0,1\} & \xrightarrow{T(\phi)} & \mathbf{Z}_2 \times \{0,1\}. \end{array}$$

Здесь $T(\phi)$ – 2-расширение преобразования T при помощи коцикла ϕ на $\mathbf{Z}_2$, определенного формулой

$$\phi(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \text{ начинается с нечетного числа единиц,} \\ 1, & \text{если } y \text{ начинается с четного числа единиц.} \end{cases} \tag{5}$$

Чтобы это определение работало на максимальных элементах, следует также положить $\phi(1^\infty) = \phi(0^\infty) = 1$. Напомним, что групповое расширение определяется формулой

$$T(\phi)(x, g) = (Tx, \phi(x) + g).$$

Мы имеем

$$M = F^{-1} T(\phi) F,$$

так что преобразование M канонически изоморфно 2-расширению одометра T при помощи коцикла ϕ. Можно отождествить $\mathbf{Z}_2$ с $\mathbf{Z}_2 \times \{0,1\}$, рассматривая вторую компоненту, т.е. элемент множества $\{0,1\}$, как новую цифру последовательности; при этом F становится преобразованием пространства $\mathbf{Z}_2$, и можно рассматривать это расширение как новое преобразование на самой группе $\mathbf{Z}_2$. Другую интерпретацию этого коцикла мы приведем в следующем разделе.

Замечание. Система Морса также может быть реализована как 2-точечное расширение одометра в традиционной подстановочной форме. Интересно, что при этом проекция опять задается отображением дифференцирования. Это следует из того, что для последовательности Туэ–Морса u (см. (1)) производная последовательность $D(u) = 1011101010\ldots$ является неподвижной точкой подстановки $0 \to 11,\ 1 \to 10$ (см. [6, с. 201]), которая порождает сохраняющее меру преобразование, изоморфное 2-одометру.

Обозначим через S отображение $x \to [x/2]$ на $\mathbf{Z}_2$. Это не что иное, как односторонний необратимый сдвиг, или эндоморфизм Бернулли, если представить элементы пространства $\mathbf{Z}_2$ в виде последовательностей нулей и единиц. Легко проверить следующее утверждение.

Предложение 2.4. *Имеют место соотношения*

$$TS = ST^2, \quad MS = SM^2.$$

Заметим, что при двустороннем продолжении 2-одометра T и преобразования Морса M и замене S на двусторонний сдвиг эти соотношения переходят в соотношения (10) и (14), которые и определяют действие группы двоично-рациональных чисел на соленоиде.

2.5. Преобразование Морса как замена времени в одометре, и морсовская арифметика. Так как группа целых рациональных чисел $\mathbb{Z}$ есть плотная инвариантная подгруппа группы целых диадических чисел, мы можем рассматривать преобразование Морса M в адической реализации как отображение целых чисел в себя. Материал этого раздела основан на работе [3, с. 104], но наше изложение более подробно.

Отождествим последовательность $x_0x_1x_2\ldots$ с диадическим разложением числа $\sum_j x_j 2^j$. Следующая таблица содержит несколько первых значений $M(n)$:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
1	3	7	2	5	15	4	6	9	11	31	10	13	8	12	14	...

Данные таблицы легко проверить, используя формулы (2).

Для упрощения проверки введем следующую последовательность:

$$a_r = \begin{cases} \dfrac{2^r - 1}{3}, & \text{если} \quad r \equiv 0 \pmod 2, \\ \dfrac{2^r - 2}{3}, & \text{если} \quad r \equiv 1 \pmod 2. \end{cases} \tag{6}$$

Каждое число $n \in \mathbb{N}$ можно представить единственным образом одним из следующих способов ($r = r(n)$):

$$n = \begin{cases} 2^r\ell + a_{r-1} & \text{(i)}, \\ 2^r\ell + 2^{r-1} + a_r & \text{(ii)}, \end{cases} \tag{7}$$

где $\ell \geqslant 0$ – целое число. Определим отображение $M : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ формулой

$$M(n) = \begin{cases} n + a_{r(n)} & \text{в случае (i)}, \\ n - a_{r(n)} & \text{в случае (ii)}. \end{cases} \tag{8}$$

Хотя эти формулы выглядят несколько загадочно, они легко следуют из (2). На самом деле

$$a_r = \frac{2^r - 1}{3} = (10)^{(r-2)/2}, \quad r \equiv 0 \pmod 2,$$
$$a_r = \frac{2^r - 2}{3} = (01)^{(r-1)/2}, \quad r \equiv 1 \pmod 2.$$

Случай (i) имеет место, когда первая пара вида aa в двоичном представлении числа n есть 00. Тогда M заменяет начальные символы последовательности на единицы, что увеличивает число на $a_{r(n)}$ (заметим, что $a_{r-1} + a_r = 2^{r-1} - 1 = (1)^{r-1}$ независимо от четности числа r). Аналогичным образом, случай (ii) имеет место, когда первая пара вида aa в двоичном представлении числа n есть 11. В этом случае M уменьшает или увеличивает число n на $a_{r(n)}$.

Таким образом, мы независимо описали ограничение адической системы Морса на $\mathbb{N}$; поэтому мы обозначали его тем же символом M. Определим значения M на отрицательных целых числах формулой

$M(-n) = -M(n-1) - 1$. Легко убедиться, что так определенное отображение обладает свойством $M(\overline{x}) = \overline{M(x)}$, где $\overline{n} = -n-1$; последнее равенство следует понимать, отождествляя целые числа с их двоичными разложениями. Таким образом, мы имеем отображение $M : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \setminus \{0, -1\}$. Заметим, что $0 = (0)^\infty$ и $-1 = (1)^\infty$ – это в точности две минимальные точки относительно нашего упорядочения на $\mathbf{Z}_2$. Согласно формулам (3),

$$M(-1/3) \equiv M((10)^\infty) = (0)^\infty \equiv 0$$

и

$$M(-2/3) \equiv M((01)^\infty) = (1)^\infty \equiv -1.$$

2.6. Орбитальная эквивалентность системы Морса и 2-одометра. Орбитой точки $x \in X$ под действием обратимого преобразования S пространства X называется множество $\{S^n x,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Очевидно, что T-орбита произвольной последовательности $x \in \mathbf{Z}_2$, содержащей бесконечно много нулей и единиц, есть множество всех последовательностей, которые совпадают с x начиная с некоторого места. Все последовательности, содержащие конечное число нулей или единиц, составляют одну орбиту (это общая T-орбита последовательностей $(0)^\infty$ и $(1)^\infty$). Опишем орбитальное разбиение преобразования Морса. Это описание вытекает непосредственно из определения (2).

Предложение 2.5. *Если последовательность $x \in \mathbf{Z}_2$ содержит бесконечно много подслов вида* 00 *и бесконечно много подслов вида* 11, *то ее M-орбита есть множество всех последовательностей, которые совпадают с x начиная с некоторого места. Оставшееся счетное множество последовательностей, имеющих конечное число подслов вида* 00 *или* 11, *есть в точности объединение четырех полуорбит преобразования M: двух положительных M-полуорбит – точки $(0)^\infty$ и точки $(1)^\infty$ – и двух отрицательных M-полуорбит – точки $(10)^\infty$ и точки $(01)^\infty$.*

Заметим, что отрицательная M-полуорбита точки $(10)^\infty$ (соответственно, $(01)^\infty$) состоит из последовательностей, которые начиная с некоторого места совпадают с $(10)^\infty$ (соответственно, $(01)^\infty$) и начальное слово которых *четно.*

Следствие 2.6. *Орбитальные разбиения 2-одометра и адической реализации преобразования Морса совпадают* $(\mathrm{mod}\,0)$ *относительно меры Хаара (Лебега) на* $\mathbf{Z}_2$.

Как мы видели, эти разбиения совпадают на дополнении счетного множества. Ниже мы уточним это утверждение.

Используя продолжение преобразования M, задаваемое формулой (3), мы можем сделать дополнительное замечание об этих четырех полуорбитах, которое не будет использоваться в дальнейшем. Заметим, что две положительные M-полуорбиты порождают одну T-орбиту, а каждая отрицательная M-полуорбита является целой T-орбитой. Поэтому в определении (3) мы разрезаем общую T-орбиту последовательностей $(0)^\infty$ и $(1)^\infty$ на две T-полуорбиты и склеиваем T-полуорбиту последовательности (0^∞) с M-полуорбитой последовательности $(10)^\infty$, а T-полуорбиту последовательности (1^∞) – с M-полуорбитой последовательности $(01)^\infty$.

Если $x \in \mathbb{N} \subset \mathbf{Z}_2$, то мы имеем тавтологию

$$M(n) = T^{M(n)-n}(n),$$

где в левой части $M(n)$ есть образ числа n под действием преобразования M, а в правой части $M(n)$ есть натуральное число. Теперь заметим, что по определению (8) действия автоморфизма Морса M на множестве целых чисел

$$M(n) - n = (-1)^{r(n)} \cdot a_{r(n)}.$$

Здесь стоит отметить, что значение $\phi(n)$ коцикла ϕ, введенного в предыдущем разделе, в точности равно $M(n) - n (\operatorname{mod} 2)$, т.е. это значение равно 0 в том и только том случае, когда n и $M(n)$ имеют одинаковую четность.

Положим

$$\theta(n) = (-1)^{r(n)} \cdot a_{r(n)}.$$

Тогда

$$M(n) = T^{\theta(n)} n$$

для каждого рационального целого n. Ясно, что функцию $r(\cdot)$ и, следовательно, функцию $\theta(\cdot)$ можно продолжить с множества положительных целых чисел $\mathbb{N}$ на группу всех целых диадических чисел $\mathbf{Z}_2$, а именно, формула (6) с некоторыми $r \in \mathbb{N}$ и $\ell \in \mathbf{Z}_2$ имеет смысл для любого $x \in \mathbf{Z}_2$, а не только для целых чисел. Поэтому можно рассматривать и бесконечные последовательности x_n. Таким образом, $\theta(\cdot)$ становится функцией на $\mathbf{Z}_2$ с целыми значениями; можно сказать, что это продолжение функции $\theta(\cdot)$ по непрерывности в проконечной топологии.

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.7. *Пусть M – адическая реализация преобразования Морса в пространстве $\mathbf{Z}_2$. Пусть $\widetilde{\mathtt{Max}} \cup \widetilde{\mathtt{Min}}$ – счетное множество, являющееся объединением M-полуорбит четырех точек пространства $\mathbf{Z}_2$:*

$$(0)^\infty, \quad (1)^\infty, \quad (01)^\infty, \quad (10)^\infty.$$

Тогда на M-инвариантном множестве $\mathbf{Z}_2 \diagdown (\widetilde{\mathtt{Max}} \cup \widetilde{\mathtt{Min}})$ одометр T : $Tx = x+1$ и преобразование Морса M имеют одно и то же орбитальное разбиение, и, более того,

$$Mx = T^{\theta(x)}x \quad \text{при} \quad x \in \mathbf{Z}_2 \diagdown (\widetilde{\mathtt{Max}} \cup \widetilde{\mathtt{Min}}),$$

где $\theta(x)$ – определенная выше функция.

Формулу, приведенную в последней теореме, можно рассматривать как независимое определение преобразования Морса в терминах замены времени в одометре.

Теорема Дая утверждает, что произвольный эргодический автоморфизм S изоморфен $(\mathrm{mod}\, 0)$ автоморфизму, являющемуся заменой времени в одометре T (или любом другом наперед заданном эргодическом автоморфизме): $Sx = T^{\theta(x)}(x)$. Однако примеров явной формулы для функции замены времени $\theta(\cdot)$ известно немного. Приведенная выше теорема – как раз такого типа: автоморфизм Морса представляется как замена времени в диадическом одометре. Также известно (см. [1, теорема 3.8]), что если рассматриваемые эргодические автоморфизмы имеют одинаковые орбиты, то целочисленная функция замены времени $\theta(\cdot)$ не может быть интегрируемой, за исключением случаев $T = S$ или $T = S^{-1}$. Легко проверить, что наша функция θ действительно неинтегрируема, поскольку на пространстве $\mathbf{Z}_2$ она имеет ровно две особенности – в точках $(01)^\infty$ $(\equiv -1/3)$ и $(10)^\infty$ $(\equiv -2/3)$, причем мера цилиндра, на котором значение функции θ равно a_r, имеет порядок $C2^{-r}$, а следовательно, особенности – простые полюса и функция в их окрестности эквивалентна $1/t$. Слабость (т.е. близость к интегрируемости) этих особенностей свидетельствует о том, что в некотором смысле автоморфизм Морса очень близок к одометру, т.е. к автоморфизму с дискретным спектром.

Вопрос. Какую группу порождают эти два преобразования пространства $\mathbf{Z}_2$ – одометр T и преобразование Морса M? Является ли эта группа свободной?

3. Продолжение преобразования Морса до действия группы Q_2 на соленоиде

В этом параграфе мы определяем так называемое двустороннее продолжение преобразования Морса, которое действует на группе характеров рациональных диадических чисел. Это развитие результатов работы [3, с. 105], содержащее важные изменения и дополнения.

3.1. Предварительные сведения о диадических группах Q_2, $\widehat{Q}_2$ и др. Рассмотрим точную последовательность

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow Q_2 \longrightarrow Q_2/\mathbb{Z} \longrightarrow 1,$$

где Q_2 – счетная аддитивная группа вещественных рациональных диадических чисел ($r/2^m$, $r \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$), подгруппа $\mathbb{Z} \subset Q_2$ есть группа целых рациональных чисел, а фактор-группа $Q_2/\mathbb{Z}$ есть группа всех корней из единицы порядков 2^n, $n = 0, 1, \ldots$ (подгруппа группы вращений).

Группу Q_2 можно представить в виде индуктивного предела

$$\varinjlim_n \, (\mathbb{Z}, w_n)$$

групп $\mathbb{Z}$, где вложение n-й группы задается формулой

$$w_n(x) = 2x, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Рассмотрим соответствующую двойственную точную последовательность групп характеров указанных групп:

$$1 \longleftarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longleftarrow \widehat{Q}_2 \longleftarrow \mathbf{Z}_2 \longleftarrow 1.$$

Группа характеров группы $Q_2/\mathbb{Z}$ есть в точности аддитивная группа $\mathbf{Z}_2$ целых диадических чисел, которую мы рассматривали в предыдущих параграфах и которая является обратным пределом 2^n-циклических групп:

$$\mathbf{Z}_2 = \varprojlim \, (\mathbb{Z}/2^n, p_n),$$

где отображения $p_n : \mathbb{Z}/2^n \to \mathbb{Z}/2^{n-1}$ задаются формулой $p_n(x) = x \bmod 2^{n-1}$. Группа характеров группы $\mathbb{Z}$ есть группа вращений $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (или единичная окружность).

Наш основной объект – группа $\widehat{Q}_2$ характеров группы Q_2 – есть так называемый 2-*соленоид*. Эта группа может быть представлена в виде обратного предела групп вращений:

$$\widehat{Q}_2 = \varprojlim_n (\mathbb{R}/\mathbb{Z}, v_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots ,$$

где гомоморфизмы $v_n : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ задаются формулой

$$v_n(u) = 2u, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Группа $\mathbf{Z}_2$ есть замкнутая подгруппа группы $\widehat{Q}_2$, состоящая из элементов, которые имеют нулевую проекцию на $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Аддитивная группа Q_2 рациональных диадических чисел естественно вкладывается в $\widehat{Q}_2$ как плотная подгруппа. Эта подгруппа состоит из характеров, которые переводят элементы группы Q_2 в корни из единицы степени 2^n.

Заметим, что аддитивная группа локально компактного поля $\mathbf{Q}_2$ всех 2-адических чисел естественно вкладывается в соленоид $\widehat{Q}_2$ как плотная подгруппа, состоящая из тех элементов, проекция которых под действием отображения $\widehat{Q}_2 \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ есть корень из единицы степени 2^n при некотором n:

$$\mathbf{Q}_2 \subset \widehat{Q}_2.$$

Будучи компактной группой, $\widehat{Q}_2$ обладает нормированной мерой Хаара, которая является произведением мер Хаара на группах $\mathbf{Z}_2$ и $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Группа Q_2 не является прямым произведением групп $\mathbb{Z}$ и $Q_2/\mathbb{Z}$ (имеется нетривиальный 2-коцикл группы $Q_2/\mathbb{Z}$ со значениями в $\mathbb{Z}$ – целая часть суммы). Поэтому и группа $\widehat{Q}_2$ не есть прямое произведение групп характеров – S^1 и $\mathbf{Z}_2$. Но имеется точная последовательность, описывающая группу характеров $\widehat{Q}_2$:

$$1 \to \operatorname{diag}(\Delta) \to S^1 \times \mathbf{Z}_2 \to \widehat{Q}_2 \to 1,$$

где Δ – подгруппа, состоящая из всех корней из единицы степени, не содержащей двоек, а diag – ее естественное диагональное вложение в прямое произведение сомножителей. Подробности см. в [4].

Но нам удобно пользоваться координатами на группе $\widehat{Q}_2$, представляя (неоднозначно) ее элементы парами элементов групп S^1 и $\mathbf{Z}_2$.

Поскольку группу Q_2 рациональных диадических чисел можно представить в виде группы всех конечных в обе стороны двусторонних последовательностей нулей и единиц с обычным двоичным разложением, можно думать, что аналог такого разложения имеет место и для группы $\widehat{Q}_2$. Более того, для параметризации элементов подгруппы $\mathbf{Z}_2$ мы использовали односторонние последовательности с положительными индексами, и эта параметризация согласована с групповой структурой 2-адических чисел. Поэтому есть соблазн рассматривать всю группу $\widehat{Q}_2$ характеров группы Q_2 как компактное пространство всех двусторонних бесконечных $\{0,1\}$-последовательностей $\mathbf{X}=\prod_{-\infty}^{+\infty}\{0,1\}=\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. Но это неверно, поскольку на пространстве $\mathbf{X}$ нет необходимой групповой структуры. Однако можно определить отображение $\pi:\mathbf{X}\to\widehat{Q}_2$, используя обычное диадическое разложение точек единичного интервала $(0,1)$. А именно, пусть $\{x_n\}$, $n\in\mathbb{Z}$, – точка пространства $\mathbf{X}$. Определим пару (y,λ), где $y=(x_0,x_1,\dots)\in\mathbb{Z}_2$ (см. §2), а

$$\lambda=\sum_{n=1}^{\infty}x_{-n}2^{-n}.$$

Обозначим полученное отображение через π:

$$\pi:\prod_{-\infty}^{+\infty}\{0,1\}\longrightarrow\widehat{Q}_2,\quad \pi:\{x_n\}\mapsto(y,\lambda). \tag{9}$$

Отображение π не является изоморфизмом групп и даже изоморфизмом топологических пространств, но тривиальным образом *является* изоморфизмом $(\operatorname{mod}0)$ пространств с мерой, где пространство $\mathbf{X}$ рассматривается с мерой Бернулли $(1/2,1/2)$, а группа $\widehat{Q}_2$ – с мерой Хаара. Таким образом, если проигнорировать групповую структуру на пространстве $\widehat{Q}_2$ и рассматривать это пространство не как соленоид, а как символическое пространство с сохраняющими меру преобразованиями (одометром, преобразованием Морса и др.), то удобно использовать каноническое отображение $\pi:\prod_{-\infty}^{+\infty}\{0,1\}\to\widehat{Q}_2$, которое отождествляет лишь счетное множество пар точек. Грубо говоря, мы можем рассматривать 2-соленоид $\widehat{Q}_2$ как пространство $\mathbf{X}$ всех двусторонних последовательностей нулей и единиц, если произвести некоторые отождествления элементов из отрицательной (левой) части, соответствующие неединственности диадических разложений.

3.2. Некоторые преобразования и дифференцирование на соленоиде. На группе $\widehat{Q}_2$ есть канонический автоморфизм $\widehat{S}$ – умножение на 2. Он сопряжен автоморфизму S^* группы Q_2 – умножению на 1/2. Преобразование $\widehat{S}$ есть гиперболический автоморфизм соленоида; в обычных координатах это просто 2-сдвиг Бернулли и *естественное расширение* в смысле Рохлина [5] одностороннего сдвига S в пространстве $\mathbf{Z}_2$, определенного в §2.

Теперь определим двустороннюю версию 2-одометра. Пусть 1 – единица кольца $\mathbf{Z}_2$ (единица мультипликативной группы). Мы задаем продолжение $\widehat{T}$ одометра T из §2 той же самой формулой

$$\widehat{T}x = x + 1,$$

где x теперь является элементом группы $\widehat{Q}_2$. Полезно иметь в виду, что 1 есть характер группы Q_2, который переводит целые числа $\mathbb{Z} \subset Q_2$ в 1.

Действие преобразования $\widehat{T}$ не меняет вторую (левую) компоненту в разложении $\widehat{Q}_2 = Z_2 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, так что это действительно продолжение преобразования T. Заметим, что $\widehat{T}$ – неэргодическое преобразование пространства $\widehat{Q}_2$, хотя преобразование T эргодично на $\mathbf{Z}_2$. Можно также определить семейство одометр-преобразований

$$T_0 := \widehat{T}, \quad T_i := S^i T_0 S^{-i}, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Ясно, что преобразования T_i и T_j коммутируют, и совместное (по всем $i \in \mathbb{Z}$) действие T_i определяет *действие группы* Q_2 на соленоиде $\widehat{Q}_2$. Действительно, T_i действуют как трансляции, поэтому

$$T_i^2 = T_{i+1}, \quad i \in \mathbb{Z}. \tag{10}$$

Это равенство очевидно при $i = 0$ и, следовательно, при всех i.

Вместе со сдвигом $\widehat{S}$ одометры T_i порождают разрешимую группу (сплетение) $\mathbb{Z} \leftthreetimes \sum_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$; действие этой группы на группе $\widehat{Q}_2$ непрерывно и локально трансверсально в смысле [3].

Определим *дифференцирование* $\widehat{D}$ как преобразование пространства $\mathbf{X}$, которое продолжает отображение D на пространство двусторонних последовательностей:

$$\widehat{D}(\{x_n\}_{-\infty}^{+\infty}) = \{(x_n - x_{n+1}) \pmod 2\}.$$

Разумеется, можно определить дифференцирование на соленоиде $\widehat{Q}_2$ формулой $\widetilde{D} = \pi \circ \widehat{D} \circ \pi^{-1}$, правая часть которой корректно определена почти всюду. Заметим, что преобразование $\widehat{D}$ отождествляет двустороннюю последовательность $\tilde{x}$ с ее "флипом" $\overline{\tilde{x}}$, и, следовательно, почти всюду на $\widehat{Q}_2$ мы имеем

$$\widetilde{D}(y,\lambda) = \widetilde{D}(z,\gamma) \iff (y,\lambda) = (z,\gamma) \text{ или } (y,\lambda) = (\overline{z}, 1-\gamma).$$

Как упоминалось выше, точную формулу для $\widetilde{D}$ в терминах характеров выписать трудно.

3.3. Продолжение преобразования Морса. Теперь мы хотели бы продолжить преобразование Морса M с подгруппы $\mathbf{Z}_2$ на всю группу $\widehat{Q}_2$ и пространство $\mathbf{X}$.

Мы хотим, чтобы преобразование $\widehat{M}$ обладало следующими свойствами. Во-первых, оно должно быть 2-расширением продолженного одометра $\widehat{T}$, а именно, удовлетворять соотношению, обобщающему предложение 2.1:

$$\widehat{T} \circ \widehat{D} = \widehat{D} \circ \widehat{M}. \tag{11}$$

Во-вторых, оно должно быть продолжением преобразования M:

$$\widehat{M}|_{\mathbf{Z}_2} = M.$$

Теорема 3.1. *Существует единственное преобразование пространства* $\mathbf{X}$, *удовлетворяющее последним двум равенствам. Оно задает сохраняющее меру преобразование* $\widetilde{M}$ *на группе* $\widehat{Q}_2$ *по формуле* $\widetilde{M} = \pi \circ \widehat{M} \circ \pi^{-1}$, *где* π *задается равенством* (9).

Доказательство. Единственность искомого преобразования очевидна, а существование можно доказать следующим образом. Каждую последовательность из пространства $\mathbf{X}$ можно разбить на положительную и отрицательную части: для $\hat{x} = (\dots x_{-1}, x_0, x_1 \dots)$ обозначим $x_- = (\dots x_{-2}, x_{-1})$ и $x_+ = (x_0, x_1 \dots)$. Положим

$$\widehat{M}(\hat{x}) \equiv \widehat{M}((x_-, x_+)) = \begin{cases} (x_-, M(x_+)), & \text{если } \phi(x_+) = 0, \\ (\overline{x_-}, M(x_+)), & \text{если } \phi(x)_+ = 1, \end{cases} \tag{12}$$

где ϕ – коцикл, определенный формулой (5). Отсюда немедленно следует равенство (11).

Мы получаем явную формулу для действия преобразования Морса на соленоиде $\widehat{Q}_2$:

$$\widetilde{M}(y,\lambda) = (My,\lambda), \qquad \text{если} \quad \phi(y) = 0,$$
$$\widetilde{M}(y,\lambda) = (Ma,1-\lambda), \qquad \text{если} \quad \phi(y) = -1.$$

(Здесь используются координаты (y,λ), введенные ранее.) □

Заметим, что преобразование $\widehat{M}$ не является “локальным”, в том смысле, что, если коцикл не обращается в нуль, оно меняет отрицательные координаты последовательности.

Преобразование $\widehat{M}$ непрерывно на множестве $\{x \in \widehat{Q}_2 : \, x_+ \notin \widetilde{\mathtt{Max}}\}$, которое является множеством полной меры (Хаара).

Обозначим $\widehat{M} = M_0$ и положим $M_i = S^i M_0 S^{-i}$. Очевидно, что

$$T_i \circ \widehat{D} = \widehat{D} \circ M_i, \tag{13}$$

так как $\widehat{D}$ коммутирует с S.

Теорема 3.2. *Группа преобразований, порожденная преобразованиями M_i, $i \in \mathbb{Z}$, алгебраически изоморфна группе Q_2:*

$$M_{i+1} = M_i^2, \quad i \in \mathbb{Z}. \tag{14}$$

Таким образом, мы получаем новое (морсовское) действие группы Q_2 на $\widehat{Q}_2$. При любом i преобразование M_i есть 2-точечное расширение преобразования T_i.

Доказательство. Нам нужно проверить только соотношение (14); все остальные утверждения немедленно из него следуют. Используя формулы $S\widehat{D} = \widehat{D}S$ и $T_{i+1} = T_i^2$, мы получаем, что $\widehat{D}M_{i+1} = \widehat{D}M_i^2$. Остается заметить, что последовательности $M_{i+1}(\hat{x})$ и $M_i^2(\hat{x})$ конфинальны (совпадают на позициях, расположенных достаточно далеко вправо) при всех $x \notin \widetilde{\mathtt{Max}}$. □

Мы определили два канонических сохраняющих меру действия разрешимой группы $\mathbb{Z} \leftthreetimes Q_2$ на $\widehat{Q}_2$. Первое из них порождается одометром (это алгебраическое действие), а второе – действием Морса. Напомним, что действие Морса непрерывно только почти всюду.

Вопросы.

1. Найти коцикл, который задает действие Морса как 2-расширение алгебраического действия аналогично формуле (5).

2. Найти формулу, аналогичную формуле из теоремы 2.7, которая выражает действие Морса на соленоиде в виде замены времени в алгебраическом действии.

3. Как можно охарактеризовать оба действия группы $\mathbb{Z} \leftthreetimes Q_2$ внутренним образом?

Литература

1. Р. М. Белинская, *Разбиения пространства Лебега на траектории, определяемые эргодическими автоморфизмами.* — Функц. анал. и его прил. **2** (1968), вып. 3, 4–16.
2. А. М. Вершик, *Равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения.* — ДАН СССР **259** (1981), вып. 3, 526–529.
3. А. М. Вершик, *Локально трансверсальная символическая динамика.* — Алгебра и анализ **6** (1994), вып. 3, 94–106.
4. И. М. Гельфанд, М. И. Граев, И. И. Пятецкий-Шапиро, *Теория представлений и автоморфные функции.* М., Наука, 1966.
5. В. А. Рохлин, *Точные эндоморфизмы пространства Лебега.* — Изв. АН СССР. Сер. матем. **25** (1961), вып. 4, 499–530.
6. J.-P. Allouche, J. Shallit, *Automatic Sequences. Theory, Applications, Generalizations.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
7. V. I. Arnold, *Complexity of finite sequences of zeros and ones and geometry of finite spaces of functions.* — Funct. Anal. Other Math. **1** (2006), No. 1, 1–15.
8. F. Durand, B. Host, C. Skau, *Substitutional dynamical systems, Bratteli diagrams and dimension groups.* — Ergodic Theory Dynam. Syst. **19** (1999), 953–993.
9. A. Forrest, *K-groups associated with substitution minimal systems.* — Israel J. Math. **98** (1997), 101–139.
10. S. Kakutani, *Ergodic theory on shift transformations.* — In: Proceedings of the 5th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. II, Univ. California Press, Berkeley, 1967, pp. 405–414.
11. Y. Moshe, *On the subword complexity of Thue–Morse polynomial extractions.* — Theoret. Comput. Sci. **389** (2007), No. 1–2, 318–329.
12. N. Pytheas Fogg, *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics.* Lect. Notes Math. **1794**, Springer-Verlag, Berlin (2002).
13. M. Queffelec, *Substitution Dynamical Systems – Spectral Analysis.* Lect. Notes Math. **1294**, Springer-Verlag, Berlin (1987).
14. A. M. Vershik, A. N. Livshits, *Adic models of ergodic transformations, spectral theory, and related topics.* — Adv. Sov. Math. **9** (1992), 185–204.

Vershik A. M., Solomyak B. The adic realization of the Morse transformation and the extension of its action to the solenoid.

We consider the adic realization of the Morse transformation on the additive group of integer dyadic numbers. We discuss the arithmetic properties of this action. Then we extend this action to an action of the group of rational dyadic numbers on the solenoid.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: vershik@pdmi.ras.ru

Поступило 21 ноября 2008 г.

Department of Mathematics,
University of Washington, Seattle, USA

E-mail: solomyak@math.washington.edu