Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. П. Радченко, М. В. Шершнева, С. Н. Кубышкина, Оценка надёжности элементов конструкций в условиях ползучести на основании стохастических обобщённых моделей, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012, выпуск 3(), 53–71

https://www.mathnet.ru/vsgtu1094

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.174
14 декабря 2025 г., 03:42:50

Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.376+539.434

ОЦЕНКА НАДЁЖНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЁННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В. П. Радченко, М. В. Шершнева, С. Н. Кубышкина

Самарский государственный технический университет,
443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mails: radch@samgtu.ru, mary-sofya@mail.ru, kubsn@yandex.ru

Предложена нелинейная стохастическая модель одноосной ползучести и длительной прочности, которая учитывает все три стадии деформирования. Разработана методика идентификации случайных параметров модели по серии экспериментальных кривых ползучести. Выполнена стохастическая линеаризация модели, которая позволила аналитически оценить вероятность безотказной работы растягиваемого стержня по деформационному критерию. Выполнена проверка адекватности разработанного подхода экспериментальным данным по ползучести стержневых образцов из стали 12Х18Н10Т при температуре 850 °С. Выполнено обобщение разработанного подхода для описания деформирования элементов конструкций в терминах «обобщённая нагрузка, обобщённое перемещение, время». Конструктивный элемент рассматривается как единое целое (специфический образец, хотя и сложной структуры). Установлена полная аналогия между кривыми ползучести одноосного образца и обобщёнными кривыми ползучести в координатах «обобщённое перемещение – время» при фиксированных значениях обобщённого перемещения для конструктивного элемента. На основе этой аналогии предложена обобщённая стохастическая модель реологического деформирования элементов конструкций. Разработана методика оценки надёжности элементов конструкций в условиях ползучести по параметрическим критериям отказа, реализованная в модельном примере ползучести толстостенной трубы под действием внутреннего давления. Приведены результаты расчётов и даны рекомендации по назначению ресурса.

Ключевые слова: *ползучесть, длительная прочность, стохастическая модель, линеаризация, элемент конструкции, надёжность, параметрический критерий отказа, вероятность безотказной работы.*

Введение. Одними из наиболее ответственных характеристик, влияющих на работоспособность элементов конструкций из реономных материалов, являются характеристики ползучести и длительной прочности материалов. Однако полученные в лабораторных условиях опытные данные даже для одноосной деформации ползучести и времени до разрушения имеют значительный разброс. Кроме того, сам процесс деформирования протекает неравномерно в пределах одного и того же образца. Существенное влияние случай-

Владимир Павлович Радченко (д.ф.-м.н., проф.), зав. кафедрой, каф. прикладной математики и информатики. *Мария Викторовна Шершнева*, аспирант, каф. прикладной математики и информатики. *Светлана Николаевна Кубышкина* (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. прикладной математики и информатики.

ных возмущений механических характеристик на поля напряжений и деформаций и необходимость построения соответствующих стохастических моделей для расчётов на прочность отмечались во многих работах (см., например [1–10]. Еще больший разброс данных наблюдается у однотипных элементов конструкций, изготовленных из стохастически неоднородных материалов, поскольку на случайные характеристики материала накладываются различного рода геометрические допуски, нестабильность технологических факторов и механической обработки и т.д. Классический подход к решению задач прочности в условиях ползучести, базирующийся на решении соответствующих краевых задач, сталкивается с серьезными трудностями. Во-первых, для этого необходима полная трехмерная информация о реологических характеристиках материала (носящая явно выраженный стохастический характер), получение которой экспериментальным путем крайне проблематично. Во-вторых, в полную систему уравнений ползучести и длительной прочности должны входить стохастические уравнения состояния. Однако в настоящее время стохастическая теория реологического деформирования и разрушения в условиях сложного напряженного состояния развита слабо, особенно для процессов разупрочнения материала. В-третьих, сдерживающим фактором разработки методов решения стохастических краевых задач являются физическая и стохастическая нелинейности определяющих уравнений ползучести и длительной прочности, что не позволяет в должной мере развивать аналитические и численные методы решения. Здесь имеются решения лишь на стадии установившейся ползучести [11–13], и единичные работы посвящены решению краевых задач с учетом третьей стадии ползучести [14].

В силу отмеченных обстоятельств необходимо развивать нетрадиционные подходы к оценке работоспособности элементов конструкций в условиях ползучести со случайными свойствами материала, из которого они изготовлены. В этом направлении перспективным является использование обобщённых реологических моделей ползучести и длительной прочности макромеханики конструкций, основы построения которых заложены в работах [15–17], а систематизация подхода выполнена в [18].

Суть данного подхода заключается в следующем. При анализе эволюции конструкции в условиях однопараметрического нагружения можно обнаружить аналогию между эффектами деформационной анизотропии, определяемыми наличием самоуравновешенных напряжений в конструктивном элементе, и наблюдаемыми микронапряжениями в испытаниях одноосных образцов реальных материалов. Природа этой аналогии очевидна, неоднородность реальных материалов вызывает микронапряжения, которые в образце играют ту же роль, что и самоуравновешенные напряжения в статически неопределимой конструкции.

Поэтому, если ограничиться построением локальных решений для краевой задачи (в некоторых выбранных точках) или описывать эволюцию некоторых характеристик, интегрально отражающих деформационные свойства конструктивных элементов, то реологические уравнения для элементов конструкций можно строить таким же образом и пользуясь такой же методологией, как и в феноменологических теориях для сплошной среды, не учитывающих микронапряжения, возникающие за счёт микронеоднородностей материала.

Рассматривая конструктивный элемент как единое целое (специфический образец, хотя и сложной структуры), можно установить связь между входными (нагрузки) и выходными (перемещения, деформации, углы закручивания и т.п.) параметрами, аналогично тому, как строятся модели ползучести для одноосного растягиваемого образца. Тогда для конкретизации связи между входными параметрами (обобщённая нагрузка) и выходными характеристиками (обобщённые перемещения) можно использовать уже имеющиеся одноосные модели реологического деформирования. Такой подход основан на полной аналогии диаграмм упругопластического деформирования и кривых ползучести для растягиваемого одноосного стержня и соответствующих диаграмм в координатах «обобщённая нагрузка — обобщённое перемещение» конструктивного элемента как целого при постоянных температурно-силовых нагрузках.

В общем случае выбор обобщённого перемещения в качестве наблюдаемой величины неоднозначен, носит неформальный характер и определяется целями и задачами исследования; осуществлять его следует так, чтобы при постоянной обобщённой нагрузке получить для элемента конструкции обычную «кривую ползучести» в координатах «обобщённое перемещение — время». При этом обобщённые модели могут устанавливать связи типа «крутящий момент — угол закручивания» при кручении толстостенных труб или сплошных стержней, «радиальное перемещение — количество оборотов» для диска газотурбинного двигателя, «радиальное перемещение — время» для толстостенных труб под действием внутреннего давления, «кривизна балки — время» для чистого изгиба балки при действии изгибающего момента и т.д. [18]. Для построения обобщённых моделей необходимы первичные «стационарные» кривые ползучести и «диаграммы» упругопластического деформирования при постоянных нагрузках, которые могут быть получены либо экспериментально в лабораторных условиях или натурных испытаний, либо численно решением соответствующей краевой задачи.

Наличие адекватной реологической модели конструкции дает новые возможности для оценки надёжности элементов конструкций по параметрическим критериям отказа, иллюстрация которых и является целью настоящей работы.

Прежде чем рассматривать вопрос построения стохастической модели ползучести и длительной прочности одноосного образца (как простейшей конструкции), проанализируем глобальную картину неоднородностей свойств материала. Следуя подходу Ю. П. Самарина [7], будем считать, что некоторым производителем в течение длительного времени изготавливается металлический пруток. Тогда всю продукцию можно представить как один глобальный стержень, образованный из последовательно изготовленных прутков. Если через x обозначить координату на оси глобального стержня, а через $A(x)$ — исследуемую

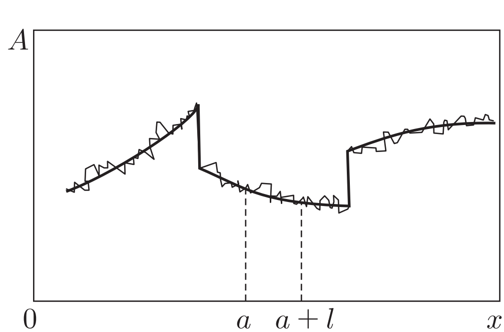

Рис. 1. Схематическое распределение неоднородностей вдоль глобального стержня

механическую характеристику материала, то влияние неоднородности качественно будет описываться кривой, изображенной на рис. 1. Здесь нетрудно увидеть два вида неоднородностей: макро- и микронеоднородности.

Медленные изменения рассматриваемой функции (плавная кривая на рис. 1) соответствуют макронеоднородностям материала, обусловленным трендом (постепенным изменением) условий производства. свойств сырья, нестабильностью технологических процессов и т.д. При этом возможны разрывы кривой, описывающей тренд, за счет перехода на новое сырье, измененную технологию и т.п. Указанные разрывы хорошо известны экспериментаторам при сравнении опытных данных, например, на ползучесть образцов различных плавок.

Наряду с трендом на рис. 1 показана быстроосциллирующая кривая, связанная с микроструктурным строением материала. При этом характерные частоты флуктуаций, возникающих за счет микронеоднородностей, будут гораздо выше частот, обусловленных наличием макронеоднородностей. Поэтому для глобального описания неоднородностей можно предложить следующее соотношение:

$$A(x) = u_0(x) + \sum_k \left[u_k(x) \cos \omega_k x + v_k(x) \sin \omega_k x \right]. \tag{1}$$

Здесь функция $u_0(x)$ описывает тренд исследуемой механической характеристики, т. е. макронеоднородность, а выражение под знаком суммы — её микроструктурные флуктуации. Функции $u_k(x)$ и $v_k(x)$ изменяются так же медленно, как и $u_0(x)$. Они предназначены для описания тренда амплитуд микроструктурных флуктуаций.

Пусть теперь из глобального стержня вырезан образец длиной l, соответствующий отрезку $[a, a+l]$ (см. рис. 1). При этом предполагается, что величина l значительно больше, чем характерная длина волны микронеоднородностей, т.е. число $\omega_k l/2\pi$ является большим. С другой стороны, длину l будем считать достаточно малой для того, чтобы зафиксировать тренд. Тогда в (1) функции $u_0(x)$, $u_k(x)$ и $v_k(x)$ можно приближенно считать не зависящими от x ($x \in [a, a+l]$):

$$A(x) = u_0(x) + \sum_k \left(u_k \cos \omega_k x + v_k \sin \omega_k x \right), \quad x \in [a, a+l]. \tag{2}$$

Очевидно, что величины $u_0(x)$, $u_k(x)$ и $v_k(x)$ зависят от того места, где вырезан образец, т.е. от величины a (см. рис. 1). Если местоположение образцов выбирать случайно, то указанные величины будут восприниматься по отношению к набору образцов тоже как случайные.

С помощью (2) нетрудно найти эффективное (среднее) значение исследуемой механической характеристики для выбранного образца ($x \in [a, a+l]$):

$$\frac{1}{l}\int_a^{a+l} A(x)dx = u_0(x) + \sum_k \frac{1}{\omega_k l}\left[u_k \sin \omega_k (a+l) - u_k \sin \omega_k a - \right.$$
$$\left. - v_k \cos \omega_k (a+l) + v_k \cos \omega_k a \right] \approx u_0,$$

поскольку числа $\omega_k l$ считаются большими.

Таким образом, для описания макронеоднородностей достаточно рассматривать лишь величину u_0, причем для набора образцов она будет восприниматься при статистическом исследовании как случайная величина, закон распределения которой зависит от формы кривой, выражающей тренд. Другими словами, кусочно-непрерывная функция тренда аппроксимируется кусочно-постоянной функцией на отрезках длиной l (l — длина образца).

1. Стохастическая модель растягиваемого образца. Исходя из вышеизложенного основной вариант стохастической модели ползучести для растягиваемого одноосного образца принимается в виде [10]

$$\begin{aligned}
&p = u + v + w;\\
&u(t) = \sum_{k=1}^{s} u_k(t), \quad \dot{u}_k(t) = \lambda_k \left[A_k \sigma_0^m - u_k(t)\right];\\
&v(t) = \sum_{k=1}^{s} v_k(t), \quad \dot{v}_k(t) = \begin{cases} \lambda_k \left[B_k(\sigma_0^m - v_k(t))\right], & B_k\sigma_0^m \geqslant v_k(t),\\ 0, & B_k\sigma_0^m < v_k(t);\end{cases}\\
&\dot{w}(t) = C\sigma^n; \quad \sigma = \sigma_0(1+\omega); \quad \dot{\omega} = \alpha\sigma\dot{p}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь p — деформация ползучести; u, v, w — вязкоупругая, вязкопластическая и вязкая составляющие деформации ползучести (соответственно); σ_0 и σ — соответственно номинальное и истинное напряжение; λ_k, A_k, B_k, C, n, m — константы модели, при помощи которых описывается первая и вторая стадии ползучести материала; ω — параметр повреждённости; α — параметр модели, контролирующий процесс разупрочнения материала на деформации ползучести, который является в общем случае функцией номинального напряжения σ_0 и может быть аппроксимирован зависимостью

$$\alpha = L_1(\sigma_0)^{m_1}, \tag{4}$$

где L_1 и m_1 — параметры аппроксимации (в частных случаях величина может и не зависеть от σ_0 и тогда $\alpha = L_1$). При этом в (3), (4) случайными полагаются величины A_k, B_k, C, L_1, а остальные параметры являются детерминированными.

Для определения времени до разрушения $t = t^*$ используется критерий разрушения энергетического типа

$$\int_0^{t^*} \frac{\sigma\ dp}{A_C^*} = 1, \tag{5}$$

при этом

$$A_C^*(\sigma_0) = L_A(\sigma_0)^{m_A}, \tag{6}$$

где m_A — детерминированная, а L_A — случайная величины.

Таким образом, индивидуальные деформационные свойства конкретного образца определяются набором случайных величин A_k, B_k, C, L_1, L_A, а стохастические свойства совокупности образцов — законами распределения этих случайных величин. Это означает, что каждая реализация кривой ползучести может быть описана при помощи задания конкретных значений величин:

A_k, B_k, C, L_1, L_A, а их законы распределения устанавливаются процедурой идентификации этих параметров по всей совокупности экспериментальных кривых ползучести.

Исходной информацией для построения стохастической модели (3)–(6) для простейшего конструктивного элемента — растягиваемого стержня — является серия экспериментальных кривых ползучести вплоть до разрушения, полученных при нескольких значениях номинального напряжения σ_0, при этом при каждом значении σ_0 желательно иметь несколько экспериментальных реализаций. При наличии такой информации методика построения стохастической модели (3)–(6) состоит из следующих этапов:

1) с использованием осреднённых кривых ползучести при каждом значении σ_0, по методике работы [18] строится детерминированная модель, соответствующая (3)–(6), при этом случайные параметры A_k, B_k, C, L_1, L_A заменяются на детерминированные величины a_k, b_k, c, α_1, α_A соответственно, которые фактически являются математическими ожиданиями для соответствующих случайных величин;
2) далее осуществляется переход от детерминированной к стохастической модели (3)–(6), но параметры n, m, λ_k, m_1, m_A берутся из детерминированной модели, а случайные параметры A_k, B_k, C, L_1, L_A подлежат идентификации;
3) по методике [10] производится вычисление (оценка) величин A_k, B_k, C, L_1, L_A для каждой реализации при всех значениях $\sigma_0 = \mathrm{const}$, т.е. фактически строятся выборки всех пяти случайных величин, после чего устанавливаются законы их распределений;
4) зная законы распределения случайных величин, теоретически, на основании модели (3)–(6), можно прогнозировать деформацию ползучести стержневого элемента конструкции и время до разрушения в вероятностном аспекте при любом законе изменения напряжения $\sigma_0 = \sigma_0(t)$, а также использовать методы оценки надёжности по параметрическим критериям отказа, разработанным, например, в [2].

2. Оценка надёжности стержневого элемента по деформационному критерию отказа. Основная проблема использования модели (3)–(6) состоит в её физической и стохастической нелинейности. Поэтому одним из подходов её решения является использование метода Монте—Карло, который хорошо зарекомендовал себя, в частности, в работах [3, 8, 10, 19–22]. Однако он требует большой трудоемкости и представительной выборки экспериментальных данных по ползучести и длительной прочности материала, получение которых представляет определенные трудности. Для применения аналитических подходов требуется линеаризация стохастической модели, что позволяет успешно применять разработанный В. В. Болотиным [2] аппарат оценки надёжности через вероятность безотказной работы. Так, в результате линеаризации системы (3)–(6) в [23] предложен метод оценки надёжности стержневого элемента из стохастически неоднородного материала в условиях первой и второй стадий ползучести по деформационному критерию отказа, а в работах [9, 24] сделана попытка обобщения данного подхода для оценки надёжности с учётом третьей стадии (но без учёта первой стадии ползучести).

Не нарушая методологичексой общности вопроса, выполним линеаризацию основной стохастической модели (3)–(6) без учета первой стадии ползучести, т.е. полагая $u(t) = v(t) = 0$. Тогда, после введения дополнительных гипотез относительно структуры случайных функций (4) и (6) вида $m_1 = 0$ и $m_A = 0$ система (3)–(6) принимает вид

$$\dot{p} = C\sigma^n(t), \quad \sigma(t) = \sigma_0(t)(1+\omega(t)), \quad \dot{\omega}(t) = \alpha\sigma(t)\dot{p}(t); \tag{7}$$

$$\omega(0) = 0, \quad p(0) = 0, \tag{8}$$

$$\int_0^{t^*} \frac{\sigma dp}{A_C^*} = 1, \tag{9}$$

где C, $\alpha = L_1$ и A_C^* — случайные величины, а n — детерминированная величина.

Решение системы (7) с условиями (8) при $\sigma_0(t) = \sigma_0 = \mathrm{const}$ имеет вид

$$p(t) = -\frac{1}{n\alpha\sigma_0} \ln\left|1 - n\sigma_0^{n+1}\alpha C t\right|. \tag{10}$$

Уравнение (10) является стохастически нелинейным, следовательно, его нельзя использовать в существующей методике оценки надёжности для стохастически линейных моделей, предложенной в [23]. Следовательно, необходимо выполнить линеаризацию (10). Формальное разложение в ряд Тейлора нерационально, так как логарифмический ряд сходится крайне медленно и в соответствующем ряде для достижения заданной точности необходимо удерживать большое количество членов с последующей стохастической оценкой каждого члена при степенях t. Поэтому в настоящей работе применяется метод аппроксимации функции $\ln(1-x)$ степенными полиномами с использованием интегрального метода наименьших квадратов. В работе [9] показано, что достаточно ограничиться полиномами четвертой степени, при этом наилучшая аппроксимация имеет вид

$$\ln(1-x) = -x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4, \tag{11}$$

где $a_1 = -0{,}91048$; $a_2 = 1{,}90612$; $a_3 = -3{,}06057$. Там же показано, что при величине среднеквадратической погрешности $\delta = 5\cdot 10^{-4}$ количество членов формального разложения в ряд Тейлора для функции $y = \ln(1-x)$ равно двенадцати, в то время как в аппроксимации (11) — всего четырём. Таким образом, функцию (10) в дальнейшем будем аппроксимировать выражением (11) с приведёнными значениями величин a_i $(i = 1,2,3)$, т.е. при $\sigma_0 = \mathrm{const}$ имеем

$$p(t) = c\sigma_0^n t + 0{,}911c^2\alpha n\sigma_0^{2n+1}t^2 - 1{,}906c^3\alpha^2n^2\sigma_0^{3n+2}t^3 + \\ + 3{,}061c^4\alpha^3n^3\sigma_0^{4n+3}t^4. \tag{12}$$

Наличие аналитической зависимости (12) позволяет теперь рассмотреть вероятностные методы оценки прочностной надёжности, например, по деформационному критерию отказов, для простейшего конструктивного элемента — стержня.

Основной количественной характеристикой надёжности является вероятность безотказной работы. Она в данном случае определяет вероятность того, что во всех точках материала элемента конструкции выполняется условие прочности

$$p(t) \leqslant p^*,$$

где p^* — назначенный ресурс по предельно допустимой накопленной деформации ползучести.

Функция надёжности $P(t)$, описывающая вероятность безотказной работы на отрезке $[0,t]$, равна вероятности пребывания случайной функции $p(t)$ в допустимой области $(0,p^*)$ на этом отрезке времени [2, 9]:

$$P(t) = P\left\{p(\tau) \in (0,p^*),\ \tau \in [0,t]\right\}. \qquad (13)$$

В связи с тем, что согласно модели (7), (8) деформация ползучести является неубывающей функцией, функция $p(t)$, покинув в некоторый момент времени область $(0,p^*)$, затем в эту область возвратиться не может. Поэтому для вероятности безотказной работы $P(t)$ на отрезке времени $[0,t]$ имеет место более простая формула [2, 9]:

$$P(t) = P\left\{p(t) \in (0,p^*)\right\}.$$

В отличие от общего случая (13), когда вычисление случайной функции требует рассмотрения выбросов случайного процесса, здесь достаточно вычислить вероятность нахождения случайной функции $p(t)$ в заданной области в рассматриваемый момент времени.

Применим изложенную выше методику к оценке надёжности единичного стержня при $\sigma_0(t) = \sigma_0 = \text{const}$, деформация которого описывается моделью (7), (8) и задаётся соотношением (12). Для оценки надёжности необходимо знать математическое ожидание и дисперсию величины $p = p(t)$, которые находятся с использованием разложения (12). Тогда для математического ожидания имеем

$$M[p] = A_1 M[C] + A_2 M[C^2\alpha] + A_3 M[C^3\alpha^2] + A_4 M[C^4\alpha^3], \qquad (14)$$

а дисперсия деформации $p(t)$ определяется по классической формуле

$$\begin{aligned} S_p^2(t) = M_0^2 S_c^2 + M_1^2 S_{c^2\alpha}^2 + M_2^2 S_{c^3\alpha^2}^2 + M_3^2 S_{c^4\alpha^3}^2 + \\ + 2\left[M_0 M_1 K_{c,c^2\alpha} + M_0 M_2 K_{c,c^3\alpha^2} + M_0 M_3 K_{c,c^4\alpha^3} + \right. \\ \left. + M_1 M_2 K_{c^2\alpha,c^3\alpha^2} + M_1 M_3 K_{c^2\alpha,c^4\alpha^3} + M_2 M_3 K_{c^3\alpha^2,c^4\alpha^3}\right]. \qquad (15) \end{aligned}$$

Здесь $M[\cdot]$ — оператор математического ожидания; S_p^2, S_c^2, $S_{c^2\alpha}^2$, $S_{c^3\alpha^2}^2$, $S_{c^4\alpha^3}^2$ — дисперсии соответствующих параметров; $K_{c,c^2\alpha}$, $K_{c,c^3\alpha^2}$, $K_{c,c^4\alpha^3}$, $K_{c^2\alpha,c^3\alpha^2}$, $K_{c^2\alpha,c^4\alpha^3}$, $K_{c^3\alpha^2,c^4\alpha^3}$ — корреляционные моменты; $A_1 = \sigma_0^n t$, $A_2 = 0{,}911 n\sigma_0^{2n+1} t^2$, $A_3 = -1{,}906 n^2 \sigma_0^{3n+2} t^3$, $A_4 = 3{,}061 n^3 \sigma_0^{4n+3} t^4$.

Для реализации методики необходимо «наполнение» соответствующих формул реальными экспериментальными данными. Для апробации методики использовались экспериментальные данные [6, 25] по ползучести при чистом растяжении для 21 образца из одной плавки нержавеющей стали 12Х18Н10Т при температуре 850 °C. Образцы испытывались на ползучесть при чистом растяжении вплоть до разрушения. Номинальные напряжения σ_0 принимали значения 39,24; 49,05; 58,86; 78,48 МПа. Результаты эксперимента представлены в табл. 1. Здесь $\dot p_0 = \dot p(0+0)$ — начальная скорость установившейся ползучести, t_1 и p_1 — экспериментальные значения времени и деформации ползучести в момент разрушения.

Таблица 1

Результаты эксперимента и результаты расчёта случайных величин C, α

п/п	№ обр.	σ_0, МПа	$\dot{p_0}$, час$^{-1}$	t_1, час	p_1	$C \cdot 10^9$	α	A_C^*
1	5	39,24	0,00080	35	0,048	6,365	0,198	2,277
2	11		0,00081	40	0,085	6,435	0,223	4,932
3	16		0,00080	47	0,152	6,365	0,208	11,820
4	13		0,00084	66	0,234	6,673	0,142	18,916
5	30		0,00084	67	0,110	6,673	0,111	5,537
6	32		0,00081	68	0,125	6,435	0,124	6,751
7	24	49,05	0,0023	18	0,080	8,947	0,119	4,951
8	22		0,0019	20,5	0,090	7,391	0,141	6,061
9	23		0,0019	21,5	0,110	7,391	0,143	8,134
10	27		0,0019	22,5	0,093	7,391	0,125	6,137
11	26		0,0021	24	0,130	8,169	0,114	9,312
12	29		0,0017	28	0,120	6,613	0,120	8,558
13	28		0,0014	30	0,080	5,446	0,117	4,983
14	15	58,86	0,0037	6,7	0,065	8,031	0,194	5,701
15	31		0,0027	14	0,047	5,861	0,051	2,968
16	17		0,0023	15	0,073	4,992	0,127	5,691
17	7		0,0023	16	0,050	4,992	0,069	3,266
18	14		0,0033	20	0,170	7,163	0,073	14,758
19	21		0,0023	20,5	0,090	4,992	0,087	6,737
20	39	78,48	0,0110	6	0,130	9,510	0,048	13,177
21	37		0,0045	6	0,118	3,890	0,146	18,796

Значения C и α находятся по результатам экспериментов для каждого образца (каждой реализации) при $n = 3{,}2$ (определено в [6, 25]), при этом величина C в соответствии (7) определяется из соотношения

$$C = \dot{p_0}/\sigma_0^n.$$

После нахождения величины C значение α для каждой кривой ползучести определяется из условия прохождения графика через точку разрушения (p_1, t_1), т.е. из решения уравнения (10) относительно α при известных $p(t_1) = p_1$, $t = t_1$, C, σ_0, n. После определения C и α по формуле (5) рассчитывается величина работы разрушения A_C^* для каждой реализации при фиксированных σ_0. Результаты расчётов величин C, α и A_C^* представлены в табл. 1. Анализ этих данных позволяет ввести гипотезы, согласно которым в (4) и (6) можно положить $m_1 = 0$ и $m_A = 0$ соответственно.

Поскольку выборки случайных величин C и α известны, не составляет труда найти выборки случайных величин $C^2\alpha, C^3\alpha^2$ и $C^4\alpha^3$, а затем математические ожидания, дисперсии и коэффициенты корреляции случайных величин C, α, A_C^*, $C^2\alpha$, $C^3\alpha^2$, $C^4\alpha^3$. Результаты вычислений представлены в табл. 2 и 3. Далее с использованием полученных данных конкретизируются функции для математического ожидания и дисперсии (формулы (14) и (15) соответственно).

При известных математическом ожидании и дисперсии вычисляется вероятность безотказной работы $P(t)$, при этом величина критической (допустимой) деформации p^* в модельных расчётах полагается равной 0,04:

$$P(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} S_{p(t)}} \int_0^{0,04} \exp\left(\frac{-(x - M[p(t)])^2}{2S_{p(t)}^2}\right) dx. \qquad (16)$$

Таблица 2

Математические ожидания и дисперсии случайных величин

Случайная величина	C	α	$C^2\alpha$	$C^3\alpha^2$	$C^4\alpha^3$	A_C^*
Мат. ожидание	$6{,}65 \cdot 10^{-9}$	0,128	$5{,}80 \cdot 10^{-18}$	$5{,}86 \cdot 10^{-27}$	$6{,}58 \cdot 10^{-36}$	7,442
Дисперсия	$1{,}80 \cdot 10^{-18}$	0,002	$8{,}28 \cdot 10^{-36}$	$2{,}32 \cdot 10^{-53}$	$5{,}52 \cdot 10^{-71}$	9,477

Таблица 3

Корреляционная матрица случайных величин

	C	$C^2\alpha$	$C^3\alpha^2$	$C^4\alpha^3$	A_C^*
C	1	0,618	0,455	0,367	0,007
$C^2\alpha$		1	0,966	0,908	−0,201
$C^3\alpha^2$			1	0,984	−0,271
$C^4\alpha^3$				1	−0,294
A_C^*					1

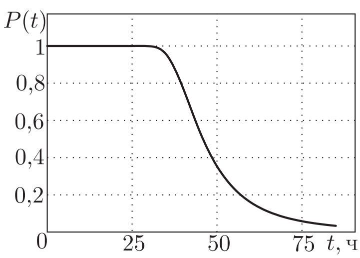

Рис. 2. Вероятность безотказной работы $P(t)$ растягиваемого стержня при $\sigma_0 = 39{,}24$ МПа

Таблица 4

Примеры расчёта вероятности безотказной работы

σ_0	$P(t)$	$t_{\text{расч}}$, час	$t_{\text{эксп}}$, час
39,24	0,99 0,95 0,9	24,5 26,5 27,7	32,9; 29; 28,4; 28,4; 32,9; 29,7
49,05	0,99 0,95 0,9	11 11,9 12,4	12; 13,55; 14,2; 15,2; 20; 13,55; 13,55
58,86	0,99 0,95 0,9	5,7 6 6,3	6; 10,3; 11,7; 12,8; 13,5; 14,5
78,48	0,99 0,95 0,9	1,94 2 2,15	3,14; 4,2

На рис. 2 в качестве примера приведена функция $P(t)$, полученная при $\sigma_0 = 39{,}24$ МПа. В табл. 4 приведены расчётные значения времени отказа ($t_{\text{расч}}$) по всей совокупности образцов с вероятностями 0,9; 0,95 и 0,99. Здесь же представлены экспериментальные значения времени отказа ($t_{\text{эксп}}$) для каждой реализации (время, при котором конкретная реализация достигает значения $p^* = 0{,}04$). При этом значения $t_{\text{эксп}}$ определялись из графиков, приведенных в [25].

Как следует из анализа данных табл. 4, при уровне вероятности 0,99 все экспериментальные значения (правый столбец таблицы) лежат правее времени безотказной работы, вычисленного по формуле (16), при значениях вероятности 0,95 и 0,9 имеются экспериментальные значения времени безотказной работы, которые лежат левее расчётного значения, т.е. имеются «выбросы» из расчётного значения ресурса. Поэтому в прикладных расчётах рекомендуется использовать величину вероятности 0,99.

Таким образом, разработанный подход позволяет аналитическими методами прогнозировать величину назначенного ресурса для стержня по деформационному критерию отказа.

3. Обобщённая стохастическая модель ползучести и длительной прочности элемента конструкций. Во введении данной статьи отмечалась возможность построения обобщённой реологической модели элемента конструкции с использованием формальной аналогии кривых одноосной ползучести и кривых деформирования элементов конструкций в координатах «обобщённое перемещение — время» при фиксированном внешнем воздействии.

Однако ввиду большого разнообразия элементов конструкций сразу же возникает вопрос о том, какой должна быть для них структура определяющих соотношений и методология их построения; какие ограничения кинематического и силового характера должны выполняться.

Введём понятие пропорционального нагружения. Пусть обобщённая плотность поля внешних нагрузок задаётся формулой

$$\bar{\alpha}(\bar{r},t) = \bar{\alpha}_V(\bar{r},t) + \bar{\alpha}_s(\bar{r}_s,t)\delta(r-r_s) + \sum_i \bar{\alpha}_i(\bar{r}_i,t)\delta_V(\bar{r}-\bar{r}_i), \tag{17}$$

где $\bar{r}$ — радиус-вектор рассматриваемой точки; $\bar{\alpha}_V(\bar{r},t)$ — объёмная плотность нагрузки; $\bar{\alpha}_s(\bar{r}_s,t)$ — поверхностная плотность нагрузки, заданная на поверхности $r_s = r_s(\phi,\theta)$ (ϕ, θ — углы в сферической системе координат); $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака скалярного аргумента; $\bar{\alpha}_i(\bar{r}_i,t)$ — сосредоточенная сила в точке $\bar{r} = \bar{r}_i$; $\delta_V(\bar{r})$ — «объёмная» дельта-функция Дирака векторного аргумента.

Таким образом, в формуле (17) учитываются три вида нагрузок: распределенные по объёму, по поверхности, а также сосредоточенные силы.

Будем называть нагружение пропорциональным, если обобщённая плотность (17) имеет вид

$$\bar{\alpha}(\bar{r},t) = \left[\bar{\alpha}_V(\bar{r}_V) + \bar{\alpha}_s(\bar{r}_s)\delta(r-r_s) + \sum_i \bar{\alpha}_i(\bar{r}_i)\delta_V\,(\bar{r}-\bar{r}_i)\right] q(t) = \\ = \bar{\alpha}_0(\bar{r})q(t). \tag{18}$$

Обозначим через $\bar{p}(\bar{r},t)$ поле перемещений, заданное во всех точках, где действует нагрузка (17). Поле перемещений будем называть пропорциональным, если

$$\bar{p}(\bar{r},t) = \bar{\beta}(\bar{r})\varepsilon(t). \tag{19}$$

Для многих краевых задач выполнение (19) автоматически следует из кинематических гипотез, накладываемых на перемещения. В качестве примера можно привести гипотезу плоских сечений при чистом изгибе балки или раздаче толстостенного цилиндра при действии внутреннего давления, гипотезу прямых радиусов при кручении вала.

Соотношение (19) с высокой точностью будет выполняться для элементов конструкций с локализованной внешней нагрузкой. Действительно, если объёмные силы отсутствуют, то выполнение условия (19) надо контролировать лишь на поверхности, где действуют поверхностные силы, или в точках приложения сосредоточенных усилий, т. е. пропорциональность перемещений должна проверяться лишь на нагруженной части граничной поверхности.

Вычислим работу, совершаемую внешними нагрузками (18) на перемещениях (19):

$$A(t) = \int_0^t \iiint_V \bar{\alpha}(\bar{r},\tau)d_\tau\bar{p}(\bar{r},\tau)dV - \iiint_V \bar{\alpha}_0(\bar{r})\bar{\beta}(\bar{r})dV \int_0^t q(\tau)d\varepsilon(\tau)$$

или

$$A(t) = c^* \int_0^t q(\tau)d\varepsilon(\tau), \tag{20}$$

где c^* — величина интеграла по пространственным координатам.

Из (20) следует, что при выполнении условий (18) и (19) работа внешних нагрузок с точностью до константы записывается так же, как для одноосного растяжения стержня. При этом роль «напряжения» играет $q(t)$, а $\varepsilon(t)$ — роль «деформации».

Далее величина $q(t)$ будет называться обобщённой нагрузкой, а $\varepsilon(t)$ — обобщённым перемещением. Выражение (20) позволяет ввести гипотезу: исследование деформирования элемента конструкций, для которого выполняются условия (18), (19), следует вести в соответствии с методологией, разработанной в случае одноосного напряженного состояния для растягиваемого стержня. В связи с изложенным в качестве определяющих уравнений, связывающих ε и q, используем уравнения (3)–(6) с заменой σ на q, а под ε будем понимать обобщённое перемещение:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon = e + p, \qquad e = q/G, \quad p = u + v + w;\\
&u(t) = \sum_{k=1}^{s} u_k(t), \quad \dot{u_k}(t) = \lambda_k \left[A_k q_0^m - u_k(t)\right];\\
&v(t) = \sum_{k=1}^{s} v_k(t), \quad v_k(t) = \begin{cases} \lambda_k \left[B_k(q_0^m - v_k(t))\right], & B_k q_0^m \geqslant v_k(t),\\ 0, & B_k q_0^m < v_k(t);\end{cases}\\
&\dot{w}(t) = C q^n; \quad q = q_0(1+\omega); \quad \dot{\omega} = \alpha q \dot{p}; \quad \alpha = L_1(q_0)^{m_1}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Здесь ε — полное обобщённое перемещение; e — упругая компонента ε; p — компонента обобщённого перемещения, вызванная ползучестью; u, v, w — вязкоупругая, вязкопластическая и вязкая составляющие p соответственно; G — интегральная (либо локальная) упругая податливость в заданной точке; q_0 и q — соответственно номинальное и истинное значение обобщённой нагрузки;A_k, B_k, C, L_1 — случайные величины; λ_k, n, m, m_1 — детерминированне параметры; ω — параметр повреждённости.

В частных случаях может выполняться $\alpha = L_1$ (в последнем соотношении (21) величина $m_1 = 0$).

Величину «фиктивной» (истинной) нагрузки q можно трактовать следующим образом. В процессе неупругого деформирования конструктивного элемента происходит накопление поврежденности (появление микротрещин, микропор и т.п.), что ведет к увеличению величины обобщённой плотности поля внешних нагрузок при $q_0 = \text{const}$. Поэтому, записывая кинетику для обобщённой плотности $\bar{\alpha}(\bar{r}, t)$ с учетом микроповрежденности в виде

$$\bar{\alpha}(\bar{r}, t) = \bar{\alpha}_1(\bar{r}, t)(1+\omega),$$

где $\bar{\alpha}_1(\bar{r}, t)$ — обобщённая плотность внешних нагрузок в неповрежденном состоянии, ω — параметр повреждённости, из (18) сразу получаем соотношение $q = q_0(1+\omega)$.

В качестве критерия разрушения (локального или интегрального) конструктивного элемента формально можно использовать соотношение типа (5), записанное для обобщённых перемещений и нагрузок:

$$\int_0^{t^*} \frac{q(t)\ dp}{A_C^*(q_0)} = 1, \tag{22}$$

где t^* — время разрушения; $A_C^*(q_0)$ в общем случае имеет вид

$$A_C^*(q_0) = L_A(q_0)^{m_A}$$

и имеет тот же смысл, что и в (5). Здесь L_A — случайная, а m_A — детерминированная величины. В частных случаях возможно выполнение $m_A = 0$, т. е. $A_C^* = L_A$.

Конечно, далеко не все практически важные задачи исчерпываются случаем (18). Поле внешних нагрузок может иметь несколько степеней свободы, и тогда следует рассматривать нагрузки вида

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_0\left(\bar{r}, q_1(t), q_2(t), \ldots, q_m(t)\right).$$

Теперь обобщённая нагрузка представляет собой векторную величину

$$x(t) = \left(\bar{r}, q_1(t), q_2(t), \ldots, q_m(t)\right).$$

Анализ поля внешних нагрузок с несколькими степенями свободы для элемента конструкции может иметь аналогию с использованием поведения материала при сложном напряженном состоянии. Однако прямое перенесение на элемент конструкции уравнений для материала в условиях сложного напряженного состояния проблематично, поскольку требует дополнительных исследований. Поэтому в дальнейшем ограничимся случаем однопараметрического нагружения.

4. Обобщённая стохастическая модель неупругого деформирования и разрушения толстостенной трубы при действии внутреннего давления. В качестве иллюстрации предложенного подхода рассмотрим пример построения обобщённой стохастической модели ползучести толстостенной трубы с внутренним радиусом R_1 и внешним R_2, нагруженной внутренним давлением q. Роль обобщённой силы q обобщённой модели конструкции (21), (22) играет внутреннее давление, а в качестве обобщённого перемещения ε можно выбрать окружную деформацию, например, на внутренней поверхности трубы ε_θ, связанной с реальным перемещением соотношением $U_r = R_1\varepsilon_\theta$ (используется классическая цилиндрическая система координат θ, r, z) К моделированию стохастических свойств специфического «образца» (толстостенной трубы) применим подход, аналогичный случаю одноосного образца (см. рис. 1) Учитывая тренд механических свойств материала, будем считать, что в пределах одного «образца» (толстостенной трубы конечной длины) случайные механические характеристики принимают конкретные значения, которые, однако, изменяются при переходе к другому «образцу». Тогда в модели (21) для конкретного «образца» (толстостенной трубы) случайные параметры принимают также конкретные значения, но в каждом «образце» — разные. Статистические оценки этих параметров можно найти обработкой соответствующих «выборок».

Таким образом, методика построения стохастической обобщённой модели конструкции (21), (22) полностью аналогична методике построения стохастической модели для одноосного образца (3)–(6), и если для модели (3)–(6) исходными данными являлись экспериментальные кривые одноосной ползучести в координатах «деформация ползучести – время» при $\sigma_0 = \mathrm{const}$, то для «образца» (толстостенной трубы) такой информацией являются обобщённые кривые ползучести в координатах «окружная деформация ε_θ – время t» при $q_0 = \mathrm{const}$, получить которую можно либо экспериментально, либо из решения соответствующей краевой задачи для толстостенной трубы по известным стохастическим соотношениям для материала, из которого изготовлена труба. Если имеется возможность получения необходимой статистической информации путём эксперимента над толстостенными «образцами», то тогда стохастическая информация о свойствах материала вообще не нужна. Однако этот путь — трудоёмкий и в условиях ползучести практически неосуществимый. Поэтому в настоящей работе соответствующая статистическая информация получена в результате численного эксперимента решением соответствующей краевой задачи о ползучести толстостенной трубы на основании известной информации о материале, методика решения которой детально изложена в работах [18, 26].

В качестве модельного примера использована толстостенная труба с внутренним $R_1 = 13$ мм и внешним $R_2 = 16$ мм радиусами из стали 12Х18Н10Т при температуре 850 °С, поскольку все статистические свойства этого материала приведены в п. 1. Так как первая стадия ползучести у этой стали отсутствует, то и первой стадией у обобщённой модели трубы, вызванной перераспределением напряжений по радиусу, можно пренебречь в силу ее малости.

Тогда, полагая в (21) $u = v = 0$ и $q_* = 1$, для обобщённой реологической модели трубы (аналогично (7)–(9)) получим

$$\dot p_\theta(t) = Cq^n(t); \quad q = q_0(1+\omega); \quad \dot\omega = \alpha q \dot p_\theta, \qquad \int_0^{t^*} \frac{q(t)d\dot p_\theta(t)}{A_C^*} = 1, \tag{23}$$

где $p_\theta(t)$ — окружная компонента деформации ползучести на внутреннем радиусе $r = R_1$;

$$\alpha = L_1(q_0)^{m_1}, \quad A_C^*(q_0) = L_A(q_0)^{m_A}. \tag{24}$$

В соответствии с изложенной выше методикой (п. 1) для определения детерминированных параметров n, m_1, m_A модели (23), (24) получены стационарные обобщённые кривые ползучести в координатах «окружная деформация ползучести p_θ – время t» при фиксированных значениях давления $q_0 = \{6{,}5; 8{,}2; 10{,}23; 12{,}28; 16; 37\}$ МПа и усреднённых значениях параметров модели материала: c, α, A_C^* (см. табл. 2) на основании решения краевой задачи о ползучести толстостенной трубы по методике [18, 26], которые представлены на рис. 3 сплошными линиями. По этим данным численного эксперимента построена детерминированная обобщённая модель толстостенной трубы со следующими значениями параметров $n = 3{,}05$, $m_1 = 0$, $m_A = 0$, $c = 1{,}34 \cdot 10^{-6}$, $\alpha = 0{,}6$; $A_C^* = 1{,}7$. Данные расчёта по детерминированной обобщённой модели (23), (24) при стационарных режимах нагружения приведены на рис. 3, а при нестационарных режимах — на рис. 4 штриховыми линиями, при этом наблюдается хорошее их согласование с данными численного эксперимента на основе решения краевой задачи.

Для построения стохастической модели также выполнен численный эксперимент следующего характера. Так как по вышеизложенному случайные свойства параметров C, $\alpha = L_1$ и A^*_C модели материала (7)–(9) в пределах одного «образца» (толстостенной трубы) имеют постоянные значения, но изменяются случайным образом от одного образца к другому, то с использованием статистической информации (табл. 1 и 2) для модели материала генерировались выборки случайных величин C, α и A^*_C, для каждой из которых решалась условно «детерминированная» краевая задача для толстостенной трубы при фиксированных значениях давления $q_0 = \mathrm{const}$. Для каждого уровня нагрузки $q_0 = \{5{,}5; 6{,}5; 8{,}2\}$ МПа расчётным путём получено по 21 реализации обобщённых кривых ползучести. В частности, в качестве примера на рис. 5 приведены результаты генерации реализаций при двух уровнях внутреннего давления. По данным статистической информации (63 реализации) аналогично случаю одноосного растяжения (п. 1) определены значения случайных параметров C, $\alpha = L_1$ и $A^*_C = L_A$ для каждой реализации, вычислены математические ожидания и дисперсии этих случайных параметров. Тем самым и заканчивается построение обобщённой стохастической модели (23), (24) для данного конкретного случая.

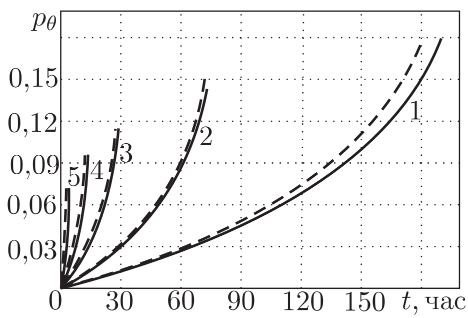

Рис. 3. Расчётные обобщённые кривые ползучести толстостенной трубы из стали 12Х18Н10Т при температуре 850 °C в координатах «окружная деформация ползучести – время»: сплошные линии — решение краевой задачи; штриховые линии — расчёт по модели (23), (24); цифры: 1 — $q_0 = 6{,}5$ МПа; 2 — $q_0 = 8{,}2$ МПа; 3 — $q_0 = 10{,}23$ МПа; 4 — $q_0 = 12{,}28$ МПа; 5 — $q_0 = 16{,}37$ МПа

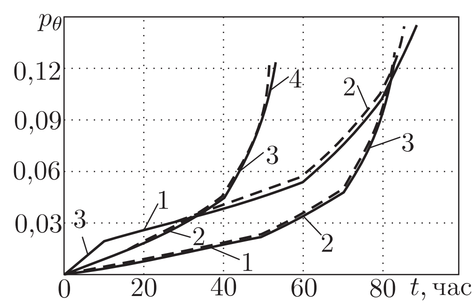

Рис. 4. Расчётные обобщённые кривые ползучести толстостенной трубы из стали 12Х18Н10Т при температуре 850 °C в координатах «окружная деформация ползучести – время» при переменных режимах нагружения: сплошные линии — решение краевой задачи; штриховые линии — расчёт по модели (23), (24); цифры: 1 — $q_0 = 6{,}5$ МПа; 2 — $q_0 = 8{,}2$ МПа; 3 — $q_0 = 10{,}23$ МПа; 4 — $q_0 = 12{,}28$ МПа; 5 — $q_0 = 16{,}37$ МПа

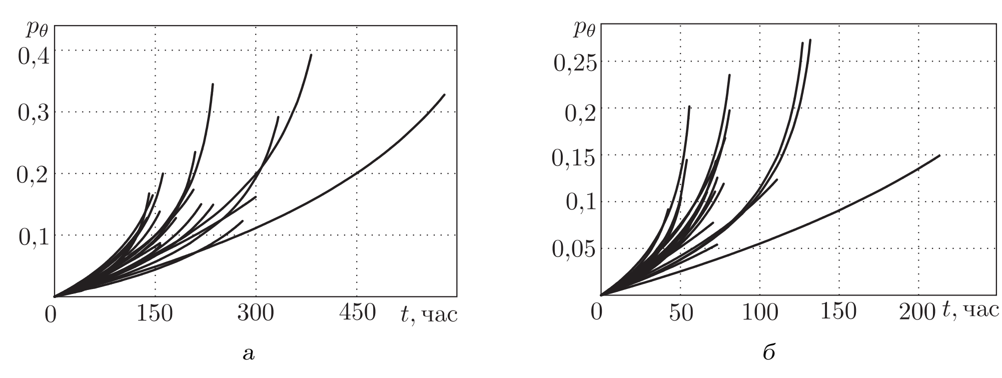

Рис. 5. Обобщённые кривые ползучести толстостенной трубы из стали 12Х18Н10Т при температуре 850 °C в координатах «окружная деформация ползучести – время» в условиях квазистатического нагружения: *а*) $q_0 = 6{,}5$ МПа; *б*) $q_0 = 8{,}2$ МПа

5. Применение обобщённой стохастической модели к оценке надёжности толстостенной трубы. Сравнивая стохастическую одномерную модель для растягиваемого стержня (7)–(9) и обобщённую стохастическую модель для толстостенной трубы (23), (24), можно убедиться в их идентичности, т.е. модель (23), (24) может быть получена из (7)–(9) заменой σ_0 на q_0, σ на q и p на p_θ. Таким образом, разработанную в пункте 2 методику оценки надёжности для стержневого образца можно формально перенести и на оценку надёжности толстостенной трубы. Для рассматриваемого конкретного примера трубы из стали 12Х18Н10Т при температуре 850 °С, используя формулы типа (14) и (15), определялись соответственно математическое ожидание и дисперсии величины p_θ по 63 реализациям, а далее по формуле типа (16) находилась вероятность безотказной работы по деформационному критерию, при этом величина допустимой окружной деформации p_θ^* полагалась равной 0,05. В табл. 5 приведены результаты расчёта времени безотказной работы $t_{\text{расч}}$ при трёх уровнях вероятности для трёх значений внутреннего давления q_0, полученные на основании обобщённой модели трубы (23), (24), а также значения времени $t_{\text{эксп}}$ достижения конкретными реализациями значения $p_\theta^* = 0{,}05$, полученные в результате численного эксперимента на основе решения краевой задачи.

Таблица 5

Примеры расчёта времени отказа толстостенной трубы по деформационному критерию при различных значениях вероятности

q_0, МПа	$P(t)$	$t_{\text{расч}}$, час	$t_{\text{эксп}}$, час
8,2	0,99	29,7	68; 41; 91; 61; 47; 42; 38;
	0,95	32,1	49; 48; 58; 46; 30; 38; 35;
	0,9	33,7	69; 37; 43; 41; 61; 31; 44
6,5	0,99	68,8	70; 79; 87; 85; 153; 93; 122;
	0,95	74,9	93; 100; 100; 100; 162; 137; 112;
	0,9	78,7	91; 117; 89; 75; 88; 113; 116
5,5	0,99	115,3	180; 179; 258; 176; 322; 153; 205;
	0,95	125,9	259; 118; 139; 160; 202; 160; 118;
	0,9	132,5	141; 212; 167; 178; 189; 161; 219

Из анализа табл. 5 следует, что для вероятности $P(t) = 0{,}9$ по два образца для каждого режима нагружения не удовлетворяют назначенному ресурсу $t_{\text{расч}}$ ($t_{\text{эксп}}$ лежит левее $t_{\text{расч}}$); для $P(t) = 0{,}95$— по два образца при $q_0 = 8{,}2$ и $q_0 = 5{,}5$ МПа и один при $q_0 = 6{,}5$ МПа, а уже при вероятности $P(t) = 0{,}99$ времена отказа всех конкретных реализаций лежат правее $t_{\text{расч}}$, т. е. попадают в область назначенного ресурса.

Выводы. Выполненные исследования обосновывают целесообразность разработки обобщённых стохастических моделей элементов конструкций, демонстрируют эффективность их применения для оценки надёжности конструкций по параметрическим (деформационным) критериям отказа в условиях ползучести. На конкретных примерах показано, что рекомендуемая вероятность должна составлять величину порядка 0,99.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 10–01–0064-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Физматгиз, 1966. 752 с. [*Rabotnov Yu. N.* Creep of Structural Elements. Moscow: Fizmatgiz, 1966. 752 pp.]

2. *Болотин В. В.* Прогнозирование ресурса машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1984. 312 с.; англ. пер.: *Bolotin V. V.* Prediction of service life for machines and structures. New York: ASME Press, 1989. 395 pp.
3. *Самарин Ю. П.* О применении стохастических уравнений в теории ползучести материалов // *Изв. АН СССР. МТТ*, 1974. №1. С. 88–94. [*Samarin Yu. P.* Use of stochastic equations in the theory of creep of materials // *Izv. AN. SSSR. MTT*, 1974. no. 1. Pp. 88–94].
4. Термопрочность деталей машин / ред. И. А. Биргер, Б. Ф. Шорр. М.: Машиностроение, 1975. 456 с. [Thermal Resistance of Machine Parts / eds. I. A. Birger, B. F. Shorr. Moscow: Mashinostroenie, 1975. 456 pp.]
5. *Бадаев А. Н.* К вопросу об определении функции распределения параметров уравнения состояния ползучести // *Пробл. прочности*, 1984. №12. С. 22–26; англ. пер.: *Badaev A. N.* Determination of the distribution function of the parameters of a creep equation of state // *Strength of Materials*, 1984. Vol. 16, no. 12. Pp. 1668–1673.
6. *Локощенко А. М., Шестериков С. А.* Методика описания ползучести и длительной прочности при чистом растяжении // *Ж. прикл. механики и технич. физики*, 1980. №3. С. 155–159; англ. пер.: *Lokoshchenko A. M., Shesterikov S. A.* Method for description of creep and long-term strength with pure elongation // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1980. Vol. 21, no. 3. Pp. 414–417.
7. *Самарин Ю. П.* Стохастические механические характеристики и надёжность конструкций с реологическими свойствами / В сб.: *Ползучесть и длительная прочность конструкций.* Куйбышев: КПтИ, 1986. С. 8–17. [*Samarin Yu. P.* Stochastic Mechanical Properties and Reliability of Structures with Rheological Properties / In: *Creep and Long-Term Strength of Structures.* Kuibyshev: KPtI, 1986. Pp. 8–17].
8. *Радченко В. П.* Прогнозирование ползучести и длительной прочности материалов на основе энергетического подхода в стохастической постановке // *Пробл. прочности*, 1992. №2. С. 34–40; англ. пер.: *Radchenko V. P.* Prediction of creep and creep-rupture strength of materials on the basis of an energy approach in a stochastic formulation // *Strength of Materials*, 1992. Vol. 24, no. 2. Pp. 153–161.
9. *Шершнева М. В.* Метод расчёта ресурса стержневых конструкций на основе энергетического варианта ползучести и длительной прочности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. №1(26). С. 141–149. [*Shershneva M. V.* Calculation method for frame construction life prediction on the basis of creep and endurance of energy type // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012. no. 1(26). Pp. 141–149].
10. *Радченко В. П., Симонов А. В., Дудкин С. А.* Стохастический вариант одномерной теории ползучести и длительной прочности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2001. №12. С. 73–84. [*Radchenko V. P., Simonov A. V., Dudkin S. A.* Stochastic version of the one-dimensional theory of creep and long-term strength // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2001. no. 12. Pp. 73–84].
11. *Радченко В. П., Попов Н. Н.* Стохастические характеристики полей напряжений и деформаций при установившейся ползучести стохастически неоднородной плоскости // *Изв. вузов. Машиностроение*, 2006. №2. С. 3–11. [*Radchenko V. P., Popov N. N.* Stochastic characteristics of stress and strain fields in steady-state creep of stochastically inhomogeneous plane // *Izv. Vuzov. Mashinostroenie*, 2006. no. 2. Pp. 3–11].
12. *Коваленко Л. В., Попов Н. Н., Радченко В. П.* Решение плоской стохастической краевой задачи ползучести // *ПММ*, 2009. Т. 73, №6. С. 1009–1016; англ. пер.: *Kovalenko L. V., Popov N. N., Radchenko V. P.* Solution of the plane stochastic creep boundary value problem // *J. Appl. Math. Mech.*, 2009. Vol. 73, no. 6. Pp. 727–733.
13. *Исуткина В. Н.* Разработка аналитических методов решения стохастических краевых задач установившейся ползучести для плоского деформированного состояния: Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Самара, 2007. 18 с. [*Isutkina V. N.* Development of analytical methods for solving stochastic boundary value problems of steady-state creep for a flat strain state: Abstract of Ph. D. Thesis (Phys. & Math.). Samara, 2007. 18 pp.]
14. *Попов Н. Н., Радченко В. П.* Нелинейная стохастическая задача ползучести неоднородной плоскости с учётом повреждённости материала // *ПМТФ*, 2007. Т. 48, №2. С. 140–

146; англ. пер.: *Popov N. N., Radchenko V. P.* Nonlinear stochastic creep problem for an inhomogeneous plane with the damage to the material taken into account // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2007. Vol. 48, no. 2. Pp. 265–270.

15. *Самарин Ю. П.* О применении теории управления к исследованию ползучести конструкций / В сб.: *Механика деформируемых сред.* Куйбышев: Куйб. госуниверситет, 1976. С. 123–129. [*Samarin Yu.P.* Use of control theory to study the creep of structures / In: *Mechanics of Deformed Media.* Kuibyshev: Kuibyshev Univ., 1976. Pp. 123–129].
16. *Самарин Ю. П.* Метод исследования ползучести в конструкциях, основанный на концепции черного ящика / В сб.: *Теоретико-экспериментальный метод исследования в конструкциях.* Куйбышев: КуАИ, 1984. С. 3–27. [*Samarin Yu.P.* The method of investigation for creep in structures a based on black-box concept / In: *Theoretical and experimental method of research in construction.* Kuibyshev: KuAI, 1984. Pp. 3–27].
17. *Ерёмин Ю. А., Кайдалова Л. В., Радченко В. П.* Исследование ползучести балок на основе аналогии структуры уравнения состояния материала и элементов конструкций // *Машиноведение*, 1983. № 2. С. 67–74. [*Eremin Yu. A., Kaidalova L. V, Radchenko V. P.* Investigation of creep in beams a based on analogy of structure equation of material and structural elements state // *Mashinovedenie*, 1983. no. 2. Pp. 67–74].
18. *Радченко В. П., Ерёмин Ю. А.* Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций. М.: Машиностроение-1, 2004. 264 с. [*Radchenko V. P., Eremin Yu. A.* Rheological Deformation and Fracture of Materials and Structural Elements. Moscow: Mashinostroenie-1, 2004. 264 pp.]
19. *Бадаев А. Н., Голубовкий Е. Р., Баумштейн М. В., Булыгин И. П.* О статистическом моделировании характеристик ползучести конструкционных материалов // *Пробл. прочности*, 1982. № 5. С. 16–20; англ. пер.: *Badaev A. N., Gelubovskii E. R., Baumshtein M. V., Bulygin I. P.* Statistical modeling of the creep characteristics of structural materials // *Strength of Materials*, 1982. Vol. 14, no. 5. Pp. 584–589.
20. *Бадаев А. Н.* К вопросу об определении функции распределения параметров уравнения состояния ползучести // *Пробл. прочности*, 1984. № 12. С. 22–26; англ. пер.: *Badaev A. N.* Determination of the distribution function of the parameters of a creep equation of state // *Strength of Materials*, 1984. Vol. 16, no. 12. Pp. 1668–1673.
21. *Ковпак В. И., Бадаев А. Н.* Унифицированный подход к прогнозированию ползучести. Вопросы жаропрочных материалов в статистическом аспекте / В сб.: *Унифицированные методы определения ползучести и длительной прочности.* М.: Изд-во стандартов, 1986. С. 51–62. [*Kovpak V. I., Badaev A. N.* A Unified Approach to the Prediction of Creep. Issues of Heat-Resistant Materials in the Statistical Aspect / In: *Unified Methods of Determining Creep and Creep-Rupture Strength.* Moscow: Izd-vo Standartov, 1986. Pp. 51–62].
22. *Исуткина В. Н., Маргаритов А. Ю.* Сравнительный анализ решений стохастической краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы на основе методов малого параметра и Монте–Карло // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006. № 43. С. 116–123. [*Isutkina V. N., Margaritov A. Yu.* A comparative analysis of solutions for stochastic boundary-value problem of the steady-state creep for thick-walled pipe on the basis of the small-parameter method and Monte Carlo simulation // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2006. no. 43. Pp. 116–123].
23. *Самарин Ю. П., Павлова Г. А., Попов Н. Н.* Оценка надёжности стержневых конструкций по критерию деформационного типа // *Пробл. машиностр. и надёжн. машин*, 1990. № 4. С. 53–60. [*Samarin Yu.P., Pavlova G. A., Popov N. N.* Reliability estimation of beam structures by criterion of deformation type // *Probl. Mashinostr. Nadezhn. Mash.*, 1990. no. 4. Pp. 53–60].
24. *Попов Н. Н., Павлова Г. А., Шершнёва М. В.* Оценка надёжности стержневых элементов конструкций из стохастически неоднородного разупрочнённого материала в условиях ползучести на основе параметрического критерия отказа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. № 5(21). С. 117–124. [*Popov N. N., Pavlova G. A., Shershneva M. V.* Reliability estimation of stochastic heterogeneous rod

constructional elements by the use of parametric failure criterion // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2010. no. 5(21). Pp. 117–124].

25. *Соснин О. В., Никитенко А. Ф., Горев Б. В.* Определение параметров кривых ползучести при наличии всех стадий процесса ползучести / В сб.: *Расчёты и испытания на прочность. Расчетные методы определения несущей способности и долговечности элементов машин и конструкций. Метод определения параметров кривых ползучести и накопления повреждений при одноосном нагружении*: Метод. рекомендации. М.: ВНИИНМАШ, 1982. С. 29–37. [*Sosnin O. V., Nikitenko A. F., Gorev B. V.* Definition of creep curves parameters by the presence of all stages of creep process / In: *Calculations and tests of strength. Calculated methods for determining the bearing capacity and durability of machine elements and structures. The method of creep curves parameters determination and the accumulation of damage under uniaxial loading*: Methodological Specifications. Moscow: VNIINMASh, 1982. Pp. 29–37].
26. *Радченко В. П., Кубышкина С. Н.* Математическая модель реологического деформирования и разрушения толстостенной трубы // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 1998. №6. С. 23–34. [*Radchenko V. P., Kubyshkina S. N.* A mathematical model of rheological deformation and fracture for thick-walled pipe // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 1998. no. 6. Pp. 23–34].

Поступила в редакцию 31/V/2012;
в окончательном варианте — 27/VII/2012.

MSC: 74S60; 74K10, 60H30

EVALUATION OF THE RELIABILITY OF STRUCTURES UNDER CREEP FOR STOCHASTIC GENERALIZED MODELS

V. P. Radchenko, M. V. Shershneva, S. N. Kubyshkina

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mails: radch@samgtu.ru, mary-sofya@mail.ru, kubsn@yandex.ru

The nonlinear stochastic model of uniaxial creep and creep rupture strength with three stages of deformation is suggested. The method for the identification of stochastic parameters of model by series of experimental creep curves is developed. The stochastic linearization of model for analytical evaluation of the probability of no-failure for stretchable rod by deformation criterion is obtained. The checking of accordance of the method with the experimental data for the creep of samples made of 12Kh18N10T steel under temperature 850 °C is implemented. The generalization of the approach developed to describe the deformation of structural elements of constructions in terms "generalized load, generalized displacement, time" is obtained. The feature is considered as a unit (specific sample with complex structure). A complete analogy between the curves of uniaxial creep model and generalized creep curves in coordinates "generalized displacement – time" is established for fixed values of the generalized displacement for a feature. Based on the analogy, the generalized stochastic model of rheological deformation of structural elements is proposed. The method for evaluating the reliability of structural elements under creep on parametric failure criteria, implemented in the model example of creep of thick-walled tubes under internal pressure, is developed. The results of the calculations and recommendations for operation life defining are given.

Key words: *creep, creep rupture strength, stochastic model, linearization, structural element, reliability, parametric failure criterion, probability of no-failure, steady creep stage.*

Original article submitted 31/V/2012;
revision submitted 27/VII/2012.

Vladimir P. Radchenko (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Head of Dept., Dept. of Applied Mathematics & Computer Science. *Mariya V. Shershneva*, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science. *Svetlana N. Kubyshkina* (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.