ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ АЛЬФОРСА

Н.А.Широков

Принцип длины и площади Альфорса ([I], стр.27) допускает следующую формулировку:

Пусть Δ – область комплексной плоскости, f – аналитическая в Δ функция, ℓ_R – ее линия уровня $\{z\in\Delta: |f(z)|=R\}$, $E\in\Delta$ – множество плоской меры Лебега $A(E)$, меньшей бесконечности, $E_R = E\cap\ell_R$, $|E_R|$ – линейная мера Лебега множества E_R на кривой ℓ_R, $n(w)$ – количество корней уравнения $f(z)=w$, лежащих в E; $p_E(R)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(Re^{i\theta})\,d\theta$. Тогда

$$\int_0^\infty \frac{|E_R|^2}{Rp_E(R)}\,dR \leqslant 2\pi A(E). \tag{A}$$

Заметим, что $2\pi R p_E(R)$ есть линейная мера множества $T_R=f(E_R)$ на римановой поверхности $\mathfrak{D}$, на которую функция f отображает Δ, и потому неравенство (A) можно переписать в виде

$$\int_0^\infty \frac{|E_R|^2}{|T_R|}\,dR \leqslant A(E). \tag{B}$$

Настоящая заметка посвящена распространению принципа длины и площади Альфорса в форме (B) на тот случай, когда $\sigma+1$ -мера Хаусдорфа множества E меньше бесконечности, $0\leqslant\sigma\leqslant 1$. Если $\sigma=1$, получается (B) с правой частью $2A(E)$ вместо $A(E)$.

Везде в дальнейшем буквы K, $\mathcal{K}$ с индексами означают некоторые круги, $K_\delta(z)$ – круг $\{\zeta: |\zeta-z|<\delta\}$.

Определение I. Пусть f – неотрицательная функция на промежутке (a,b), $E_a(f)=\{x\in(a,b): f(x)>a\}$, $m^*(a)=mes^*E_a$, где mes^* – верхняя мера Лебега. Положим (см.[2])

$$\int_a^{b*} f\,dy \overset{def}{=} \int_0^\infty m^*(a)\,da. \tag{I}$$

Напомним свойства $\int^*$ (полагаем, что все функции в последующих формулировках (2) – (5) неотрицательны):

$$\int_a^{b*} f\,dy = \int_a^b f\,dy, \tag{2}$$

если $f<q$, то

$$\int_a^{b*} f\,dy \leq \int_a^{b*} g\,dy, \tag{3}$$

если $f(x)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x)$, то

$$\int_a^{b*} f(x)dx \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_a^{b*} f_n(x)\,dx, \tag{4}$$

в частности,

$$\int_a^{b*} (\sum f_j)\,dy \leq \sum_j \int_a^{b*} f_j\,dy. \tag{5}$$

Если $(a,b)=\bigcup_k (a_k,b_k)\cup S$, $\quad mes\,S=0$, то

$$\int_a^{b*} f\,dx = \sum \int_{a_k}^{b_k} f\,dx. \tag{6}$$

Определение 2. (i) Пусть Δ – область комплексной плоскости C) f – аналитическая в Δ функция, $\mathcal{D}=f(\Delta)$ – ее риманова поверхность. Если $\mathcal{E}\in\mathcal{D}$ – множество, проекция которого лежит на окружности, не проходящей через точки ветвления $\mathcal{D}$, то полагаем

$$\Lambda_\sigma(\mathcal{E})=\sum_k \Lambda_\sigma(p\,\mathcal{E}_k),$$

где $\mathcal{E}_k$ – все части множества $\mathcal{E}$, лежащие каждое на одном листе $\mathcal{D}$, $p\,\mathcal{E}_k$ – проекция множества $\mathcal{E}_k$ на плоскость, $\Lambda_\sigma(E)$, где $E\subset C$, – мера Хаусдорфа порядка σ, $0<\sigma\leq 1$.

(ii) Если $2\geq\sigma>1$, $\mathcal{E}=\overline{\mathcal{E}}\subset\mathcal{D}$, то разобьем некоторую конечнолистную часть $\mathcal{D}$, содержащую $\mathcal{E}$, гладкими кривыми на части $\mathcal{D}_k$, которые однозначно проектируются в области $p\,\mathcal{D}_k$, $\mathcal{E}_k=\mathcal{D}_k\cap\mathcal{E}$ и снова полагаем

$$\Lambda_\sigma(\mathcal{E})=\sum_k \Lambda_\sigma(p\,\mathcal{E}_k).$$

Это определение не зависит от способа разбиения, поскольку $\sigma>1$ [3].

Теорема. Пусть, при использовании обозначений определения 2, $E\subset\Delta$, $\Lambda_{\sigma+1}(E)<\infty$, $0<\sigma\leq 1$, $\ell_k=\{z\in\Delta;\ |f(z)|=R\}$, $R>0$, T_R – образ $E\cap\ell_R$ на $\mathcal{D}$ при отображении функцией f, $\ell_{R,E}$ – часть ℓ_R, отстоящая от E на ε, $\varepsilon>0$, $T_{R,\varepsilon}=f(E\cap\ell_{R,\varepsilon})$. Тогда при любом $\varepsilon>0$ при почти всех $R>0$ имеем $\Lambda_\sigma(T_{R,\varepsilon})<\infty$ и

$$\int_0^{\infty *} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{\Lambda_\sigma^{\frac{1+\sigma}{\sigma}}(E\cap\ell_{R,\varepsilon})}{\Lambda_\sigma^{\frac{1}{\sigma}}(T_{R,\varepsilon})}\,dR \leq 2\Lambda_{\sigma+1}(E). \tag{7}$$

З а м е ч а н и е . Если $\sigma=1$, то $\Lambda_1(E)$ - длина кривой E, $\Lambda_2(E)=A(E)$ - площадь E,

$$\overline{\lim_{\epsilon\to 0}}\frac{\Lambda_1^2(E\cap \ell_{R,\epsilon})}{\Lambda_1(T_{R,\epsilon})}=\frac{|E\cap \ell_R|}{|T_R|},\qquad |T_R|\neq 0,\infty,$$

функция $K(R)=\frac{|E\cap \ell_R|}{|T_R|}$ измерима. В этом случае интеграл в (7) - интеграл Лебега и (7) переходит в неравенство (B) с правой частью $2A(E)$ вместо $A(E)$. Путем несущественных технических усложнений доказательства правую часть неравенства (7) можно заменить величиной $C_\sigma\Lambda_{\sigma+1}(E)$, где $C_\sigma<2$, $C_1=1$.

Л е м м а I. (i) Пусть φ - обратная к f функция, $2\geqslant\alpha>1$, $E=\varphi(\mathcal{C})$. Тогда

$$\Lambda_\alpha(E)=\int_{\mathcal{C}}|\varphi'(w)|^\alpha d\Lambda_\alpha. \tag{8}$$

(ii) Если $\mathcal{C}$ лежит на гладкой кривой, то неравенство (7) справедливо при $\alpha>0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о (i). Выберем $\varepsilon>0$ и разобьем $\mathcal{D}$ на счетное число областей Q_j, каждая из которых ограничена кусочно-гладкой кривой и однозначно проектируется на плоскость, причем для любых $w_1, w_2\in Q_j$ имеем $\left|\frac{\varphi'(w_1)}{\varphi'(w_2)}\right|<1+\varepsilon$. Если $\mathcal{C}_j=\mathcal{C}\cap Q_j$, $E_j=\varphi(\mathcal{C}_j)$, то в силу того, что $\alpha>1$ и Q_j ограничены кусочно гладкими кривыми, имеем $\Lambda_\alpha(\mathcal{C})=\sum_j\Lambda_\alpha(\mathcal{C}_j)$, $\Lambda_\alpha(E)=\sum_j\Lambda_\alpha E_j$. Если w_j - точка Q_j, то

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^\alpha}|\varphi'(w_j)|^\alpha\Lambda_\alpha(\mathcal{C})\leqslant\int_{\mathcal{C}_j}|\varphi'(w)|^\alpha d\Lambda_\alpha\leqslant(1+\varepsilon)^\alpha|\varphi'(w_j)|^\alpha\Lambda_\alpha(\mathcal{C}_j). \tag{9}$$

Выберем достаточно малое $\eta>0$ и рассмотрим такое покрытие множества $\mathcal{C}_j$ кругами $\{K_{jm}\}_{m\geqslant 1}$ радиусов $r_{jm}<\eta$, что

$$\sum_m r_{jm}^\alpha<\inf_{\cup K_{jm}}\sum r_{jm}^\alpha+\eta_1.$$

Если $L_{jm}=\varphi(K_{jm})$, w_{jm} - центр K_{jm}, $z_{jm}=\varphi(w_{jm})$, то L_{jm} содержится в круге с центром z_{jm} радиуса $|\varphi'(w_m)|(1+\varepsilon)r_{jm}$. Поэтому

$$\inf\sum_{\substack{\rho_{jm}<|\varphi'(w_m)|(1+\varepsilon)\eta_1\\ \cup L_{jm}\supset E_j}}\rho_{jm}^\alpha\leqslant|\varphi'(w_m)|^\alpha(1+\varepsilon)^\alpha\sum_j r_{jm}^\alpha\leqslant|\varphi'(w_j)|^\alpha(1+\varepsilon)^\alpha(\Lambda_\alpha(\mathcal{C}_\alpha)+\eta_1).$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $\eta_1\longrightarrow 0$, получаем

$$\Lambda_\alpha(E_j)\leqslant(1+\varepsilon)^\alpha|\varphi'(w_j)|^\alpha\Lambda_\alpha(\mathscr{E}_j),$$

и из (8) следует

$$\Lambda_\alpha(E)=\sum_j\Lambda_\alpha(E_j)\leqslant(1+\varepsilon)^\alpha\sum_j|\varphi'(w_j)|^\alpha\Lambda_\alpha(\mathscr{E}_j)\leqslant$$

$$\leqslant(1+\varepsilon)^{2\alpha}\sum_j\int_{\mathscr{E}_j}|\varphi'(w)|^\alpha d\Lambda_\alpha=(1+\varepsilon)^{2\alpha}\int_{\mathscr{E}}|\varphi'(w)|^\alpha d\Lambda_\alpha. \tag{10}$$

С другой стороны, пусть $\mathscr{K}_{jm}$ – такие круги с центрами в некоторых точках z_{jm} радиусов $R_{jm}<\eta_1$, покрывающие E_j, где η_1 настолько мало, чтобы для некоторого другого малого $\eta_2>0$ выполнялось условие

$$\Lambda_\alpha(E_j)-\eta_2<\sum_m R_{jm}^\alpha<\Lambda_\alpha(E_j)+\eta_2.$$

Тогда круги $K_{jm}=f(\mathscr{K}_{jm})$ содержатся в кругах с центрами $w_{jm}=f(z_{jm})$ радиусов $\frac{1+\varepsilon}{|\varphi'(w_j)|}R_{jm}$ и поэтому

$$\inf_{r_{jm}<\frac{1+\varepsilon}{|\varphi'(w_j)|}\eta_1}\sum_m r_{jm}^\alpha\leqslant\frac{(1+\varepsilon)}{|\varphi'(w_j)|}\sum_m R_{jm}^\alpha<\frac{(1+\varepsilon)^\alpha}{|\varphi'(w_j)|^\alpha}(\Lambda_\alpha(E_j)+\eta_2). \tag{11}$$

Переходя в (11) к пределу сначала при $\eta_1\to 0$, а затем при $\eta_2\to 0$, получаем

$$\Lambda_\alpha(\mathscr{E})\leqslant\frac{(1+\varepsilon)^\alpha}{|\varphi'(w_j)|^\alpha}\Lambda_\alpha(E_j),$$

т.е. снова по (8) имеем

$$\Lambda_\alpha(E)=\sum_j\Lambda_\alpha(E_j)\geqslant\frac{1}{(1+\varepsilon)^\alpha}\sum_j|\varphi'(w_j)|^\alpha\Lambda_\alpha(\mathscr{E})\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{(1+\varepsilon)^{2\alpha}}\sum_j\int_{\mathscr{E}_j}|\varphi'(w)|^2 d\Lambda_\alpha=\frac{1}{(1+\varepsilon)^{2\alpha}}\int_{\mathscr{E}}|\varphi'(w)|^\alpha d\Lambda_\alpha. \tag{12}$$

Переходя в (10) и (12) к пределу при $\varepsilon\to 0$, получаем утверждение (i)леммы. Утверждение (ii) доказывается аналогично.

Л е м м а 2. Пусть $\mathscr{E}\in\mathscr{D}$, $\Lambda_{\delta+1}(\mathscr{E})<\infty$, $\mathscr{E}_R$ – часть $\mathscr{E}$, проекция которой лежит на $|w|=R$. Тогда

$$\int_0^\infty{}^*\Lambda_\sigma(\mathscr{E}_R)dR\leqslant C_\sigma\Lambda_{\sigma+1}(\mathscr{E}). \tag{13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Разбивая $\mathscr{D}$ на не более чем счетное число кусков $Q_{jm}^{(\nu)}$, $\nu\leqslant N_{jm}$, однозначно проектирующихся на области Q_{jm} типа областей $R_j<|w|<R_{j+1}$, $Q_{j,m}<|\arg w|<Q_{j,m+1}$, где N_{jm} – кратность покрытия Q_{jm},

из (6) и свойств Λ_σ находим, что достаточно доказать (I3) для $\mathscr{E} \subset Q_{jm}$, что и предполагается в дальнейшем. Пусть

$$\Lambda_\sigma^{(\varepsilon)}(\mathscr{E}_R) = \inf_{\substack{K_n,\ \cup K_n \supset \mathscr{E}_R \\ K_n = K_{\delta_n}(z_n) \\ \delta_n < \varepsilon}} \sum \delta_n^\sigma .$$

Пусть теперь $\{\mathscr{K}_n\}$ - такое покрытие $\mathscr{E}$ кругами радиусов $\rho_n \leq \varepsilon$, что

$$\sum \rho_n^\sigma \leq \Lambda_{\sigma+1}(\mathscr{E}) + \varepsilon,$$

и пусть

$$\Lambda_{\sigma/\mathscr{E}}^{(\varepsilon)}(\mathscr{E}_R) = \sum_{\mathscr{K}_n \cap \mathscr{E}_R \neq \phi} \rho_n^\sigma .$$

Ясно, что

$$\Lambda_\sigma^{(\varepsilon)}(\mathscr{E}_R) \leq \Lambda_{\sigma/\mathscr{E}}^{(\varepsilon)}(\mathscr{E}).$$

Тогда

$$\Lambda_\sigma(\mathscr{E}_R) \leq \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}}\, \Lambda_{\sigma/\mathscr{E}}^{(\varepsilon)}(\mathscr{E}_R)$$

и поэтому

$$\int_0^{\infty *} \Lambda_\sigma(\mathscr{E}_R)\,dR \leq \int_0^{\infty *} \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}}\, \Lambda_{\sigma/\mathscr{E}}^{(\varepsilon)}(\mathscr{E}_R)\,dR \leq \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \int_0^{\infty *} \Lambda_{\sigma/\mathscr{E}}^{(\varepsilon)}(\mathscr{E}_R)\,dR =$$

$$= \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \int_0^{\infty} \Lambda_{\sigma/\mathscr{E}}^{(\varepsilon)}(\mathscr{E}_R)\,dR .$$

Как нетрудно видеть,

$$\int_0^{\infty} \Lambda_{\sigma/\mathscr{E}}^{\varepsilon}(\mathscr{E}_R)\,dR \leq 2 \sum_{\mathscr{K}_n} \rho_n^{\sigma+1} \leq 2\Lambda_{\sigma+1}(\mathscr{E}),$$

т.е.

$$\int_0^{\infty *} \Lambda_\sigma(\mathscr{E}_R)\,dR \leq 2\Lambda_{\sigma+1}(\mathscr{E}). \tag{I4}$$

Лемма доказана.

С л е д с т в и е . <u>Для каждого</u> $\varepsilon > 0$ <u>и почти всех</u> $R > 0$

$$\Lambda_\sigma(T_{R,\varepsilon}) < \infty . \tag{I5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Возьмем множество E_δ точек E, удаленных от $\partial\Delta$ не менее чем на ε, и пусть $\mathscr{E}_\delta = f(E_\delta)$. Тогда, поскольку функция $|f'|$ ограничена внутри области Δ, найдется

такое $M>0$, что $M\geq|f'(z)|$ для $z\in E_\delta$, и путем несложной модификации леммы I получаем

$$\Lambda_{\sigma+1}(\mathcal{E}_\delta)=\int\limits_{E_\delta}|f'(z)|^{\sigma+1}d\Lambda_{\sigma+1}\leq M^{\sigma+1}\Lambda_{\sigma+1}(E_\delta)<\infty.$$

Тогда (I5) следует из леммы 2, поскольку при достаточно малых δ $T_R\cap\mathcal{E}_\delta\supset T_{R,\varepsilon}$.

Доказательство теоремы. По лемме I имеем ($z=\varphi(w)$ — функция, обраткая к $w=f(z)$):

$$\Lambda_\sigma(\ell_{R,\varepsilon}\cap E)=\int\limits_{T_{R,\varepsilon}}|\varphi'(w)|^\sigma d\Lambda_\sigma\leq\Big(\int\limits_{T_{R,\varepsilon}}|\varphi'(w)|^{\sigma+1}d\Lambda_\sigma\Big)^{\frac{\sigma}{\sigma+1}}\Lambda_\sigma^{\frac{1}{\sigma+1}}(T_{R,\varepsilon})$$

и

$$\frac{\Lambda_\sigma^{\frac{1+\sigma}{\sigma}}(\ell_{R,\varepsilon}\cap E)}{\Lambda_\sigma^{1/\sigma}(T_{R,\varepsilon})}\leq\int\limits_{T_{R,\varepsilon}}|\varphi'(w)|^{\sigma+1}d\Lambda_\sigma. \tag{I6}$$

При $\varepsilon\to 0$ правая часть (I6) монотонно возрастает. Пусть последовательность поверхностей $\mathcal{D}_n$ исчерпывает $\mathcal{D}$, $\overline{\mathcal{D}}_n\subset\mathcal{D}$, $T_{R,n}=T_R\cap\mathcal{D}_n$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{T_{R,\varepsilon}}|\varphi'(w)|^{\sigma+1}d\Lambda_\sigma=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{T_{R,n}}|\varphi'(w)|^{\sigma+1}d\Lambda_\sigma$$

и

$$\int\limits_0^\infty{}^*\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\left(\frac{\Lambda_\sigma^{\frac{1+\sigma}{\sigma}}(\ell_{R,\varepsilon}\cap E)}{\Lambda_\sigma^{1/\sigma}(T_{R,\varepsilon})}\right)dR\leq\int\limits_0^R{}^*\Big(\lim_{n\to\infty}\int\limits_{T_{R,n}}|\varphi'(w)|^{\sigma+1}d\Lambda_\sigma\Big)dR\leq$$

$$\leq\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\infty{}^*\Big(\int\limits_{T_{R,n}}|\varphi'(w)|^{\sigma+1}d\Lambda_\sigma\Big)dR.$$

Разобьем $\mathcal{D}_n$, как и в лемме 2, на не более чем счетное число кусков $Q_{jm}^{(\nu)}$, $\nu\leq N_{jm}$, которые к тому же столь малы, что $\left|\frac{\varphi'(w)}{\varphi'(w_0)}\right|<1+\eta$ для $w,w_0\in Q_{jm}^{(\nu)}$, где $\eta>0$ заранее определено. Пусть $\mathcal{E}_{jm}^{(\nu)}=\mathcal{E}\cap Q_{jm}^{(\nu)}$, $\chi_{jm}^{(\nu)}$ - характеристическая функция $Q_{jm}^{(\nu)}$ на $\mathcal{D}_n$, $E_{jm}^{(\nu)}=\varphi(\mathcal{E}_{jm}^{(\nu)})$, $\psi_{jm}^{(\nu)}=\chi_{jm}^{(\nu)}|\varphi|^{\sigma+1}$
Имеем

$$\int\limits_0^\infty{}^*(\ )dR=\sum_j\int\limits_{R_j}^{R_{j+1}}{}^*(\ )dR=\sum_j\int\limits_{R_j}^{R_{j+1}}{}^*\Big[\int\limits_{T_{R,n}}\Big(\sum_m\sum_{\nu\leq N_{jm}}\psi_{jm}^{(\nu)}(w)\Big)d\Lambda_\sigma\Big]dR=$$

$$=\sum_j \int_{R_j}^{R_{j+1}}{}^{*}\Big[\sum_m \sum_{\nu\le N_{jm}} \int_{T_{R,n}} \varphi_{jm}^{(\nu)}(w)\,d\Lambda_\sigma\Big]dR \le \sum_j \sum_m \sum_{\nu\le N_{jm}} \int_{R_j}^{R_{j+1}}{}^{*}\Big(\int_{T_{R,n}} \varphi_{jm}^{(\nu)}(w)\,d\Lambda_\sigma\Big)dR. \tag{17}$$

Пусть $w_{jm}^{(\nu)}$ - произвольная точка из $Q_{jm}^{(\nu)}$. Пользуясь условием на разбиение $\{Q_{jm}^{(\nu)}\}$ и леммами I и 2, продолжим (I7) дальше:

$$\le \sum_j \sum_m \sum_{\nu\le N_{jm}} (1+\eta)^{\sigma+1} |\varphi'(w_{jm}^{(\nu)})|^{\sigma+1} \int_{R_j}^{R_{j+1}}{}^{*} (\Lambda_\sigma(T_{R,n}, Q_{jm}^{(\nu)}))\,dR \le$$

$$\le 2(1+\eta)^{\sigma+1} \sum_j \sum_m \sum_{\nu=N_{jm}} |\varphi'(w_{jm}^{(\nu)})|^{\sigma+1} \Lambda_{\sigma+1}(\mathcal{E}_{jm}^{(\nu)}) \le$$

$$\le 2(1+\eta)^{2\sigma+2} \sum_j \sum_m \sum_{\nu\le N_{jm}} \int_{\mathcal{E}_{jm}^{(\nu)}} |\varphi'(w)|^{\sigma+1}\,d\Lambda_{\sigma+1} =$$

$$=2(1+\eta)^{2\sigma+2} \int_{\mathcal{E}\cap\mathcal{D}_n} |\varphi'(w)|^{\sigma+1}\,d\Lambda_{\sigma+1} = 2(1+\eta)^{2\sigma+2} \Lambda_{\sigma+1}(E\cap\varphi(\mathcal{D}_n)) \le$$

$$\le 2(1+\eta)^{2\sigma+2} \Lambda_{\sigma+1}(E).$$

Устремляя здесь η к нулю, получим утверждение теоремы.

Литература

I. Хейман В.К., Многолистные функции, М., ИЛ, I960.

2. Бурбаки Н., Интегрирование, М., "Наука", I967.

3. Federer H., Geometric measure theory, Berlin, Springer, I969.