Задачи о фокусниках и теоремы Холла и Шпернера

А.ЭВНИН

Теорема Холла

В популярной математической литературе широкую известность получила следующая задача.

Задача о свадьбах. *Имеется множество юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. При каких условиях можно одновременно поженить всех юношей так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке?*

Ответ таков: задача разрешима тогда и только тогда, когда любые k юношей из данного множества знакомы в совокупности не менее чем с k девушками.

Заметим, что необходимость здесь очевидна. Действительно, если для каких-то k юношей число потенциальных невест меньше k, то уже этих k юношей одновременно поженить не удастся. Достаточность доказывается не так просто!

Для того чтобы сформулировать задачу о свадьбах на математическом языке, приведем некоторые определения из теории графов [1].

Вершины графа – смежные, если они соединяются ребром. Ребра графа называются смежными, если у них есть общая вершина, и несмежными в противном случае. Попарно несмежные ребра графа образуют *паросочетание*. Например, в графе на рисунке 1 можно указать несколько паросочетаний из четырех ребер. Одно из них $\{aa_1, bb_1, cc_1, dd_1\}$.

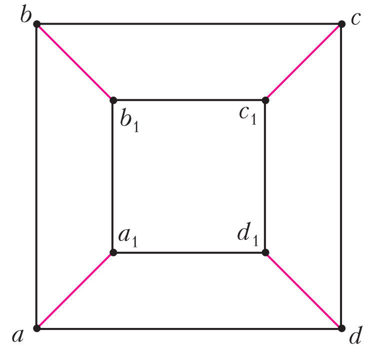

Рис. 1

Пусть $G(V_1, V_2)$ – двудольный граф с долями V_1 и V_2 (в этом графе любое ребро соединяет некоторую вершину из V_1 с некоторой вершиной из V_2). *Совершенным паросочетанием* из V_1 в V_2 называется паросочетание в этом графе, покрывающее V_1 (т.е. для всякой вершины из V_1 в паросочетании найдется выходящее из нее ребро). Например, на рисунке 2 изображен граф с долями $V_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$ и

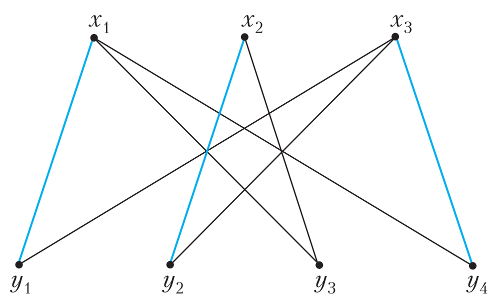

Рис. 2

$V_2 = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. Ребра x_1y_1, x_2y_2 и x_3y_4 образуют совершенное паросочетание из V_1 в V_2.

Пусть G – граф с множеством вершин V, а A – подмножество V. *Окружением* множества A называют множество

$$\Gamma(A) = \bigcup_{v \in A} \Gamma(v),$$

где $\Gamma(v)$ – множество вершин, смежных с v.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190202

Напомним также, что *мощность* конечного множества – это число его элементов.

Теперь решение задачи о свадьбах может быть сформулировано следующим образом.

Теорема 1 (Ф.Холл, 1935 г.). *Совершенное паросочетание из V_1 в V_2 в двудольном графе $G(V_1, V_2)$ существует тогда и только тогда, когда для любого множества $A \subset V_1$ мощность его окружения не меньше мощности A, т.е. $|\Gamma(A)| \geq |A|$.*

Четыре разных способа доказательства теоремы Холла можно найти в книге [2].

Достаточное условие

В данной статье речь пойдет об одном (простом, но малоизвестном) достаточном условии существования совершенного паросочетания в двудольном графе.

Теорема 2. *Пусть в непустом (т.е. имеющем хотя бы одно ребро) двудольном графе $G(V_1, V_2)$ степень любой вершины из доли V_1 не меньше степени любой вершины из доли V_2. Тогда в этом графе существует совершенное паросочетание из V_1 в V_2.*

Доказательство. Пусть q – число, которое не больше степени любой вершины из V_1 и не меньше степени любой вершины из V_2. Возьмем произвольные k вершин первой доли $b_1, b_2, \ldots, b_k$ и смежные с ними вершины $g_1, g_2, \ldots, g_l$ второй доли. Рассмотрим порожденный этими $k + l$ вершинами подграф G' исходного графа (в G' входят указанные вершины и все ребра между ними, имеющиеся в исходном графе). Ясно, что в графе G' степень любой вершины из первой доли не меньше q, а из второй не больше q. Число ребер двудольного графа равно сумме степеней вершин любой из его долей. Поэтому

$$kq \leq \sum_{i=1}^{k} \deg(b_i) = \sum_{j=1}^{l} \deg(g_j) \leq lq,$$

откуда $k \leq l$. Таким образом, выполнены условия теоремы Холла о существовании совершенного паросочетания в двудольном графе.

Граф называется *регулярным*, если степени всех его вершин равны между собой. Назовем двудольный граф *полурегулярным*, если в каждой доле степени всех ее вершин равны между собой. Извлечем из теоремы 2 следующие следствия.

Следствие 1. *В любом непустом регулярном двудольном графе существует совершенное паросочетание.*

Следствие 2. *В непустом полурегулярном двудольном графе $G(V_1, V_2)$ совершенное паросочетание существует тогда и только тогда, когда в доле V_1 вершин не больше, чем в V_2.*

Доказательство. *Необходимость* очевидна.

Достаточность. Пусть в V_1 и V_2 степени вершин равны a и b соответственно. Подсчитав двумя способами количество ребер в двудольном графе, получим $a|V_1| = b|V_2|$. Учитывая неравенство $|V_1| \leq |V_2|$, отсюда получаем, что $a \geq b$. Осталось воспользоваться теоремой 2.

Задачи о фокусниках

Имеется ряд задач, которые легко решаются с помощью теоремы 2 и следствий из нее. Фабула этих задач такова. Зрители предъявляют ассистенту фокусника некоторый случайным образом выбранный объект (например, несколько игральных карт), после чего ассистент по своему выбору как-то изменяет этот объект. Далее фокусник по новому объекту восстанавливает исходный.

Построим двудольный граф $G(V_1, V_2)$ следующим образом. Пусть вершины из V_1 – это всевозможные конфигурации, которые зрители могут предъявить ассистенту фокусника, а вершины из V_2 – те конфигурации, которые может получить ассистент. Если из конфигурации $a \in V_1$ может быть получена конфигурация $b \in V_2$, то в графе должно быть ребро ab; других ребер в графе нет.

Если в данном графе существует совершенное паросочетание из V_1 в V_2, то фокусник с ассистентом, используя его, смогут осуществить фокус: фокусник по конфигурации b однозначно определит конфигурацию a.

Рассмотрим конкретные задачи.

Для решения некоторых из них нужно знать формулы для числа сочетаний $C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$ (это количество способов выбрать k элементов из n имеющихся, если порядок выбора не важен) и для числа размещений $A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$ (это количество способов выбрать k элементов из n имеющихся, если порядок выбора важен).

Задача 1. *Имеются 27 карточек с числами от 1 до 27. Двое показывают следующий фокус. Первый получает четыре карточки, выбранные случайным образом. Одну из них он убирает, а три оставшиеся выкладывает в ряд. Второй должен назвать спрятанную карточку. Могут ли участники договориться так, чтобы по выложенным карточкам можно было определить спрятанную?*

Ответ: да, могут.

Решение. Рассмотрим двудольный граф, в одной доле которого сочетания из 27 по 4, в другой размещения из 27 по 3 и ребро соединяет размещение с сочетанием, если все элементы размещения входят в сочетание.

Очевидно, граф полурегулярный (на самом деле, даже регулярный). Поскольку $C_{27}^4 = A_{27}^3 = 27 \cdot 26 \cdot 25$, к графу можно применить следствие 2. В рассматриваемом двудольном графе существует совершенное паросочетание. Фокусникам осталось договориться о том, какое совершенное паросочетание им использовать.

Задача 2. *Фокусник и его помощник показывают следующий фокус. Фокусник выкладывает колоду из 36 карт и просит двух зрителей – мальчика и девочку – выбрать по две карты. Видя, кто какие карты выбрал, помощник тоже берет две карты из оставшихся и отдает их зрителям. Зрители перемешивают все 6 карт и отдают их фокуснику. Тот объявляет, кто какие карты брал из колоды. Докажите, что такой фокус действительно возможен.*

Решение. Здесь в первой доле графа – упорядоченные пары неупорядоченных пар. Например, вершина $(\{1,2\}, \{3,4\})$ соответствует случаю, когда мальчик выбрал карты с номерами 1 и 2 (можно считать, что карты пронумерованы числами от 1 до 36), а девочка – карты с номерами 3 и 4. Во второй доле графа – неупорядоченные шестерки карт. Ребро проводится в случае, когда шестерка получается из четверки добавлением двух карт. В первой доле построенного двудольного полурегулярного графа $C_{36}^2 \cdot C_{34}^2$ вершин, а во второй C_{36}^6. Очевидно, $|V_1| < |V_2|$. Выполнены условия следствия 2, гарантирующего существование совершенного паросочетания – фокус возможен.

Задача 3. *Зритель пишет на доске слева направо 10 цифр. Помощник фокусника закрывает одну из цифр карточкой. После этого входит фокусник и называет закрытую цифру. Докажите, что такой фокус действительно возможен.*

Решение. Пусть V_1 и V_2 – множества тех «картинок», которые могут увидеть помощник и фокусник соответственно. Рассмотрим двудольный граф $G(V_1, V_2)$, ребра которого описывают возможные переходы от картинок из V_1 к картинкам из V_2. Требуется доказать, что в этом графе существует совершенное паросочетание.

Если $u \in V_1$, то $\deg(u) = 10$, поскольку помощник может закрыть любую из 10 записанных зрителем цифр. Если $v \in V_2$, то $\deg(v) = 10$, поскольку карточка может закрывать любую из цифр от 0 до 9. Согласно следствию 1, в $G(V_1, V_2)$ существует совершенное паросочетание.

Заметим, что в графе довольно много вершин – по 10^{10} в каждой доле. Покажем, что фокус осуществим не только теоретически, но и практически.

Пусть места, где записаны цифры, пронумерованы слева направо: 1, 2, …, 9, 0. Помощник подсчитывает сумму S всех записанных зрителем цифр и закрывает карточкой место, номер которого является последней цифрой числа S. Фокусник вычисляет сумму девяти открытых цифр и, (по положению карточки) зная последнюю цифру суммы десяти цифр, легко определяет закрытую цифру.

Задача 4. *Зритель пишет на доске слева направо n цифр. Помощник фокусника закрывает одну из цифр красной карточкой, другую синей, еще одну зеленой. После этого входит фокусник и называет закрытые цифры. При каком наименьшем n такой фокус возможен?*

Ответ: при $n = 12$.

Решение. Пусть V_1 и V_2 – множества тех «картинок», которые могут увидеть помощник и фокусник соответственно. Рассмотрим двудольный граф $G(V_1, V_2)$, ребра которого описывают возможные переходы от картинок из V_1 к картинкам из V_2. Граф полурегулярный, $|V_1| = 10^n$, $|V_2| = n(n-1)(n-2)\cdot 10^{n-3}$. По следствию 2, для существования совершенного паросочетания из V_1 в V_2 необходимо и достаточно, чтобы в доле V_2 вершин было не меньше, чем в V_1. Отсюда $n(n-1)(n-2) \geq$ $\geq 10^3$, что равносильно неравенству $n \geq 12$. Таким образом, наименьшее значение n равно 12.

Покажем, как фокус осуществить практически при $n \geq 12$. Места, где записаны первые 12 цифр, пронумеруем слева направо: 1, 2, ..., 9, 0, 11, 12 (остальные места, если они есть, не нумеруем!). Пусть S – сумма всех записанных зрителем цифр. Будем действовать за помощника следующим образом. Закроем красной карточкой место, номер которого является последней цифрой числа S, после чего мысленно удалим это место, а синей карточкой закроем место с номером, равным цифре, которая спрятана под красной карточкой. Затем зеленой карточкой закроем место, номер которого (вычисленный после «удаления» цифр, находящихся под красной и синей карточками) спрятан под синей карточкой.

Теперь фокусник по положению зеленой карточки поймет, какая цифра под синей, а по положению синей карточки – какая цифра под красной. Все цифры, кроме той, которая под зеленой карточкой, уже известны фокуснику, а положение красной карточки говорит о последней цифре суммы всех цифр, записанных зрителем. Поэтому фокусник сможет определить цифру и под зеленой карточкой.

Задачи для самостоятельного решения

Приведем подборку задач [1], при решении которых возможно применение теоремы Холла. Некоторые задачи совсем простые (решаются простой ссылкой, например, на следствие 1; нужно лишь увидеть соответствующий двудольный граф!), некоторые предлагались на школьных и студенческих олимпиадах различного уровня. Задачи 11–15 посвящены доказательству и применениям теоремы Шпернера.

1. Имеется бесконечное множество юношей и бесконечное множество девушек. Для любого натурального числа k верно, что любые k юношей знакомы в совокупности не менее чем с k девушками. Верно ли, что всех юношей удастся одновременно поженить на знакомых им девушках? Другими словами, справедлива ли теорема Холла в случае бесконечного графа?

2. Решите задачу 1 в предположении счетности [2] множеств юношей и девушек.

3. В некотором районе, состоящем из нескольких деревень, число женихов равно числу невест. В каждой деревне общее число женихов и невест не больше половины общего их числа. Докажите, что можно всех переженить так, чтобы в каждой паре жених и невеста были из разных деревень.

4. Однокруговой волейбольный турнир $2n$ команд продолжался $2n-1$ дней. Каждый день проходило n игр, каждая команда в один день проводила ровно одну игру. По окончании турнира организаторы решили наградить тортами некоторые команды: за каждый игровой

[1] Задача 3 предлагалась на III этапе Российской олимпиады школьников 1995 года, задача 4 – на Putnam Competition 2012 года, задача 14 – на Московской олимпиаде 2017 года, задача 15 – на Открытой олимпиаде ФМЛ 239 в 2004 году. Остальные задачи взяты из сборников [3, 4].

[2] Множество называется счетным, если существует взаимно однозначное соответствие между ним и множеством натуральных чисел (другими словами, элементы данного бесконечного множества можно пронумеровать натуральными числами). Счетными являются множества натуральных чисел, неотрицательных целых чисел, целых чисел, рациональных чисел.

день торт вручается какой-то команде, победившей в этот день. Всегда ли организаторы смогут осуществить свой выбор таким образом, чтобы только одна команда осталась без торта?

5. На танцевальном вечере каждый юноша знаком с k девушками, а каждая девушка знакома с k юношами. Докажите, что можно провести k (медленных) танцев так, чтобы каждый участник вечера станцевал со всеми своими знакомыми (противоположного пола).

6. На шахматной доске пометили 16 из 64 клеток так, что на каждой вертикали и каждой горизонтали оказалось по две помеченные клетки. Докажите, что на помеченных клетках можно расставить 8 черных и 8 белых фигур так, чтобы на каждой вертикали и каждой горизонтали стояло по одной белой и одной черной фигуре.

7. Карточная колода из 36 карт раздается на 9 человек по 4 карты каждому. Докажите, чтобы каждый может выложить по одной карте так, что все эти карты были разного достоинства.

8. Выполняя домашнее задание, каждый студент группы решил по 4 задачи. Известно, что каждая задача была решена четырьмя студентами. Докажите, что можно организовать разбор задач так, чтобы каждый студент рассказал решение ровно одной задачи и чтобы все задачи были разобраны (по одному разу).

9. Пусть $G(V_1, V_2)$ – двудольный граф; для любого подмножества A доли V_1 выполняется неравенство $|\Gamma(A)| \geq |A| - d$. Докажите, что максимальная мощность паросочетания в графе G не меньше $|V_1| - d$.

Для дальнейшего нам понадобятся следующие термины. Пусть имеется некоторый набор различных множеств. Говорят, что они образуют *цепь*, если для любых двух из них одно является подмножеством другого, и *антицепь*, если для любых двух из них ни одно не является подмножеством другого. Например, множества $\{1\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 3, 4\}$ образуют цепь, а множества $\{1\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$ образуют антицепь. Будем считать, что если у нас всего одно множество, то оно одновременно и цепь, и антицепь. Очевидно, что цепь и антицепь не могут пересекаться более чем по одному множеству. *Булеан* множества – это множество всех его подмножеств.

10. Докажите, что существует разбиение булеана n-элементного множества на цепи, каждая из которых содержит множество мощности $[n/2]$.

11. Докажите **теорему Шпернера**: максимальная длина антицепи в булеане n-элементного множества равна $C_n^{[n/2]}$.

12. Среди 250 сотрудников международной фирмы в любой паре сотрудников каждый знает язык, который не знает другой сотрудник из этой пары. Какое наименьшее возможное число языков знают (в совокупности) сотрудники фирмы?

13. В деревне живут 250 хоббитов. Каждый хоббит живет в отдельном домике. По вечерам они ходят друг к другу в гости. За один вечер каждый хоббит посещает всех, кого можно застать дома, причем если он идет в гости, то у себя дома в этот вечер уже не появляется. За какое наименьшее число вечеров может случиться так, что каждый житель деревни побывает в гостях у всех остальных?

14. Детектив Ниро Вульф расследует преступление. В деле замешаны 80 человек, среди которых один – преступник, еще один – свидетель преступления (но неизвестно, кто это). Каждый день детектив может пригласить к себе одного или нескольких из этих 80 человек, и если среди приглашенных есть свидетель, но нет преступника, то свидетель сообщит, кто преступник. Может ли детектив заведомо раскрыть дело за 12 дней?

15. Пусть G – граф с множеством вершин V. Известно, что для любого множества $A \subset V$ мощность его окружения не меньше мощности A. Докажите, что в графе G найдется паросочетание, в котором не меньше $|V|/3$ ребер.

Литература

1. *М.Л.Краснов.* Вся высшая математика: учебник. Т.7 / М.Л.Краснов, А.И.Киселев, Г.И.Макаренко, Е.В.Шикин, В.И.Заляпин, А.Ю.Эвнин. – М.: URSS, 2017.

2. *А.Ю.Эвнин.* Вокруг теоремы Холла. – М.: URSS, 2019.

3. *А.Ю.Эвнин.* Задачник по дискретной математике. 6-е изд. – М.: URSS, 2016.

4. Всероссийские студенческие турниры математических боев. Тула, 2002–2015 г. Ч. II. – Тула: Изд-во ТПГУ им. Л.Н.Толстого, 2017.

Первоначальный вариант статьи опубликован в журнале «Математика в школе» (2019, №2).