Е. И. Тимошенко, О сохранении элементарной и универсальной эквивалентности при сплетении, *Алгебра и логика*, 1968, том 7, номер 4, 114–119

Алгебра и логика, 7, № 4 (1968), 114–119.

УДК 519.45

О СОХРАНЕНИИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ И УНИВЕРСАЛЬНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПРИ СПЛЕТЕНИИ

Е.И.ТИМОШЕНКО

Две группы G и G' называются элементарно эквивалентными, если из истинности любой замкнутой формулы групповой сигнатуры на одной группе следует истинность этой формулы на другой группе. Если же всякая замкнутая формула групповой сигнатуры, не содержащая кванторов существования, истинна на G тогда и только тогда, когда она истинна на G', то группы G и G' называются универсально эквивалентными. Естественно возникает вопрос о сохранении элементарной эквивалентности при применении групповых операций. Хорошо известно, например, что элементарная эквивалетность сохраняется при прямом и декартовом умножении групп. Аналогичный вопрос для свободного произведения групп остается открытым. Вопрос о сохранении элементарной эквивалентности для операции сплетения групп был поставлен М.И.Каргаполовым в [1]. В предлагаемой заметке дается отрицательный ответ на этот вопрос. Точнее, мы построим группы A, B, A', B' такие, что A элементарно эквивалентна A', B элементарно эквивалентна B', но дискретное сплетение A и B не эквивалентно дискретному сплетению A' и B'.

Пусть A, B - аддитивные группы, G - их дискретное сплетение. Это означает, что для каждого элемента $b\in B$ задан изоморфизм $a\to a^{(b)}$ группы A на её изоморфную копию $A^{(b)}$ и $G=\bar{A}\cdot B$, где $\bar{A}=\prod_{b\in B} A^{(b)}$, $b a^{(b_1)} b^{-1} = a^{(b_1+b)}$ для всех $a\in A$, $b, b_1\in B$. Носителем элемента $f\in\bar{A}$ называется множество $\sigma(f)$ таких $b\in B$, для которых b-я компонента f, обозначаемая $f(b)$, не равна 0. Пусть G_p - дискретное сплетение бесконечной циклической группы A и прямой суммы B_p трех циклических групп простого порядка p. Группу A считаем аддитивной груп -

пой целых чисел, а элементы группы B_p будем обозначать тройками (n,m,s) целых чисел, рассматриваемых по модулю p.

ЛЕММА. Существует элемент g_0 принадлежащий коммутанту группы G_p, который не записывается в виде

$$[f,(n,m,s)]+[g,(n',m',0)]$$

ни при каких $f, g\in \bar{A}$ и $(n,m,s),(n',m',0)\in B_p$. Здесь как обычно, $[a,b]$ обозначает коммутатор $aba^{-1}b^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим элемент g_0 следующим образом: $g_0(0,0,0)=6$, $g_0(0,0,1)=-3$, $g_0(0,1,0)=-2$, $g_0(1,0,0)=-1$ и $g(b)=0$ для остальных $b\in B$. Из следствия 4.5 работы [2] легко видеть, что элемент g_0 принадлежит коммутанту группы G_p.

Заметим сначала, что элемент g_0 не записывается в виде

$$[f,(n,m,p)]+[g,(n',m',0)].$$

Действительно, в противном случае было бы

$$\sum_{i,j=0}^{p-1} g_0(i,j,0)=\sum_{i,j=0}^{p-1}\{[f,(n,m,0)]+[g,(n',m',0)]\}(i,j,0) \qquad (1)$$

Здесь левая часть равна 3, как видно из определения элемента g_0. Легко проверить, что

$$\sum_{i,j=0}^{p-1}[f,(n,m,0)](i,j,0)=\sum_{i,j,k=0}^{p-1}[f',(n,m,0)](i,j,k), \qquad (2)$$

где элемент f' из A определен следующим образом: $f'(i,j,0)=f(i,j,0)$, $f'(i,j,k)=0$ при $0\leqslant i,j\leqslant p-1, 1\leqslant k\leqslant p-1$. По следствию 4.5 из [2] правая часть (2) равна нулю. Поэтому нулю равна и правая часть (1). Значит, элемент g_0 не записывается в виде, указанном в лемме при $s=0$.

Пусть теперь $s\neq 0$. Для сокращения записи введем обозначение

$$f(i_1,j_1,k_1)-f(i_2,j_2,k_2)=F\begin{pmatrix} i_1 & j_1 & k_1\\ i_2 & j_2 & k_2\end{pmatrix},$$

$$g(i_1,j_1,k_1)-g(i_2,j_2,k_2)=F'\begin{pmatrix} i_1 & j_1 & k_1\\ i_2 & j_2 & k_2\end{pmatrix}$$

и рассмотрим следующие суммы:

$$\sum_{\ell=0}^{p-1} F\begin{pmatrix} -kn'-\ell n, & -km'-\ell m, & -\ell s\\ -kn'-(\ell+1)n, & -km'-(\ell+1)m, & -(\ell+1)s\end{pmatrix} \qquad (3)$$

и

$$\sum_{\ell=0}^{p-1} F'\begin{pmatrix} -kn-\ell n', & -km-\ell m', & -ks\\ -kn-(\ell+1)n', & -km-(\ell+1)m', & -ks\end{pmatrix},\quad 0\leqslant k\leqslant p-1. \qquad (4)$$

Заметим, что $F\begin{pmatrix} i & ; & j & , & k \\ i-n & ; & j-m, & k-s \end{pmatrix} + F\begin{pmatrix} i, & j & k \\ i-n', & j-m', & k \end{pmatrix}$ равно $q_0(i,j,k)$, если только элемент q_0 записывается в виде суммы двух коммутаторов, указанных в лемме. Очевидно, суммы (3) и (4) равны нулю, поэтому

$$\sum_{k,\ell=0}^{p-1} q_0(-kn-\ell n', -km-\ell m', -ks)=0 .$$

Но, с другой стороны, последняя сумма не меньше 1. В самом деле, элемент $(n', m', 0)$ группы B_p не равен 0 – в противном случае сумма $\sum_{k=0}^{p-1} F\begin{pmatrix} -kn & , -km & , -ks \\ -(k+1)n, & -(k+1)m, & -(k+1)s \end{pmatrix}$ была бы равна, с одной стороны, нулю, а с другой – сумме $\sum_{k=0}^{p-1} q_0(-kn, -km, -ks)$, которая не меньше 3, так как $s\neq 0$. Итак, $(n', m', 0)\neq 0$ и, значит, система сравнений

$$\begin{aligned} -kn-\ell n' &\equiv 0, \\ -km-\ell m' &\equiv 0, \\ -ks &\equiv 0 \end{aligned}$$

по модулю p имеет единственное нулевое решение $\ell\equiv k\equiv 0$. Поэтому каждая из трех систем

$$\begin{aligned} -kn-\ell n' &\equiv \varepsilon_1, \\ -km-\ell m' &\equiv \varepsilon_2, \\ -ks &\equiv \varepsilon_3 , \end{aligned}$$

где $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)=(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ имеет не более чем одно решение. Кроме того, из этих трёх систем одновременно совместны не более двух. Отсюда и из определения элемента q_0 получаем, что

$$\sum_{k,\ell=0}^{p-1} q_0(-kn-\ell n', -km-\ell m', -ks)\geqslant 1.$$

Это противоречие доказывает лемму.

Пусть G – полупрямое произведение абелевых групп A , B с нормальной подгруппой A . В дальнейшем нам понадобятся следующие легко проверяемые соотношения в группе G . Для любых $a\in A$, $b\in B$ и любого целого m существует элемент $a'\in A$ такой, что

$$[a, b^m]=[a', b] . \tag{5}$$

Для любых $a_1, a_2\in A, b_1, b_2\in B$ выполняются равенства:

$$[a_1, b_1][a_2, b_2]=[a_1a_2, b_1][a_2^{b_1}, b_2 b_1^{-1}] , \tag{6}$$

$$[a_1b_1, a_2 b_2]=[a_1, b_2][a_2^{-1}, b_1]. \tag{7}$$

С помощью формул (5), (6), (7) получается такое

СЛЕДСТВИЕ. Пусть G - дискретное сплетение бесконечной циклической группы A и прямой суммы B n бесконечных циклических групп. Тогда каждый элемент коммутанта группы G записывается как сумма не более $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ коммутаторов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (7) каждый коммутатор из группы G записывается в виде суммы двух коммутаторов вида $[f,b]$, $f\in \bar{A}$, $b\in B$. Но из (5), (6) следует, что $[f,b]=\sum_{i=1}^{n}[f_i,b_i]$, где $f_i\in A$, b_i - образующий элемент i -го прямого слагаемого группы B . Отсюда, после нетрудного подсчёта, и вытекает утверждение следствия. Отметим, что следствие остается верным - почти с тем же доказательством - если циклические слагаемые группы B заменить на локально циклические.

ТЕОРЕМА 1. Из элементарной эквивалентности групп A и B соответственно группам A' и B' не следует элементарная эквивалентность сплетения G групп A и B сплетению G' групп A' и B'.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве примера возьмем за A,A',B бесконечные циклические группы, и пусть B' - прямая сумма бесконечной циклической группы и двух изоморфных копий аддитивной группы рациональных чисел. На основании критерия об элементарной эквивалентности абелевых групп легко видеть, что B и B' элементарно эквивалентны. Применяя следствие, получаем, что каждый элемент коммутатнта группы G есть коммутатор, т.е. в группе G истинна формула :

$$\forall x_1 x_2 x_3 x_4\ \exists x_5 x_6\ ([x_1,x_2][x_3,x_4]=[x_5,x_6]).$$

С другой стороны, в группе G' можно найти элемент g_0' из коммутанта, который не есть коммутатор. Именно, пусть

$$g_0'(0,0,0)=6,\ g_0'(0,0,1)=-3,\ g_0(0,1,0)=-2,\ g_0(1,0,0)=-1$$

и $g_0'(b')=0$ для остальных $b'\in B$. (Элементы B' есть тройки (r_1,r_2,n), где r_1,r_2 - рациональные числа, n - целое число). По следствию 4.5 из [2] g_0' принадлежит коммутанту группы G' . Предположим, что g_0' есть коммутатор, т.е.

$$g_0' = [f, (r_1, r_2, n)] + [q, (q_1, q_2, m)],$$

где $f, q \in \bar{A}'$, $(r_1, r_2, n), (q_1, q_2, m) \in B'$. С помощью формул (5), (6) перепишем элемент g_0' в виде:

$$g_0' = [f', (r_1', r_2', 0)] + [q', (q_1', q_2', m')],$$

где $f', q' \in \bar{A}'$, $(r_1', r_2', 0)$, $(q_1', q_2', m') \in B'$.

Рассмотрим конечное множество

$$б(f') \cup б(q') \cup б(g_0) \cup \{(r_1', r_2', 0), (q_1', q_2', m')\}$$

троек рациональных чисел. Пусть R - общий знаменатель этих чисел. Рассмотрим элемент $\bar{g}_0$ из сплетения $\bar{G}$ бесконечной циклической группы C и прямой суммы $\bar{B}$ трех бесконечных циклических групп, задаваемый условиями:

$$\bar{g}_0(0,0,0)=6,\ \bar{g}_0(0,0,R)=-3,\ \bar{g}_0(0,R,0)=-2,\ \bar{g}_0(R,0,0)=-1$$
$$\bar{g}_0(\bar{b}) = 0 \quad \text{для остальных } \bar{b} \in \bar{B}.$$

Легко заметить, что элемент $\bar{g}_0$ можно записать в виде:

$$\bar{g}_0 = [\bar{f}, (k, l, s)] + [\bar{q}, (k', l', 0)],$$

где $\bar{f}, \bar{q} \in \bar{C}$, $(k, l, s), (k', l', 0) \in \bar{B}$.

Отобразим гомоморфно $\bar{B}$ на прямую сумму трех циклических групп простого порядка p, где p удовлетворяет условию $R \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, p)$. Продолжая естественным образом этот гомоморфизм до гомоморфизма φ группы $\bar{G}$ на группу G_p, получаем, что $\bar{g}_0\varphi = g_0 \in G_p$. Это дает противоречие с леммой. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Если группа A универсально эквивалентна группе A', а группа B универсально эквивалентна группе B', то дискретное сплетение G групп A и B универсально эквивалентно дискретному сплетению G' групп A' и B'.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что для универсальной эквивалентности двух групп необходимо и достаточно, чтобы каждая конечная подмодель первой группы имела изоморфную подмодель в другой группе, и наоборот.

Пусть $M = \{g_1, \ldots, g_n\}$ - произвольная конечная подмодель группы G'. Используя мультипликативную запись, каждый элемент $g_i \in M$ можно записать в виде $g_i = a_i b_{ii}$, где $a_i \in \bar{A}$, $b_{ii} \in B$. Пусть, далее,

$$\bigcup_{i=1}^{n} b(a_i) = \{b_1, \ldots, b_s\}.$$

Конечной подмодели $\{b_1,\ldots,b_s, b_{11},\ldots, b_{nn}\}$ группы G' можно поставить в соответствие изоморфную подмодель $\{b'_1,\ldots,b'_s, b'_{11},\ldots, b'_{nn}\}$ группы G', причём элементу b_j будет поставлен в соответствие элемент b'_j ,а элементу b_{ii} элемент b'_{ii} . Рассмотрим теперь конечную подмодель

$$\{a_i(b_j)\} \quad (i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,s)$$

группы A и найдем изоморфную ей подмодель $\{(a_i(b_j))'\}$ в группе A'. Легко проверяется, что отображение $\varphi: g_i \to g'_i = a'_i b'_{ii}$ будет изоморфизмом подмодели M на подмодель $M' = \{g'_1,\ldots,g'_n\}$, если положить

$$a'_i(b'_j) = \begin{cases} (a_i(b_j))' & \text{при } 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant s, \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Теорема доказана.

Автор благодарит М.И.Каргаполова за постановку задачи и ценные советы.

Поступила в редакцию

17. У. 1968 г.

Л и т е р а т у р а

1. Коуровская тетрадь, Нерешенные задачи теории групп, 2-е издание, Новосибирск, 1967.

2. **P.M.NEUMANN. On the structure of standard wreath products of groups, Math. Z, 84, № 4 (1964), 343-373.**