



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Гриценко, Функции Фурье–Якоби  $n$  переменных, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1988, том 168, 32–44

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.172

25 января 2025 г., 22:07:50





где  $S_1$  - матрица квадратичной формы вещественной сигнатуры  $(1, n+1)$ .

Через  $G_{\mathbb{R}}$  обозначим связную компоненту единицы вещественной ортогональной группы

$$O(S, \mathbb{R}) = \{g \in M_{n+2}(\mathbb{R}) : {}^t g S g = S\}.$$

Пусть

$$\mathcal{H}^{n+2} = \{Z \in \mathbb{C}^{n+2} : S_1(\operatorname{Im} Z, \operatorname{Im} Z) > 0\},$$

где  $\operatorname{Im} Z$  обозначает мнимую часть вектора  $Z$ . Цилиндрическая область  $\mathcal{H}^{n+2}$  состоит из двух связных компонент. Группа  $G_{\mathbb{R}}$  действует на связных компонентах эрмитовой области  $\mathcal{H}^{n+2}$  как группа аналитических автоморфизмов. Опишем это действие. Если

$$g = \begin{bmatrix} g_{0,0} & \dots & g_{0,n+2} \\ g_{1,0} & \dots & g_{1,n+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{n+2,0} & \dots & g_{n+2,n+2} \end{bmatrix} \in G_{\mathbb{R}}, \quad Z = {}^t (z_1, \dots, z_{n+2}) \in \mathcal{H}^{n+2}$$

(элементы  $\mathcal{H}^{n+2}$  записываются как вектор-столбцы), то

$$g\langle Z \rangle = \left( \frac{{}^t \left( -\frac{1}{2} g_{i,0} S_1(Z, Z) + \sum_{j=1}^{n+2} g_{i,j} z_j + g_{i,n+2} \right)}{-\frac{1}{2} g_{n+2,0} S_1(Z, Z) + \sum_{j=1}^{n+2} g_{n+2,j} z_j + g_{n+2,n+2}} \right). \quad (2)$$

Знаменатель

$$J(g, Z) = -\frac{1}{2} g_{n+2,0} S_1(Z, Z) + \sum_{j=1}^{n+2} g_{n+2,j} z_j + g_{n+2,n+2}$$

является фактором автоморфности на  $\mathcal{H}^{n+2}$  относительно  $G_{\mathbb{R}}$

Предположим теперь, что в подрешетке  $L_1$  можно выделить гиперболическую плоскость

$$L_1 = \langle e_1, e_{n+2} \rangle \perp L_0, \quad S_1 = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & -S_0 & \\ & & & \\ 1 & & & \end{bmatrix},$$

где  $S_0$  - матрица положительно определенной квадратичной формы.

Зафиксируем связную компоненту  $\mathcal{H}_+^{n+2}$  области  $\mathcal{H}^{n+2}$  ("верхнюю полуплоскость") следующим условием:

$$\mathcal{H}_+^{n+2} = \left\{ \begin{array}{l} Z = {}^t(\omega, z_1, \dots, z_n, \tau) \in \mathbb{C}^{n+2}, \operatorname{Im} \omega \cdot \operatorname{Im} \tau > S_0 [I_m z], \\ \text{где } z = {}^t(z_1, \dots, z_n). \end{array} \right. \quad (8)$$

Стабилизатор  $\Gamma_L$  решетки  $L$  в группе  $G_{\mathbb{R}}$  является арифметической подгруппой группы  $G$ . Голоморфная функция  $F$ , заданная на области  $\mathcal{H}_+^{n+2}$ , называется модулярной формой веса  $k$  относительно группы  $\Gamma_L$ , если она удовлетворяет уравнению

$$(F|_k \gamma)(Z) = J(\gamma, Z)^{-k} F(\gamma \langle Z \rangle) = F(Z) \quad (4)$$

для любого  $\gamma$  из  $\Gamma_L$ .

В частности, для любой модулярной формы

$$F(\omega + m, z, \tau) = F(\omega, z, \tau) \quad (m \in \mathbb{Z});$$

поэтому, разлагая голоморфную функцию  $F$  в ряд Фурье по  $\omega$ , получаем

$$F(\omega, z, \tau) = \sum_{m \geq 0} \Psi_m(z, \tau) \exp(2\pi i m \omega). \quad (5)$$

Функции  $\Psi_m(\tau, z)$  называются коэффициентами Фурье-Якоби формы  $F$  (см. [2]). (Заметим, что  $\Psi_0$  зависит лишь от  $\tau$ ).

Раскладывая  $F(Z)$  в ряд Фурье по переменной  $Z \in \mathcal{H}_+^{n+2}$ , получаем

$$F(Z) = \sum_{M \in L_1^*, {}^t M S_1 M \geq 0} f(M) \exp(2\pi i {}^t Z S_1 M), \quad (6)$$

где

$$L_1^* = \{ l^* \in L_1 \otimes \mathbb{Q} : \forall l \in L_1, {}^t l^* S_1 l \in \mathbb{Z} \}$$

- решетка, двойственная к решетке  $L_1$  (см. (I)). Из единственности разложения в ряд Фурье получаем, что

$$\Psi_m(z, \tau) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}, l \in L_0^* \\ \lambda n m \geq S_0[l]}} f(l, n) \exp(2\pi i (n\tau - {}^t z S_0 l)).$$

Найдем функциональные уравнения, которым удовлетворяют коэф-

коэффициенты Фурье-Якоби  $\varphi_m$ . С этой целью рассмотрим параболическую подгруппу  $P_{\mathbb{R}}$ , сохраняющую изотропный флаг  $[e_0, e_1]$ ,

$$P_{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{bmatrix} A^* & B_1 & T \\ 0 & U & B \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \in G_{\mathbb{R}} \right\}, \quad (7)$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R}), \quad U \in G_{\mathbb{R}}(L_0), \quad B \in M_{n,2}(\mathbb{R}),$$

$$B_1 = I^t A^{-1} B S_0 U, \quad A^* = I^t A^{-1} I, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$2 \times 2$ -матрица  $T$  удовлетворяет условию

$${}^t T I A + {}^t A I T = S_0[B].$$

Определим элементы группы  $P_{\mathbb{R}}$  следующих трех типов:

$$[A]_z \langle Z \rangle = \text{diag}(A^*, E_n, A) \langle Z \rangle = \begin{pmatrix} \omega - \frac{c S_0[z]}{2(ct+d)} & z \\ z & ct+d \end{pmatrix}, A \langle \tau \rangle, \quad (8)$$

где  $A \langle \tau \rangle = (a\tau + b)(c\tau + d)^{-1}$ ,

$$[U]_n \langle Z \rangle = \text{diag}(E_2, U, E_n) \langle Z \rangle = \begin{pmatrix} \omega & U_z & \tau \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$[x, y]_n \langle Z \rangle = \begin{bmatrix} E_2 & {}^t y S_0^* & 0 & +\frac{1}{2} S_0^*[y] \\ {}^t x S_0^* & +\frac{1}{2} S_0^*[x] & +{}^t x S_0^* y & \\ 0 & E_n & x & y \\ 0 & 0 & & E_2 \end{bmatrix} = \quad (10)$$

$$= (\omega + {}^t x S_0^* z + \frac{1}{2} S_0^*[X] \tau + {}^t x S_0^* y, z + x\tau + y, \tau).$$

Соотношения (8) - (10) вместе с определением (4) модулярных форм дают следующие функциональные уравнения для коэффициентов  $\varphi_m(z, \tau)$ :

$$\varphi_m(z, \tau) \Big|_k [A]_z = (ct+d)^{-k} \exp\left(\pi i \frac{mc S_0[z]}{ct+d}\right) \varphi_m\left(\frac{z}{ct+d}, A \langle \tau \rangle\right) =$$

$$= \varphi_m(z, \tau) \quad (11)$$

для любого  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ ,

$$\varphi_m(U_z, \tau) = \varphi_m(z, \tau) \quad (12)$$

для любого  $U$ , сохраняющего решетку  $L_0$  ( $U \in \Gamma_{L_0}$ ),

$$\begin{aligned} \Phi_m(z, \tau) \Big|_k [x, y] &= \exp(2\pi i m (\tau x S_0 z + \frac{1}{2} S_0 [x] \tau)) \times \\ &\times \Phi_m(z + x\tau + y, \tau) = \Phi_m(z, \tau) \end{aligned} \quad (I3)$$

для любых целочисленных векторов  $x, y \in \mathbb{Z}^n$ . (Мы фиксируем произвольный базис решетки  $L_0$ .)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть дана  $\mathbb{Z}$ -целая четная решетка  $L_0$  в положительно определенном квадратичном пространстве  $(V_{\mathbb{Q}}, S_0)$  ненулевой размерности. Через  $\Gamma_{L_0}$  обозначим группу единиц решетки  $L_0$ . Формой Якоби веса  $k$  и индекса  $m$  ( $k, m \in \mathbb{N}$ ) называется голоморфная на  $\mathbb{C}^n \times \mathbb{H}_1$  функция, удовлетворяющая функциональным уравнениям (II) - (I3) и имеющая разложение Фурье следующего вида:

$$\Phi(z, \tau) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}, \ell \in L_0^* \\ 2nm - S_0[\ell] \geq 0}} f(\ell, n) \exp(2\pi i (n\tau + \frac{1}{2} S_0 \ell)).$$

Форма  $\Phi$  называется параболической, если  $f(\ell, n) = 0$  для  $n$  и  $\ell$  с условием  $2nm - S_0[\ell] > 0$ .

Коэффициенты Фурье-Якоби модулярных (параболических) форм относительно ортогональной группы  $\Gamma_L$  являются примером форм (параболических форм) Якоби.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Уравнения (II) - (I3) в определении форм Якоби веса  $k$  и индекса  $m$  можно переписать в виде одного соотношения

$$(\Phi_m(z, \tau) \exp(2\pi i m \omega)) \Big|_k \gamma = \Phi_m(z, \tau) \exp(2\pi i m \omega), \quad (I4)$$

которое выполняется для любого элемента  $\gamma \in P_{\mathbb{R}} \cap \Gamma_L$  и произвольного  $\omega$  такого, что  $(\omega, z, \tau) \in \mathcal{H}_+^{n+2}$

Как и в случае форм Якоби для группы  $Sp_n(\mathbb{Z})$  (см. [I], [6]) любую форму Якоби от  $n$  переменных можно разложить в произведение векторзначных модулярной формы от одной переменной на вектор тета-рядов.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.** Для формы Якоби  $\Phi(z, \tau)$  веса  $k$  и индекса  $m$  справедливо следующее разложение

$$\Phi(z, \tau) = \sum_{h \in L_0^* \bmod mL_0} \Phi_h(\tau) \vartheta_{mS_0}^h(\tau, mS_0 z, -\frac{h}{m}) \cdot \exp(\pi i \frac{h}{m} S_0 z), \quad (I5)$$

где  $\mathcal{D}_m S_0$  - тета-ряд четной положительно определенной квадратичной формы  $m S_0$  :

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_{m S_0}(\tau, m S_0 z, -\frac{h}{m}) = \\ & = \sum_{\chi \in \mathbb{Z}^n} \exp(\pi i \tau m S_0 [\chi + \frac{h}{m}] + 2\pi i m^t \chi S_0 z + \pi i^t h m S_0 z). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (I3) ( $x=0, y \in \mathbb{Z}^n$ )  $\Phi(z, \tau) = \Phi(z+y, \tau)$ , поэтому разложение Фурье по  $z$  формы Якоби  $\Phi$  имеет следующий вид:

$$\Phi(z, \tau) = \sum_{\ell \in L_0^*} g_\ell(\tau) e({}^t \ell S_0 z),$$

где  $e(x) = \exp(2\pi i x)$ . Полагая в (I3)  $y=0$ , получаем

$$\begin{aligned} \Phi(z, \tau) &= \Phi(z+\tau x, \tau) e(m({}^t x S_0 z + 2^{-1} S_0 [x] \tau)) = \\ &= \sum_{\ell \in L_0^*} (g_\ell(\tau) e({}^t (\ell + m x) S_0 z + \frac{\tau S_0}{2m} [m x + \ell] - \frac{S_0[\ell]}{2m} \tau)). \end{aligned}$$

Следовательно, можно определить функцию

$$\varphi_\ell(\tau) = g_\ell(\tau) e(-\frac{S_0[\ell]}{2m} \tau) = g_{\ell+m x} e(-\frac{S_0[\ell+m x]}{2m} \tau).$$

Суммируя по  $x \in \mathbb{Z}^n$  и собирая соответствующие слагаемые, получаем искомую формулу.

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть  $q$  - степень четной целочисленной квадратичной формы  $S_0$  ( $q S_0^{-1}$  - четная целочисленная),  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(mq)$ . Тогда коэффициенты  $\varphi_h(\tau)$  формы Якоби веса  $k$  и индекса  $m$  удовлетворяют соотношению

$$\varphi_{ah}(\tau) = \chi_{S_0}(A) \exp\left(\frac{\pi i ab S_0[h]}{m}\right) (c\tau+d)^{\frac{n}{2}-k} \varphi_h(A\langle\tau\rangle),$$

где  $\chi_{S_0}(A)$  - корень восьмой степени из единицы, входящий в функциональное уравнение для тета-ряда квадратичной формы.

(Если  $n = 2n_1^*$  - четное, то  $\chi_{S_0}(A) = (\text{sign } d)^{n_1^*} \left(\frac{(-1)^{n_1} \det m S_0}{|d|}\right)$ )

- вещественный характер Дирихле; в случае нечетного  $n$  см. [7]).

В частности, функция  $\varphi_0(\tau)$  является модулярной формой веса  $k - \frac{n}{2}$  относительно группы  $\Gamma_0(mq)$ , а функции  $\varphi_n(\tau)$  — модулярные формы веса  $k - \frac{n}{2}$  относительно главной конгруэнц-подгруппы  $\Gamma(mq)$ .

СЛЕДСТВИЕ 2. Пространство модулярных форм веса  $k$  и индекса  $m$  имеет конечную размерность.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если степень квадратичной формы  $S_0$  равна 1 (решетка  $L_0$  — унимодулярная), то форма Якоби индекса 1 "пропорциональна" тета-ряду

$$\Psi(z, \tau) = \varphi_0(\tau) \vartheta_{S_0}(\tau, S_0 z, 0).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть  $\varphi_1(z, \tau)$  — первый коэффициент Фурье-Якоби модулярной формы  $F(\omega, z, \tau)$  веса  $k$  относительно группы  $\Gamma_L$  (см. (5)) и

$$\varphi_1(z, \tau) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}, \ell \in L_0^* \\ 2n \geq S_0[\ell]}} f(\ell, n) \exp(2\pi i(n\tau + \ell S_0 z)).$$

Модулярные формы  $\varphi_n^{(1)}(\tau)$  из разложения (15) имеют следующие разложения Фурье в бесконечности:

$$\varphi_n^{(1)}(\tau) = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ n \equiv -\frac{q}{2} S_0[h] \pmod{q}}} f\left(h, \frac{n^2 + q S_0[h]}{2q}\right) \exp(2\pi i \frac{n\tau}{q}),$$

где  $h \in L_0^*$ , а  $q$  — степень формы  $S_0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция  $F(Z)$  инвариантна относительно действия элементов вида  $\text{diag}(1, \gamma, 1)$ , где  $\gamma$  сохраняет решетку  $L_1$  (см. (1)), следовательно, коэффициенты Фурье  $f(M)$  формы  $F$  (см. (6)) инвариантны относительно  $\gamma$ :

$$f(\gamma M) = f(M).$$

В частности, это соотношение для унипотентного  $\gamma$  превращается в следующее равенство для коэффициентов  $f(\ell, n)$  функции  $\varphi_1(z, \tau)$ :

$$f(\ell, n) = f(\ell + x, n + x S_0 \ell + \frac{1}{2} S_0[x])$$

для любого  $x \in L_0$ . Следовательно,



$$\begin{aligned} \varphi_1(z, \tau) &= \sum_{h \in L_0^*/L_0} \sum_{\substack{x \in L_0, n \geq 0 \\ n \equiv -\frac{q}{2} S_0[h] \pmod{q}}} f\left(h+x, \frac{n}{q} + \frac{S_0[h+x]}{2}\right) \times \\ &\times e\left(\tau\left(\frac{n}{q} + \frac{S_0}{2}[h+x]\right) + {}^t(h+x) S_0 z\right) = \\ &= \sum_{h \in L_0^*/L_0} \sum_{\substack{h \geq 0 \\ h \equiv -\frac{q}{2} S_0[h] \pmod{q}}} f\left(h, \frac{\lambda n + q S_0[h]}{2q}\right) e\left(\tau \frac{n}{q}\right) \cdot \varphi_{S_0}^2(\tau, S_0 z, -h) \cdot e\left(\frac{{}^t h S_0 z}{2}\right). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ. Если  $S_0[h_1] = S_0[h_2]$  ( $h_1, h_2 \in L_0^*$ ), то

$$\varphi_{h_1}^{(1)}(\tau) = \varphi_{h_2}^{(2)}(\tau).$$

## § 2. Операторы Гекке

Через  $P_{\mathbb{Q}}$  и  $P_{\mathbb{Z}} = P_{\mathbb{R}} \cap \Gamma_L$  обозначим подгруппы рациональных и целых точек параболической группы  $P$ . Кольцо Гекке  $H_P = H(P_{\mathbb{Z}}, P_{\mathbb{Q}})$  — это  $P_{\mathbb{Z}}$ -инвариантное подпространство  $\mathbb{Q}$ -векторного пространства, состоящего из всех формальных конечных линейных комбинаций

$$X = \sum_i a_i (P_{\mathbb{Z}} g_i), \quad a_i \in \mathbb{Q}, \quad g_i \in P_{\mathbb{Q}}.$$

Представление группы  $P_{\mathbb{Z}}$  на этом пространстве задается равенством

$$X \rightarrow X \cdot \gamma = \sum_i a_i (P_{\mathbb{Z}} g_i \gamma).$$

Для любых двух элементов

$$X = \sum a_i (P_{\mathbb{Z}} g_i) \quad \text{и} \quad Y = \sum b_j (P_{\mathbb{Z}} h_j)$$

кольца  $H_P$  их произведение  $X \cdot Y$  определено равенством

$$X \cdot Y = \sum_{i,j} a_i b_j (P_{\mathbb{Z}} g_i h_j).$$

Кольцо  $H_{\mathbb{P}}$  устроено довольно сложно. Даже в локальном случае кольцо  $H(P_{\mathbb{Z}_p}, P_{\mathbb{Q}_p})$  не является коммутативным и обладает делителями нуля. Ниже мы выделим в кольце Пекке  $H_{\mathbb{P}}$  два подкольца, изоморфные кольцу Гекке группы  $SL_2$ . Эти подкольца задаются максимальным изотропным подпространством, выделенным в исходном квадратичном пространстве.

В (8) - (10) были определены элементы стандартных подгрупп параболической группы  $P$ . Введем еще один элемент

$$[\tau]_1 = \begin{bmatrix} E_2 & 0 & -\tau & 0 \\ 0 & E_n & 0 & \tau \\ 0 & 0 & E_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.** Пусть даны два натуральных числа  $\alpha$  и  $\beta$  ( $\alpha$  делитель  $\beta$ ) и число  $\delta$ , равное натуральному числу в степени  $\pm 1$ . Тогда справедлива следующая формула для разложения двойного смежного класса по группе  $P_{\mathbb{Z}}$  на непересекающиеся левые смежные классы:

$$P_{\mathbb{Z}} \begin{bmatrix} \delta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}_2 P_{\mathbb{Z}} = \sum_{x,y,\tau,i} P_{\mathbb{Z}} \cdot \begin{bmatrix} \delta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}_2 \cdot [x,y]_n \cdot [\tau]_1 \cdot [A_i]_2,$$

где векторы  $x$  и  $y$  и число  $\tau$  пробегает указанные системы представителей:

$$x \in \mathbb{Z}^n / \delta \alpha \mathbb{Z}^n, \quad y \in \mathbb{Z}^n / \delta \beta \mathbb{Z}^n, \quad \tau \in \mathbb{Z} / \delta \alpha \beta \mathbb{Z},$$

а матрицы  $A_i$  выбраны так, чтобы

$$\Gamma_{\alpha} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \Gamma_{\alpha} = \sum_i \Gamma_{\alpha} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} A_i \quad (\Gamma_{\alpha} = SL_2(\mathbb{Z})).$$

Доказательство предложения 3 легко получить прямыми вычислениями (см. лемму 3.1 [6]).

**СЛЕДСТВИЕ 1.** Если  $\alpha$  делит  $\beta$ , то

$$P_{\mathbb{Z}} \begin{bmatrix} \beta^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix}_2 P_{\mathbb{Z}} = \sum_i P_{\mathbb{Z}} \cdot \begin{bmatrix} \beta^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix}_2 \cdot [A_i]_2.$$

Для доказательства следствия нужно положить в основной формуле  $\delta = (\alpha\beta)^{-1}$ .

СЛЕДСТВИЕ 2. Определены следующие два вложения кольца Гекке группы  $SL_2(\mathbb{Z})$  в кольцо Гекке  $H_P$ :

$$im: \Gamma_2 \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \Gamma_2 \longrightarrow P_{\mathbb{Z}} \begin{bmatrix} \beta^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix} P_{\mathbb{Z}}, \quad (17)$$

$$Im: \Gamma_2 \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \Gamma_2 \longrightarrow P_{\mathbb{Z}} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} P_{\mathbb{Z}}. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображения  $im$  и  $Im$  связаны друг с другом через стандартный антиавтоморфизм  $*$  кольца  $H_P$

$$*: P_{\mathbb{Z}} g P_{\mathbb{Z}} \longrightarrow P_{\mathbb{Z}} g^{-1} P_{\mathbb{Z}},$$

поэтому  $Im$  является вложением колец, если  $im$  является вложением, а это так в силу следствия 1.

Можно определить действие элементов кольца Гекке  $H_P$  на формы Якоби. В случае группы  $Sp_n(\mathbb{Z})$  аналогичное представление было описано автором в [6].

Для любого  $g \in P_{\mathbb{Q}}$  такого, что

$$P_{\mathbb{Q}} g P_{\mathbb{Q}} = \sum_i P_{\mathbb{Q}} g_i,$$

и любой функции  $F(Z)$ , заданной на "верхней полуплоскости"  $\mathcal{H}_+^{n-2}$  (см. (3) и (4)), положим

$$(F|_k g)(Z) = \sum_i (F|_k g_i)(Z).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть даны форма Якоби  $\Psi(z, \tau)$  веса  $k$  и индекса  $m$ , натуральные  $\alpha, \beta$  ( $\alpha$  делит  $\beta$ ), число  $\delta$ , равное  $\pm 1$  степени натурального числа, и комплексное число  $\omega$  такое, что  $Z = \begin{bmatrix} \omega & 1 \\ \tau & \tau \end{bmatrix} \in \mathcal{H}_+^{n+2}$ . Положим

$$X(\delta, \alpha, \beta) = P_{\mathbb{Z}} \left[ \delta \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \right] P_{\mathbb{Z}},$$

где  $\left[ \right]_2$  - элемент из (8). Тогда функция

$$\psi(z, \tau) = (\psi|_k X)(z, \tau) = ((\psi(z, \tau) e(m\omega))|_k X(\delta, \alpha, \beta)) e\left(-\frac{m}{\delta^2 \alpha \beta} \omega\right)$$

является формой Якоби веса  $k$  и индекса  $m_1 = \frac{m}{\delta^2 \alpha \beta}$ ,

если  $m_1$  — целое, и равна 0 в противном случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим  $\tilde{\varphi}(Z) = \varphi(z, \tau) e(m\omega)$ .

По определению форм Якоби (см. (14)) функция  $\tilde{\varphi}$  инвариантна относительно действия элементов из группы  $P_{\mathbb{Z}}$ , поэтому функция  $\tilde{\psi}(Z) = (\tilde{\varphi} | \chi(\delta, \alpha, \beta))(Z)$  также инвариантна относительно действия группы  $P_{\mathbb{Z}}$ . Применяя предложение 3, получаем, что у функции  $\tilde{\psi}(Z)$  можно выделить множитель

$$\sum_{\tau \in \mathbb{Z}/\delta^2 \alpha \beta \mathbb{Z}} e\left(\frac{m\tau + m\omega}{\delta^2 \alpha \beta}\right),$$

и переменная  $\omega$  входит только в этот множитель. Остальное ясно.

Введем стандартный элемент  $T(q)$  кольца Гекке группы  $\Gamma_2 = SL_2(\mathbb{Z})$ :

$$T(q) = \sum_{\substack{\alpha, \beta = q \\ \alpha/\beta}} \Gamma_2 \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \Gamma_2$$

Определим образы этого элемента

$$T_-(q) = im T(q), \quad T_+(q) = Im T(q)$$

при вложениях  $im$  и  $Im$  из (17)–(18).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть  $\varphi(z, \tau)$  — форма Якоби веса  $k$  и индекса  $m$ , тогда

$(\varphi|_k T_-(q))(z, \tau)$  — форма Якоби индекса  $mq$ ,

$(\varphi|_k T_+(q))(z, \tau)$  — форма Якоби индекса  $\frac{m}{q}$  или 0.

Существуют операторы Гекке, не изменяющие индекса формы Якоби.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть  $\alpha \cdot \beta = q^2$ , тогда форма

$$\varphi|_k P_{\mathbb{Z}} \left[ q^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \right]_2 P_{\mathbb{Z}}$$

имеет тот же вес и индекс, что и форма Якоби  $\varphi$ .

Формы Якоби индекса 1 в случае групп  $S_{p_2}$  и  $SU(2, 2)$  используются для построения модулярных форм из пространства Маасса для этих групп (см. [8], [1], [3], [4], [9]). Для ортогональ-

ной группы сигнатуры  $(\lambda, \mu)$  справедливо следующее

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.** Пусть дана произвольная форма Якоби  $\varphi(z, \tau)$  веса  $k$  и индекса  $l$ . Определим функцию  $F$  на пространстве  $\mathcal{H}_+^{n+2}$ , полагая

$$F(\omega, z, \tau) = \sum_{q=1}^{\infty} (\varphi|_k T_-(q))(z, \tau) \cdot e(q, \omega).$$

Тогда функция  $F$  инвариантна (см. (4)) относительно всех преобразований вида  $\text{diag}(E_2, \gamma, E_2)$ , где  $\gamma$  — единица формы  $S_0$ , и всех унитарных элементов, содержащихся в группе  $\Gamma_L$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу предложения 3, элементы  $T_-(q)$  имеют следующее разложение на левые смежные классы:

$$T_-(q) = \sum_{\substack{ad=q \\ b \pmod d}} P_{\mathbb{Z}} \left[ \begin{array}{cc} d^{-1} & q^{-1}b \\ 0 & a^{-1} \end{array} \right]_2. \quad (19)$$

Пусть

$$\varphi(z, \tau) = \sum_{\substack{\lambda n \geq S_0[l] \\ n \in \mathbb{Z}, \ell \in L_0^*}} f(\ell, n) e(n\tau + {}^t \ell S_0 z)$$

— разложение Фурье формы  $\varphi$ . Функция  $F(Z)$  инвариантна относительно действия элементов из параболической группы  $P_{\mathbb{Z}}$ . Найдем ее разложение Фурье. В силу (19) и определения форм Якоби,

$$\begin{aligned} F(\omega, z, \tau) &= \sum_{\substack{ad=q \\ b \pmod d}} a^k \varphi\left(az, \frac{a\tau+b}{d}\right) e(m\omega) = \\ &= \sum_{ad=q} a^k \sum_{n \equiv 0 \pmod d} \sum_{\ell \in L_0^*} df(n, d, b) e(n, a\tau + a {}^t \ell S_0 z + m\omega). \end{aligned}$$

После замены индексов суммирования получаем

$$F(\omega, z, \tau) = q \sum_{\substack{m, n \in \mathbb{Z}, \ell \in L_0^* \\ \lambda mn \geq S_0[l]}} a^{k-1} \sum_{\substack{a | (n, m) \\ a^{-1} \ell \in L_0^*}} f\left(\frac{nm}{a^2}, \frac{\ell}{a}\right) e(n\tau + {}^t \ell S_0 z + m\omega).$$

Как видно из последнего разложения, функция  $F(\omega, z, \tau)$

инвариантна относительно замены переменных  $\omega \rightarrow \tau$ ,  $\tau \rightarrow \omega$ . Легко показать, что это преобразование вместе с унитарными элементами параболической группы  $P_{\mathbb{Z}}$  порождают все унитарные элементы из группы  $\Gamma_L$ . Предложение доказано.

В заключение укажем еще раз на связь между кольцом Гекке  $H_P$  и кольцом Гекке всей ортогональной группы  $\Gamma_L$ . Для любого простого  $p$  локальное кольцо Гекке группы  $\Gamma_{L,p}$  является подкольцом локального кольца  $H_P$ . Используя это вложение и соотношение между операторами Гекке, можно доказать, что пространство функций, построенных по формам Якоби индекса  $l$ , инвариантно относительно действия операторов Гекке (детали см. в [3], где был исследован случай группы  $SU(2,2)$ , отвечающий группе  $SO(2,4)$ ). Как показывает предложение 5, в этом контексте лучше использовать спинорную группу квадратичной формы  $S$  вместо ортогональной группы этой формы.

#### Литература

1. Eichler M., Zagier D. On the theory of Jacobi forms. - Progress in Math., 1985, vol.55, 156 p.
2. Пятцкий И.И. - Шапиро И.И. Геометрия классических областей и теория автоморфных функций. М.: Физматгиз, 1961.
3. Гриценко В.А. Пространство Маасса для  $SU(2,2)$ . Операторы Гекке и дзета-функции. Препринты ЛОМИ. P-7-85. Л., 1985. 23 с. (Публикуется в: Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1987, т.183).
4. Kojima H. An arithmetic of hermitian modular forms of degree two. - Invent.Math., 1982, vol.69, N 2, p.217-227.
5. Gritsenko V. Dirichlet series with Euler product in the theory of modular forms with respect to the orthogonal groups. Preprint LOMI. E-11-87. 1987. 23 p.
6. Гриценко В.А. Действие модулярных операторов на коэффициенты Фурье-Якоби модулярных форм. - Мат.сб., 1982, т.119, № 2, с.248-277.
7. Shimura G. On modular forms of half integral weight. - Ann.Math., 1973, vol.97, N 3, p.440-481.
8. Maass H. Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades. - Invent.Math., 1979, vol.52, N 1, p.95-104.
9. Krieg A. The Maass-Space on the Half-space of quaternions of degree 2. - Math.Ann., Bd 276, N 4, S.675-686.