ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 40 **2004** **Вып. 2**

УДК 621.391.1:519.27

© 2004 г. **Е.Л. Лакштанов, Е.С. Лангваген**

КРИТЕРИЙ БЕСКОНЕЧНОСТИ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ МНОГОМЕРНЫХ КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ

Доказана бесконечность топологической энтропии для широкого класса многомерных клеточных автоматов, а именно автоматов, обладающих космическими кораблями.

В данной статье показана бесконечность топологической энтропии для клеточных автоматов, обладающих так называемыми космическими кораблями. В этот класс входит, в частности, известная "Игра Жизнь" Джона Конвея, а также большое количество родственных "Жизни" двумерных клеточных автоматов (см. [1]). Энтропия линейных клеточных автоматов и автоматов с разделяющим точки отображением эволюции (positively expansive cellular automata) была изучена в [2].

Рассмотрим d-мерную целочисленную решетку $\mathbb{Z}^d$ и *пространство конфигураций* $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ с элементами

$$\sigma : \mathbb{Z}^d \to \{0,1\}.$$

Значение конфигурации σ в точке $x \in \mathbb{Z}^d$ будем обозначать через σ_x.

Пусть заданы некоторый конечный набор попарно различных векторов $u_1, \ldots, u_s \in \mathbb{Z}^d$ и функция $f : \{0,1\}^s \to \{0,1\}$. *Клеточным автоматом* с *локальными правилами* f называется пара (Ω, F), где *отображение эволюции* $F : \Omega \to \Omega$ определяется по формуле

$$(F\sigma)_x = f(\sigma_{x+u_1}, \ldots, \sigma_{x+u_s}), \quad x \in \mathbb{Z}^d.$$

Всюду далее мы предполагаем, что локальные правила f удовлетворяют условию $f(0,\ldots,0) = 0$.

Носителем конфигурации σ назовем множество

$$\operatorname{supp} \sigma = \{x \in \mathbb{Z}^d : \sigma_x = 1\} \subset \mathbb{Z}^d.$$

Будем говорить, что конфигурация σ *финитна*, если ее носитель – конечное множество.

Сдвигом конфигурации σ на вектор $v \in \mathbb{Z}^d$ называется конфигурация $U_v\sigma$, определенная равенством

$$(U_v\sigma)_x = \sigma_{x-v}, \quad x \in \mathbb{Z}^d.$$

Космический корабль с периодом $p \in \mathbb{N}$ и ненулевым вектором скорости $v \in \mathbb{Z}^d$ есть (нетривиальная) финитная конфигурация α, для которой $F^p\alpha = U_v\alpha$.

Пространство Ω считаем снабженным (метризуемой) тихоновской топологией; легко видеть, что введенное выше отображение эволюции F и оператор сдвига U_v непрерывны в указанной топологии.

Теорема. *Пусть клеточный автомат (Ω, F) на решетке размерности $d \geqslant 2$ обладает космическим кораблем. Тогда топологическая энтропия клеточного автомата бесконечна, т.е.*

$$h_{\mathrm{top}}(F) = \infty.$$

Доказательство. Мы покажем возможность реализации в данном клеточном автомате конкретных динамических систем со сколь угодно большой энтропией.

Пусть S – оператор правого сдвига в пространстве $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ двусторонних последовательностей из нулей и единиц. Таким образом,

$$(S\xi)_i = \xi_{i-1}, \quad i \in \mathbb{Z},$$

для любой последовательности $\xi : \mathbb{Z} \to \{0,1\}$. Оператор S непрерывен при наделении Σ тихоновской топологией.

Напомним (см. [3]), что топологическая энтропия динамической системы (Σ, S) равна $h_{\mathrm{top}}(S) = \ln 2$. Прямое произведение n экземпляров системы (Σ, S) есть динамическая система $(\Sigma^n, S^{\otimes n})$, где

$$S^{\otimes n}(\xi^1, \ldots, \xi^n) = (S\xi^1, \ldots, S\xi^n), \quad \xi^j \in \Sigma.$$

Как известно [3], топологическая энтропия этой системы есть $h_{\mathrm{top}}(S^{\otimes n}) = n \ln 2$.

При $l \in \mathbb{N}$ пусть $K_l = \{-l, \ldots, l\}^d \subset \mathbb{Z}^d$ – центрированный куб в $\mathbb{Z}^d$.

Пусть $\alpha \in \Omega$ – космический корабль с периодом p и вектором скорости v. Найдем такое R, что носители конфигураций α, $F\alpha$, $\ldots$, $F^{p-1}\alpha$ содержатся в кубе K_R, и такое r, что векторы $u_1, \ldots, u_s$, входящие в определение локальных правил, принадлежат K_r. Положим $K = K_{R+r}$.

Возьмем произвольный вектор $u \in \mathbb{Z}^d$, не пропорциональный v, и выберем $m \in \mathbb{N}$ так, чтобы множества $K + m(iv + ju)$, $i, j \in \mathbb{Z}$, попарно не пересекались[1].

Теперь определим отображение $\varphi_n : \Sigma^n \to \Omega$. Пусть

$$\varphi_n(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ \xi_i^j = 1}} U_{m(iv+ju)}(\alpha) \quad \text{для} \quad \xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \Sigma^n.$$

Суммирование в правой части соответствует объединению носителей, поскольку носители суммируемых конфигураций не пересекаются. Более того, эти конфигурации эволюционируют независимо друг от друга вследствие подходящего выбора множества K и числа m.

Лемма. *Отображение φ_n является гомеоморфизмом Σ^n и своего образа $\Omega_n = \varphi_n(\Sigma^n)$, который замкнут в Ω. Кроме того,*

$$F^{mp} \circ \varphi_n = \varphi_n \circ S^{\otimes n}.$$

[1] Достаточно взять $m > 2R + 2r$; действительно, вектор $(i - i')v + (j - j')u \in \mathbb{Z}^d$ при $(i,j) \neq (i',j')$ имеет хотя бы одну ненулевую компоненту, а значит, сответствующая компонента вектора $m(i - i')v + m(j - j')u$ по модулю не менее $2R + 2r + 1$, что равно стороне куба K.

Доказательство. Для $\xi \in \Sigma^n$ в силу определения φ_n и вышесказанного

$$F^{mp}(\varphi_n(\xi)) = F^{mp}\left(\sum_{(i,j)\,:\,\xi_i^j=1} U_{m(iv+ju)}(\alpha)\right) =$$

$$= \sum_{(i,j)\,:\,\xi_i^j=1} U_{m(iv+ju)}(F^{mp}(\alpha)) = \sum_{(i,j)\,:\,\xi_i^j=1} U_{m(iv+ju)}(U_{mv}(\alpha)) =$$

$$= \sum_{(i,j)\,:\,\xi_i^j=1} U_{m((i+1)v+ju)}(\alpha) = \sum_{(i,j)\,:\,\xi_{i-1}^j=1} U_{m(iv+ju)}(\alpha) = \varphi_n(S^{\otimes n}(\xi)).$$

Заметим, что при достаточно большом N точки $\xi, \eta \in \Sigma^n$, для которых $\xi_i^j = \eta_i^j$ при $j = 1, \ldots, n$ и $|i| < N$, переходят в конфигурации $\varphi_n(\xi)$ и $\varphi_n(\eta)$, совпадающие на сколь угодно большом центрированном кубе в $\mathbb{Z}^d$. Следовательно, φ_n непрерывно.

Множество $\Omega_n = \varphi_n(\Sigma^n)$ компактно как образ компакта Σ_n при непрерывном отображении; φ_n^{-1} непрерывно, так как φ_n – непрерывное взаимно однозначное отображение одного компакта на другой. ▲

Наконец, для энтропии отображения эволюции F справедлива оценка

$$h_{\text{top}}(F) = \frac{h_{\text{top}}(F^{mp})}{mp} \geqslant \frac{h_{\text{top}}(F^{mp}|_{\Omega_n})}{mp} = \frac{n \ln 2}{mp},$$

откуда в силу произвольности n имеем $h_{\text{top}}(F) = \infty$. ▲

Статья посвящается нашему учителю А.Н. Землякову.

Авторы благодарны П. С. Бачурину и С. А. Пирогову за помощь при подготовке статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Eppstein David.* Searching for spaceships // MSRI Lectures. July, 2000. http://www.msri.org/publications/ln/msri/2000/gametheory/eppstein/1/
2. *D'amico M., Manzini G., Margara L.* On Computing the Entropy of Cellular Automata // Theoretical Computer Science. 2003. V. 290. P. 1629–1646.
3. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999.

Лакштанов Евгений Леонидович
Лангваген Евгений Сергеевич
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
lakalena@rambler.ru
elang@yandex.ru

Поступила в редакцию
24.12.2003

После переработки
09.03.2004