Заключительный этап XXXIX Всероссийской олимпиады школьников по математике,

Kvant, 2013, Number 5, 85–88

https://www.mathnet.ru/eng/kvant2025

утюга: пока одним гладят, другой нагревается. Очень удобно. Такой ретроутюг вполне можно использовать и сейчас, нагревая его, например, на газовой конфорке. В утюге нет ни спирали, которая может перегореть, ни провода, который может перетереться. Этот утюг поистине вечный…
Если, вдобавок, вы платите за газ фиксированную сумму, не зависящую от потребления газа, то пользование таким утюгом для вас будет абсолютно бесплатным.

ЭТЮД О СИМЕДИАНАХ

1. Из теоремы косинусов для треугольников ABA_1, ABC

$$g_a^2 = AA_1{}^2 = AB^2 + BA_1{}^2 - 2AB \cdot BA_1 \cdot \cos\angle B =$$

$$= c^2 + \left(\frac{ac^2}{b^2+c^2}\right)^2 - 2c\frac{ac^2}{b^2+c^2} \cdot \frac{\left(a^2+c^2-b^2\right)}{2ac},$$

откуда $AA_1{}^2 = g_a^2 = \dfrac{b^2c^2\left(2b^2+2c^2-a^2\right)}{\left(b^2+c^2\right)^2}$.

2. Имеем $\dfrac{AC_1}{C_1B} \cdot \dfrac{BA_1}{A_1C} \cdot \dfrac{CB_1}{B_1A} = \dfrac{b^2}{a^2} \cdot \dfrac{c^2}{b^2} \cdot \dfrac{a^2}{c^2} = 1$. Следовательно, по теореме Чевы симедианы пересекаются в одной точке.

3. *Указание*. Примените теорему Чевы.

4. *Указание*. Примените результат упражнения 5.

5. Достаточно доказать, что если $a \ge b$, то $g_a \le g_b$. Пусть $a \ge b$. Тогда

$$g_b - g_a = \frac{a^2c^2\left(2a^2+2c^2-b^2\right)}{\left(a^2+c^2\right)^2} - \frac{b^2c^2\left(2b^2+2c^2-a^2\right)}{\left(b^2+c^2\right)^2} =$$

$$= c^2\left(\left(\frac{2}{1+\dfrac{c^2}{a^2}} - \frac{2}{1+\dfrac{c^2}{b^2}}\right) + a^2b^2\left(\frac{1}{\left(b^2+c^2\right)^2} - \frac{1}{\left(a^2+c^2\right)^2}\right)\right) \ge 0.$$

6. *Указание*. Докажите равенство треугольников BB_1A_1 и CC_1A_1 (см. рис. 4 статьи).

7. Пусть в треугольнике ABC проведены высоты к его сторонам. Соединим основания высот и рассмотрим полученный треугольник $A_1B_1C_1$. Понятно, что $\angle CC_1B = \angle BB_1C = 90^\circ$. Поэтому четыре точки C, C_1, B, B_1 принадлежат одной окружности, при этом BC – диаметр. По условию $A_1C_1 = A_1B_1$, поэтому точка A_1 лежит на срединном перпендикуляре точек C_1, B_1 и, кроме того, она лежит на диаметре BC. Значит, A_1 – центр этой окружности, но тогда высота также будет и медианой. Значит, треугольник ABC должен быть равнобедренным.

8. Решение М2001 см. в «Кванте» №6 за 2006 г.

9. Решение М1862 см. в «Кванте» №6 за 2003 г.

10. $f(x) = \dfrac{2}{3} + \sqrt[3]{-\dfrac{1}{27} + \sqrt{x^3 - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x}{27}}} + \sqrt[3]{-\dfrac{1}{27} - \sqrt{x^3 - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x}{27}}}$.

11. *Указание*. а) $l = 3$. В этом случае получаем кубическое уравнение $4x^3 - 152x^2 + 321x - 171 = 0$. Пусть корнем уравнения будет рациональное число $x = \dfrac{p}{q}$, где p, q – целые взаимно простые числа, $q > 0$. Тогда $4p^3 = q\left(152p^2 - 321pq + 171q^2\right)$ и, кроме того, $p\left(4p^2 - 152pq + 321q^2\right) = 171q^3$. Таким образом, необходимо проверить случаи $q \in \{1,2,4\}$ и $p \in \{\pm1, \pm3, \pm9, \pm19, \pm57, \pm171\}$. Получаем, что многочлен $4x^3 - 152x^2 + 321x - 171$ неприводим над полем рациональных чисел. Поэтому треугольник с длинами симедиан 1, 1, 3 с помощью циркуля и линейки построить нельзя.

б) $l = 1/2$. В этом случае получаем кубическое уравнение $4x^3 - 12x^2 + 6x + 4 = 0$. Поскольку $4x^3 - 12x^2 + 6x + 4 = 2(x-2)\left(2x^2 - 2x - 1\right)$, то мы имеем приводимый многочлен над полем рациональных чисел. Поэтому треугольник с длинами симедиан 1, 1, 1/2 можно построить с помощью циркуля и линейки.

12, 13. Доказательства можно найти в статье А.Жукова, И.Акулича «Однозначно ли определяется треугольник?» в «Кванте» №1 за 2003 год.

14. а) $a = b = \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}}$, $c = \sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}}$. Поскольку длины двух симедиан равны, то треугольник равнобедренный. Из формул (3) следует, что для нахождения длин сторон треугольника с длинами симедиан 1, 1, 1/2 необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} \left(a^2+c^2\right)^2 = a^2c^2\left(a^2+2c^2\right), \\ 1 = 4a^2 - c^2, \\ a = b. \end{cases}$$

Сделаем замену $u = a^2$, $v = c^2$. Получим $v = 4u - 1$. Остается решить уравнение $(5u-1)^2 - u(4u-1)(9u-2) = 0$. Корни этого уравнения $u_1 = \dfrac{1}{6}$, $u_{2,3} = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$. Поскольку $v = c^2 > 0$, то нам подходит только $u = \dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$.

б) Существует. Длины сторон треугольника с длинами симедиан 1, 1, 2 являются решениями системы

$$\begin{cases} \left(a^2+c^2\right)^2 = a^2c^2\left(a^2+2c^2\right), \\ 16 = 4a^2 - c^2, \\ a = b. \end{cases}$$

С помощью замен $u = a^2$, $v = c^2$ систему можно свести к кубическому уравнению $(5u-16)^2 - u(4u-16)(9u-32) = 0$. Корни этого уравнения можно найти с помощью формулы Кардано.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП XXXIX ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

1. Пусть для определенности $a < b < c$. Рассмотрим графики функций $f_{bc}(x) = (x-b)(x-c)$ и $f_a(x) = x - a$. При $x = a$ точка первого графика выше точки второго:
$f_{bc}(a) = (a-b)(a-c) > 0 = f_a(x)$, а при $x = b$ – ниже:
$f_{bc}(b) = 0 < b - a = f_a(b)$. Значит, уравнение $f_{bc}(x) = f_a(x)$ имеет корень на отрезке $[a; b]$ (рис.4). Аналогично, если рассмотреть графики функций $f_{ac}(x) = (x-a)(x-c)$ и $f_b(x) = x - b$, то получим, что $f_{ac}(a) > f_b(a)$ и $f_{ac}(b) < f_b(b)$, т.е. уравнение $f_{ac}(x) = f_b(x)$ также имеет решение на отрезке $[a; b]$ (рис.5).

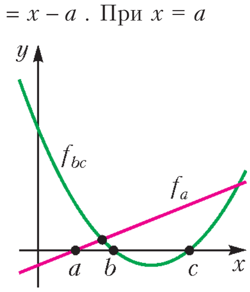

Рис. 4

5. Обозначим данные числа в порядке обхода по часовой стрелке через a_1, a_2, …, a_{2n}; обозначим через $S > 0$ сумму всех чисел и положим $S_i = a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i+n-1}$ (все индексы

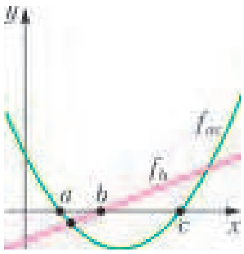

Рис. 5

мы рассматриваем по модулю $2n$, так что $a_{2n+i} = a_i$ и $S_{2n+i} = S_i$). Тогда нам надо доказать, что при некотором i обе суммы S_i и S_{i+1-n} положительны. Заметим, что $S_i + S_{n+i} = S > 0$. Значит, среди чисел S_i есть положительные. Если все суммы S_i положительны, то любой индекс i подходит. В противном случае найдется такой индекс i, что $S_i > 0$, а $S_{i+1} \le 0$. Тогда $S_{i+1-n} = S - S_{i+1} > 0$, и индекс i – искомый.

6. 20 чисел.

Докажем, что в каждый трехчлен $P(x)$ Петя мог подставить не более двух чисел. Действительно, пусть n-й член получившейся арифметической прогрессии равен $an + b$, а n-е из Васиных последовательных чисел равно $k + n$. Тогда Петя мог подставить это число в $P(x)$, если $P(k+n) = an + b$, а это квадратное уравнение относительно n имеет не более двух корней. Поэтому чисел не могло быть больше 20.

Осталось показать, что 20 чисел могли получиться. Пусть, например, были выбраны трехчлены $P_k(x) = (x - (2k - 1))(x - 2k) + x$ при $k = 1, 2,\ldots,10$, а Вася называл по очереди числа от 1 до 20. Так как $P_k(2k-1) = 2k - 1$ и $P_k(2k) = 2k$, то Петя мог получить эти же числа в том же порядке.

7. Пусть Q – точка пересечения прямых KL и MN (рис.6). Поскольку $\angle QLC = \angle NMY = 90^\circ$, четырехугольник $QLYM$

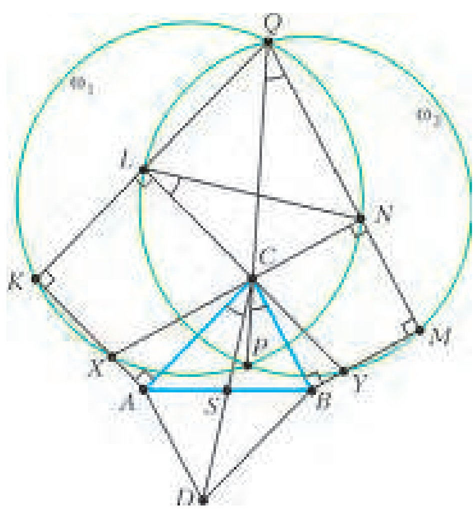

Рис. 6

– вписанный. Аналогично, четырехугольник $QNXK$ – вписанный. Тем самым, Q – вторая точка пересечения окружностей ω_1 и ω_2, описанных около треугольников KXN и LYM соответственно.

Докажем, что C лежит на прямой PQ. Прямоугольные треугольники CAX и CBY подобны, так как $\angle XCA = 90^\circ - \angle ACB = \angle YCB$. Отсюда $XC \cdot CB = YC \cdot CA$ или $XC \cdot CN = YC \cdot CL$, т.е. *степени* точки C относительно окружностей ω_1 и ω_2 равны. Значит, C лежит на их радикальной оси PQ.

Продлив медиану CS на ее длину, достроим треугольник ABC до параллелограмма $ACBD$. Так как $\angle CAD = 180^\circ - \angle ACB = \angle LCN$, $CA = CL$ и $AD = CB = CN$, треугольники CAD и LCN равны. Отсюда $\angle ACS = \angle ACD = \angle CLN$. Но четырехугольник $QLCN$ вписанный (в нем $\angle QLC = \angle QNC = 90^\circ$), поэтому $\angle CLN = \angle CQN = \angle PCB$ (поскольку $BC \parallel MN$). Итак, $\angle ACS = \angle CLN = \angle PCB$, что и требовалось.

8. Добавим к каждой фигуре такую каемку, как показано на рисунке 7. Предположим, что вырезанные фигуры не имеют общих сторон. Тогда фигуры с добавленными каемками не накладываются друг на друга. Действительно, каемка фигуры F состоит ровно из тех точек, расстояние от которых до F не больше, чем расстояние до любой клетки, не имеющей общих сторон с F. Значит, если точка X лежит в каемках двух фигурок (не имеющих общих сторон), то расстояние от X до первой фигурки не больше, чем до второй, и одновременно не меньше, чем до второй. Тогда эти расстояния равны, т.е. X лежит на границах обеих каемок.

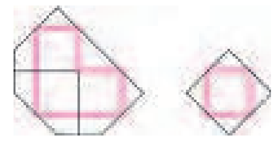

Рис. 7

Таким образом, фигуры с каемками не должны перекрываться. Далее, площадь «уголка» с каемками равна $11/2$, а площадь клетки с каемкой равна 2. Так как вырезано 400 «уголков» и 500 клеток, то суммарная площадь этих фигур с каемками составляет 2200 + 1000 = 3200. Но все эти фигуры с каемками лежат в квадрате 56×56 с тем же центром, что и исходный. Но его площадь равна 3136, т.е. меньше 3200. Значит, каемки не могут не накладываться.

10 класс

4. Обозначим окружности, описанные около четырехугольника $ABCD$ и треугольников ABP, CDP, ABQ, CDQ через Ω, ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 соответственно (рис.8).

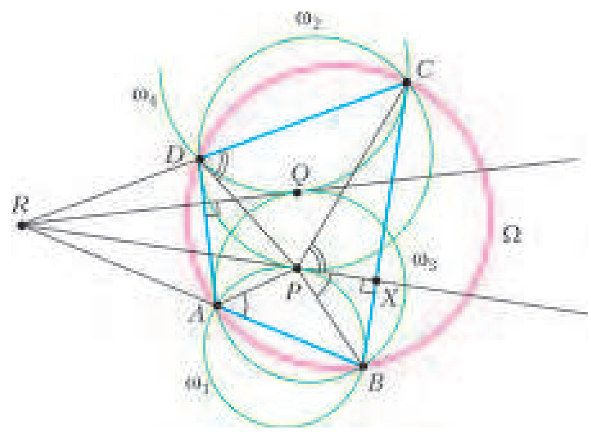

Рис. 8

Пусть X – проекция P на BC; обозначим прямую PX через l_1. Тогда $\angle BPX = 90^\circ - \angle PBC = \angle PAB$; значит, прямая l_1 и окружности ω_1, ω_2 касаются в точке P. Аналогично получаем, что прямая l_2, проходящая через Q и перпендикулярная AD, и окружности ω_3, ω_4 касаются в точке Q.

Предположим, что прямые AB и CD пересекаются в некоторой точке R. Покажем, что прямая RP совпадает с l_1. Обозначим через P_1 и P_2 вторые точки пересечения прямой RP с окружностями ω_1 и ω_2 (таким образом, $P_1 = P$, если RP касается ω_1; аналогично для P_2). Тогда

$$RP \cdot RP_1 = RA \cdot RB = RD \cdot RC = RP \cdot RP_2,$$

т.е. $P_1 = P_2$. Так как P – единственная общая точка ω_1 и ω_2, то $P_1 = P_2 = P$. Значит, RP совпадает с l_1, т.е. $RP^2 = RA \cdot RB$. Аналогично можно показать, что RQ совпадает с l_2 и $RQ^2 = RA \cdot RB$.

Следовательно, $RP^2 = RA \cdot RB = RQ^2$. Поэтому треугольник PQR равнобедренный и его основание PQ образует равные углы с прямыми QR и PR, а значит, и с перпендикулярными им прямыми AD и BC.

Осталось рассмотреть случай, когда AB и CD параллельны.

Тогда $ABCD$ является равнобокой трапецией или прямоугольником. Этот четырехугольник и все рассматриваемые окружности симметричны относительно общего серединного перпендикуляра к AB и CD. Следовательно, точки P и Q лежат на этой прямой, а она, очевидно, образует равные углы с прямыми AD и BC.

8. kl.

Возьмем горизонтальную прямую h, проходящую через верхнюю сторону квадрата, и будем двигать ее вниз. Рассмотрим момент, когда она проходит через какой-нибудь отрезок разбиения I (по условию, такой отрезок в этот момент только один). Пусть к нему прилегают a прямоугольников сверху и b снизу. Количество прямоугольников, которые пересекает h, в этот момент уменьшается на a и увеличивается на b. Но поскольку по условию оно не должно изменяться, то $a = b$.

Докажем теперь индукцией по k, что количество прямоугольников равно kl. Если $k = 1$, то утверждение очевидно. Пусть теперь $k > 1$. Рассмотрим все прямоугольники разбиения, прилегающие к нижней стороне квадрата; их l штук, ибо горизонтальная прямая, проходящая достаточно близко от этой стороны, пересекает только их. Разобьем их на группы стоящих подряд прямоугольников равной высоты (рис.9). У каждой такой группы верхней границей является один отрезок. Рассмотрим одну такую группу с верхним отрезком I. Заметим, что вертикальные отрезки, ограничивающие эту группу, продолжаются выше, чем I. Действительно, иначе, скажем, верхний конец левого вертикального отрезка J лежит на I. Но тогда справа к J примыкает один прямоугольник, а слева – больше одного (ибо J граничный для группы), а это невозможно.

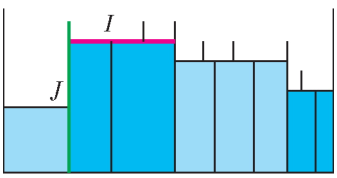

Рис. 9

Выкинем эту группу и «продлим» прямоугольники, лежащие сверху от I, до нижней стороны квадрата. Поскольку сверху и снизу к I прилегало равное количество прямоугольников, любая горизонтальная прямая по-прежнему будет пересекать l прямоугольников.

Проделаем эту операцию с каждой группой (рис.10). Мы выкинем ровно l прямоугольников; при этом каждая вертикальная прямая будет пересекать на один прямоугольник меньше, чем изначально, т.е. $k-1$ прямоугольник. По предположению индукции, общее количество прямоугольников станет равно $(k-1)l$, а значит, до перестройки оно было равно $(k-1)l + l = kl$, что и требовалось доказать.

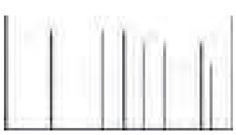

Рис. 10

11 класс

1. Пусть $P(x) = x^{10} + p_9x^9 + \ldots + p_0$ и $Q(x) = x^{10} + q_9x^9 + \ldots + q_0$. Тогда многочлен $P(x) - Q(x) = (p_9 - q_9)x^9 + \ldots + (p_0 - q_0)$ не имеет корней. Отсюда получаем, что $p_9 = q_9$, ведь любой многочлен нечетной степени имеет хотя бы один корень. Заметим теперь, что $P(x+1) = x^{10} + (p_9 + 10)x^9 + \ldots$ и $Q(x-1) = x^{10} + (q_9 - 10)x^9 + \ldots$. Значит, многочлен $P(x+1) - Q(x-1) = 20x^9 + \ldots$ имеет нечетную степень и, следовательно, имеет корень.

2. Пусть X – точка касания плоскости BCD со вписанной сферой (рис.11). Гомотетия с центром в точке A, переводящая вневписанную сферу во вписанную, переводит точку Y в некоторую точку Z вписанной сферы. Эта гомотетия переводит плоскость BCD в параллельную плоскость, которая касается вписанной сферы в точке Z. Это означает, что точки X и Z – диаметрально противоположные точки вписанной сферы, а следовательно, XZ перпендикулярно плоскости BCD. Поскольку Z лежит на отрезке AY, то $\angle AXY > \angle ZXY = 90°$, откуда и следует требуемое.

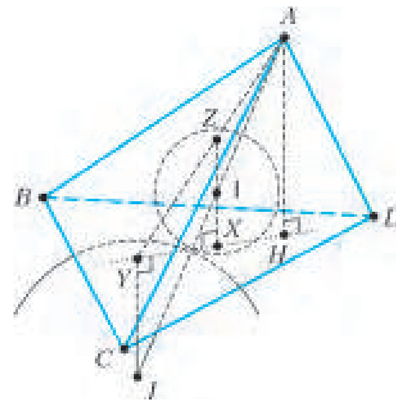

Рис. 11

4. $t = 1986 = 2013 - 27$. Можно считать, что на карточках написаны числа от 1 до 2013.

Сначала покажем, что 1987 карточек угадать не получится. Занумеруем карточки $A_1, \ldots, A_{2013}$ и покажем, как нужно отвечать, чтобы ни одно из чисел на карточках $A_1, \ldots, A_{27}$ определить не удалось.

При каждом $i = 1, \ldots, 9$ объединим карточки $A_{3i-2}, A_{3i-1}, A_{3i}$ в тройку T_i. Если среди указанных 10 карточек присутствует карточка A_n с $n > 27$, то ответим число n. Если же все 10 карточек лежат в тройках, то в какой-то тройке T_i лежат хотя бы две карточки. В этом случае ответим число, стоящее на ребре между этими карточками на рисунке 12. Этим ответам удовлетворяют такие две ситуации: на карточках с номерами, большими 27, написаны их номера и либо на каждой карточке из троек стоит число на ребре, выходящем из нее против часовой стрелки, либо – выходящем по часовой стрелке. Значит, ни одного из чисел на карточках в тройках определить нельзя.

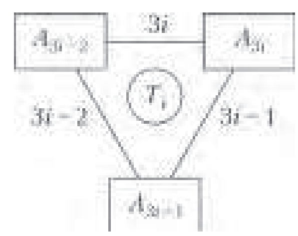

Рис. 12

Осталось доказать, что числа на всех карточках, кроме 27, можно определить. Для этого мы покажем, что если задать все возможные вопросы о каких-то 28 карточках, то по ответам на них получится определить число на одной из этих карточек. Затем эту карточку можно будет заменить другой и повторить процедуру. Действуя так, определим числа на всех карточках, кроме 27.

Нам потребуется следующая **лемма:**

Пусть в графе не менее чем $3n-2$ вершины и не более чем $3n-2$ ребра ($n \geq 2$). Тогда найдутся n вершин, между которыми нет ребер.

Докажем это утверждение индукцией по n. Сразу заметим, что можно выкинуть несколько вершин и после этого добавить несколько ребер так, чтобы и вершин, и ребер стало по $3n-2$. При $n = 2$ на 4 вершинах меньше 6 ребер, значит, какая-то пара вершин не соединена ребром, и можно взять эти вершины.

Пусть теперь $n > 2$. Обозначим степени вершин через $d_1, \ldots, d_{3n-2}$. Тогда $d_1 + \ldots + d_{3n-2} = 2(3n-2)$, поэтому либо найдутся число $d_i < 2$ и число $d_j > 2$, либо степени всех вершин равны 2. В первом случае выкинем из графа i-ю и j-ю вершины, а также единственного соседа i-й вершины (если он вообще есть). Мы выкинем не более 3 вершин и не менее 3 ребер. Во втором случае выкинем произвольную вершину (пусть ее номер равен i) и двух ее соседей. Так как их степени равны 2, то мы выкинем не менее 3 ребер (и ровно 3 вершины). В оставшемся графе по предположению индукции найдется $n-1$ вершина без ребер между ними. Добавив к ним i-ю вершину, получим требуемый набор из n вершин. Лемма доказана.

Продолжим решение задачи. Пусть мы задали все вопросы о 28 карточках и пусть $c_1, \ldots, c_k$ – встречающиеся в ответах. Отметим, что $k \le 28$. Для каждого $i = 1, \ldots, k$ рассмотрим все десятки карточек, в ответ на которые мы получали число c_i. Обозначим их пересечение через S_i (ясно, что это множество непусто, так как оно содержит карточку с числом c_i). Если в этом множестве один элемент, то это и есть карточка с числом c_i, и мы определили число на ней.

В противном случае в каждом из множеств хотя бы по две карточки. При каждом i выберем две карточки в S_i и соединим их ребром. Мы получим граф, удовлетворяющий условию леммы при $n = 10$, а значит, в нем можно выбрать 10 карточек без ребер между ними. Ответом на эту десятку было какое-то число c_i. Но тогда в этой десятке должно было содержаться множество S_i, т.е. две карточки из десятки соединены соответствующим ребром. Противоречие, завершающее решение задачи.

5. Пусть $a_0 < a_1 \ldots < a_{100}$ – выбранные числа, упорядоченные по возрастанию. Сумма десяти разностей $a_{10} - a_0$, $a_{20} - a_{10}, \ldots$ $\ldots$, $a_{100} - a_{90}$ равна $a_{100} - a_0 \le 1000$, поэтому одна из этих разностей не превосходит 100. Пусть это разность $a_{10i+10} - a_{10i}$. Тогда

$$0 < a_{10i+1} - a_{10i} < a_{10i+2} - a_{10i} < \ldots < a_{10i+10} - a_{10i} \le 100,$$

и мы нашли требуемые 10 разностей.

6. Возможны два случая.

Случай 1. Предположим, что $abcd \ge 16$. Тогда по неравенству между средним квадратичным и средним арифметическим имеем

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \ge 4\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2 \ge$$
$$\ge 4\left(\frac{abcd}{8}\right)^2 = \frac{(abcd)^2}{16} \ge abcd,$$

что и требовалось.

Случай 2. Пусть теперь $abcd < 16$. Тогда по неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим имеем

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \ge 4\sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2} = \sqrt{16abcd} > \sqrt{a^2b^2c^2d^2} = abcd,$$

что и требовалось доказать.

8. Обозначим окружность, описанную около треугольника ABC, через Ω. Пусть биссектриса CI пересекает Ω повторно в точке S (рис.13). Тогда, как известно, $SA = SB = SC$, т.е. точка S – центр окружности Γ. Из симметрии получаем, что точка Z лежит на прямой SC.

Пусть общие касательные к окружностям ω и Γ касаются Γ

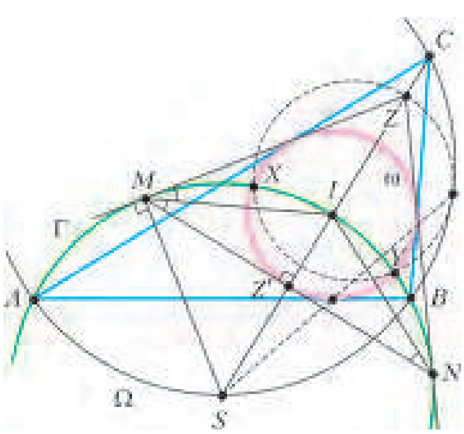

Рис. 13

в точках M и N. Линия центров SI является серединным перпендикуляром к отрезку MN, поэтому $\angle IMN = \angle INM = \angle IMZ$ (последнее равенство верно, поскольку прямая MZ касается Γ). Значит, MI – биссектриса угла ZMN, т.е. расстояния от I до ZM и MN равны. Поскольку ω касается ZM, она также касается прямой MN в некоторой точке Z'. Из соображений симметрии следует, что эта точка лежит на SI.

Прямоугольные треугольники $SZ'M$ и SMZ подобны, поэтому $SZ \cdot SZ' = SM^2$. Это означает, что при инверсии относительно окружности Γ точка Z' перейдет в точку Z. Значит, окружность ω, содержащая точки X, Y и Z', перейдет в описанную окружность треугольника XYZ. Далее, при такой инверсии прямая AB переходит в окружность Ω. Поскольку ω и AB касаются, то их образы тоже будут касаться. Что и требовалось доказать.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП XLVII ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс

1. Перейдем в систему отсчета, связанную с одной из частиц – например, с первой. Тогда вторая частица начинает движение со скоростью $5v$ и ускорением $5a$ (рис.14). Пусть вторая частица двигалась вдоль оси x. В новой системе отсчета угол α между этой осью и начальной скоростью (и начальным ускорением) найдем из условия перпендикулярности скоростей (и ускорений частиц) в старой системе отсчета:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}, \quad \alpha = 36{,}87°.$$

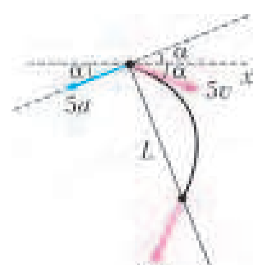

Рис. 14

По аналогии с задачей о дальности полета тела, брошенного под углом 2α к вертикали, получим

$$L = \frac{(5v)^2 \sin 4\alpha}{5a} = \frac{5v^2 \sin 4\alpha}{a} = 500 \text{ м}.$$

Относительная скорость станет минимальной в тот момент, когда вектор скорости окажется перпендикулярным вектору ускорения. Таким образом,

$$v_{\text{отн мин}} = 5v \sin 2\alpha = 48 \text{ м/с}.$$

2. Пусть в первом случае столб воды имеет длину $L_{\text{в}}$, а столб льда – $L_{\text{л}}$. Тогда

$$L_{\text{в}} + L_{\text{л}} = L_2.$$

Так как масса содержимого между поршнями постоянна, то

$$L_{\text{в}}\rho_{\text{в}} + L_{\text{л}}\rho_{\text{л}} = L_1\rho_{\text{в}}.$$

Поскольку тепловые потоки через лед и воду равны, то

$$\frac{kS(t_2 - t_0)}{L_{\text{в}}} = \frac{4kS(t_0 - t_1)}{L_{\text{л}}}, \text{ где } t_0 = 0\ °\text{C}.$$

Отсюда получим

$$L_{\text{в}} = 8 \text{ см}, \text{ и } L_2 = 11L_{\text{в}} = 88 \text{ см}.$$

Тепловой поток P через каждое сечение цилиндра одинаков:

$$P = \frac{kS(t_2' - t_1')}{\Delta L},$$

где t_1', t_2' – температуры слева и справа от фрагмента цилин-