А. П. Киселев, Влияние неоднородности упругой среды на возбуждение поперечных волн цилиндрическим излучателем, *Докл. АН СССР*, 1987, том 293, номер 2, 330–332

УДК 550.834:517.95:539.3 ГЕОФИЗИКА

А.П. КИСЕЛЕВ

ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ УПРУГОЙ СРЕДЫ НА ВОЗБУЖДЕНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ИЗЛУЧАТЕЛЕМ

(Представлено академиком Е.И. Шемякиным 10 XI 1985)

Работа посвящена обобщению классической теории цилиндрического излучателя [1] на случай плавно-неоднородной среды. В предположении о наличии в задаче нескольких малых параметров получены асимптотические формулы, позволяющие оценить влияние градиентов скоростей и плотности на направленность вытянутого, но короткого по сравнению с длиной волны излучателя.

Работа распадается на две части. Сначала в предположении, что радиус полости мал, хилановская краевая задача [1] заменяется асимптотически эквивалентной задачей с источником, распределенным вдоль линии. Затем исследуется влияние плавной неоднородности среды на поле этого линейного источника.

1. Пусть в изотропной неоднородной упругой среде, характеризуемой параметрами Ламе́ $\lambda(\mathbf{R})$, $\mu(\mathbf{R})$ и объемной плотностью $\rho(\mathbf{R})$, гладко зависящими от трех координат $\mathbf{R} \equiv (x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$, вырезана цилиндрическая полость $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2} < \epsilon$. Смещения $\mathbf{u}(R, \epsilon)$ среды, предполагаемые гармоническими по времени с частотой ω, описываются уравнениями

$$(1) \qquad l(\mathbf{u}) = 0, \quad r > \epsilon;$$

$$(2) \qquad l_j(\mathbf{u}) \equiv \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{mj}(\mathbf{u})}{\partial x_m} + \rho\omega^2 u_j,$$

$$(3) \qquad \sigma_{mj}(\mathbf{u}) = \mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_j}\right) + \lambda\delta_{mj}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}.$$

Временную зависимость в виде множителя $e^{-i\omega t}$ мы опускаем.

На границе полости задается неравномерное по длине осесимметрическое давление

$$(4) \qquad \mathbf{t}(\mathbf{u}) = \epsilon^{-2} p(z)\mathbf{n}, \quad r = \epsilon;$$

где $\mathbf{n} = (n_1, n_2, 0)$ – единичная нормаль к цилиндру $r = \epsilon$,

$$(5) \qquad t_j(\mathbf{u}) \equiv \sum_{m=1}^{3} \sigma_{mj}(\mathbf{u}) n_m,$$

а $p(z)$ – гладкая функция, тождественно равная нулю при $|z| > L$.

На бесконечности предполагается выполненным условие излучения.

Множитель ϵ^{-2} в (4) обеспечивает постоянство мощности внешних сил (другими словами, существование конечного предела функции $\mathbf{u}(\mathbf{R}, \epsilon)$ при $\epsilon \to 0$.

2. Поведение поля $\mathbf{u}(\mathbf{R}, \epsilon)$ при $\epsilon \to 0$ исследуется методом сращивания асимптотических разложений [2–5], одно из которых (внутреннее) пригодно вблизи полости, а другое (внешнее) – на некотором удалении от нее. Подобная задача для малого сферического излучателя рассмотрена в [6].

В результате явного построения двух членов внутреннего разложения удается показать, что внешнее решение

$$\mathbf{U}(\mathbf{R}) = \lim_{\epsilon \to 0} \mathbf{u}(\mathbf{R}, \epsilon), \quad r > 0,$$

удовлетворяет во всем пространстве уравнению

$$(6)\qquad \mathbf{l}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}, \quad \mathbf{R} \in \mathbb{R}^3,$$

с сосредоточенным на участке $(-L, +L)$ оси z источником

$$(7)\qquad \mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{R}) = -\pi\left\{\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\,p\nabla_\perp - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\lambda}{\mu}\,p\right)\mathbf{e}_z\right\}\delta(\mathbf{R}_\perp),$$

$\nabla_\perp = \mathbf{e}_x \dfrac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \dfrac{\partial}{\partial y}$, $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ – орты осей x, y, z; $\delta(\mathbf{R}_\perp) = \delta(x)\delta(y)$, δ – одномерная дельта-функция. На бесконечности выполнено условие излучения.

Выражение (7) легко представить в виде суперпозиции распределенных по оси z элементарных точечных источников: центров расширения $\nabla\delta(\mathbf{R}_\perp)\delta(z-\zeta)$ и вертикальных сил $\mathbf{e}_z\delta(\mathbf{R}_\perp)\delta(z-\zeta)$; $|\zeta| \leqslant L$.

3. Для исследования поля, возбуждаемого линейным источником (7), сделаем еще два предположения, обычно выполняющихся в сейсмических исследованиях.

Допустим, во-первых, что для частоты ω среда плавно-неоднородна, т.е.

$$(8)\qquad \frac{\omega}{a} D \gg 1,$$

где D – характерный масштаб неоднородности среды,

$$(9)\qquad \frac{1}{D} = \max\left\{\frac{|\nabla a|}{a}, \frac{|\nabla b|}{b}, \frac{|\nabla \rho|}{\rho}\right\},$$

$a = (\lambda + 2\mu)^{1/2}\rho^{-1/2}$ и $b = \mu^{1/2}\rho^{-1/2}$ – скорости продольной и поперечной волн.

Условие (8) позволяет воспользоваться результатами [7, 8] по возбуждению поперечных волн центром расширения.

Далее вклады элементарных источников суммируются. Эта процедура существенно упрощается, если предположить дополнительно, что длина излучателя мала по сравнению с длиной волны

$$(10)\qquad \omega L/b \ll 1.$$

При условиях (9), (10) сферический слой

$$(11)\qquad a/\omega \ll R \ll \sqrt{Db/\omega},$$

$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, оказывается для линейного излучателя (7) дальней зоной, и вместе с тем искривление лучей из-за неоднородности среды в (11) незначительно. Поле $\mathbf{U}(\mathbf{R})$ представимо в (11) суммой продольных и поперечных сферических волн. В частности, наиболее существенная часть поперечной волны имеет в (11) вид

$$(12)\qquad \mathbf{U}^b \sim \frac{C}{\rho(0)b^2(0)}\{\psi - (\psi, \mathbf{s})\mathbf{s}\}\,\frac{\exp(i\omega R/b)}{R},$$

где $\mathbf{s}$ – единичный вектор, направленный из начала координат к наблюдателю, C – постоянная, определяемая только конструкцией излучателя,

$$(13)\qquad \psi = \mathbf{H} + \mathbf{K},$$

причем

$$(14)\qquad \mathbf{H} = 2\,\frac{i\omega}{b(0)}\cos\theta\,\mathbf{e}_z, \quad \cos\theta = (\mathbf{e}_z, \mathbf{s}),$$

H – хилановская функция направленности [1], отвечающая однородной среде, а **K** – низкочастотная добавка, обусловленная неоднородностью среды.

Наибольший интерес представляет поправка **K** для направлений, перпендикулярных к оси z $(\theta = \pi/2)$, в которых, если среда однородна, поперечная волна не излучается.

В результате приведенных выше выкладок, опирающихся на результаты [7, 8], найдено, что при $\theta \approx \pi/2$

$$(15)\quad \mathbf{K} = -\gamma^2 \frac{4 \cdot \nabla b/b + \nabla\rho/\rho}{\gamma^2 - 1}, \quad \gamma \equiv \frac{a}{b}.$$

Параметры среды берутся здесь при **R** = 0.

Аналогичный результат для продольной волны мы не приводим.

Лучевой метод [9] позволяет продолжить поле из слоя (11) на любые расстояния.

4. Оценим величину найденной добавки к полю при $\theta = \pi/2$ для $|\nabla b| = 4\ \text{с}^{-1}$, $|\nabla\rho| = 0$, $\gamma = \sqrt{3}$, $\omega = 2\pi \cdot 25$ Гц. Если $\nabla b(0) \parallel \mathbf{e}_z$, то поле, излучаемое в плоскости $\theta = \pi/2$, составляет 15% от хилановского поля в направлении его максимума $\theta = \pi/4$. Если же $\nabla b(0) \parallel \mathbf{e}_x$, то поправка на неоднородность среды обусловливает такую же величину поперечной волны в направлении $\mathbf{e}_y$.

Автор признателен И.Р. Оболенцевой, А.В. Тригубову и Е.И. Шемякину за обсуждение результатов.

Научно-производственное объединение "Рудгеофизика", Ленинград

Поступило 19 XI 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Heelan P.A.* – Geophysics, 1953, vol. 18, № 3, p. 685–696. 2. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с. 3. *Datta S.K.* – Mechanics Today, 1976, vol. 4, p. 145–205. 4. *Ильин А.М.* – Матем. сб., 1976, т. 99, № 4, с. 514–538. 5. *Готлиб В.Ю.* – Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1976, т. 62, с. 52–59. 6. *Киселев А.П.* – Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 4, с. 119–125. 7. *Киселев А.П.* – ДАН, 1974, т. 219, № 4, с. 829–831. 8. *Киселев А.П.* – Вопр. динам. теории распростр. сейсм. волн, 1975, т. 15, с. 6–27. 9. *Алексеев А.С., Бабич В.М., Гельчинский Б.Я.* – Там же, 1961, т. 5, с. 3–24.

УДК 551.521.31:541.18 ГЕОФИЗИКА

А.Г. СУТУГИН

ЗАКОНЫ БРОУНОВСКОЙ КОАГУЛЯЦИИ В СИСТЕМЕ С ПЕРЕМЕННОЙ КОНЦЕНТРАЦИЕЙ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ

(Представлено академиком И.В. Петряновым-Соколовым 16 I 1986)

Уравнения кинетики коагуляции хорошо известны, но обычно они записываются для системы с постоянной концентрацией дисперсной фазы и постоянной температурой. Между тем и в атмосфере, и в технологических аппаратах коагуляция, как правило, протекает одновременно с процессами разбавления системы, изменения температуры. Оценка коагуляции в этих случаях затруднена. Примером труд-