Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. В. Аксенов, Симметрии и фундаментальные решения многомерного обобщенного осесимметрического уравнения Лапласа,
Дифференц. уравнения, 1995, том 31, номер 10, 1697–1700

https://www.mathnet.ru/de8840

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.81
6 декабря 2025 г., 05:21:19

1995. Т. 31, № 10. С. 1697 — 1700

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956

СИММЕТРИИ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО ОБОБЩЕННОГО ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

А. В. Аксенов

Фундаментальные решения линейных уравнений математической физики зачастую являются инвариантными относительно преобразований, допускаемых исходным уравнением [1, 2]. В настоящей работе сформулирован алгоритм нахождения фундаментальных решений линейных уравнений с частными производными на основе использования допускаемой группы точечных преобразований. Найдены точечные симметрии и инвариантные фундаментальные решения многомерного обобщенного осесимметрического уравнения Лапласа.

1. Нахождение симметрий линейных уравнений с частными производными, описывающих фундаментальные решения. Пусть дано линейное дифференциальное уравнение с частными производными p-го порядка

$$Lu \equiv \sum_{|\alpha|=0}^{p} A_\alpha(x) D^\alpha u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^m. \tag{1}$$

Здесь приняты стандартные обозначения: $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ — мультииндекс с целочисленными неотрицательными компонентами, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$, $D^\alpha \equiv (\partial/\partial x^1)^{\alpha_1} \ldots (\partial/\partial x^m)^{\alpha_m}$. Фундаментальные решения уравнения (1) являются решениями уравнения

$$Lu = \delta(x - x_0). \tag{2}$$

В работе [3] показано, что уравнение (1) при $p \geq 2$ и $m \geq 2$ может допускать операторы симметрии только следующего вида:

$$X = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} = 0.$$

Основная алгебра Ли операторов симметрии уравнения (1) как векторное пространство есть прямая сумма двух подалгебр: подалгебры, состоящей из операторов вида

$$X = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + \zeta(x) u \frac{\partial}{\partial u}, \tag{3}$$

и бесконечномерной подалгебры, порожденной операторами

$$X = \varphi(x) \partial/\partial u, \tag{4}$$

где $\varphi(x)$ — произвольное решение уравнения (1). Отметим, что операторы (4), очевидно, являются операторами симметрии уравнения (2). В дальнейшем рассматриваются лишь операторы вида (3).

Обозначим через $\underset{p}{X}$ продолжение порядка p оператора (3).

Предложение 1. *Для того чтобы инфинитезимальный оператор вида* (3) *являлся оператором симметрии уравнения* (1), *необходимо и достаточно, чтобы существовала функция* $\lambda = \lambda(x)$, *удовлетворяющая тождеству*

$$\underset{p}{X}\,(Lu) \equiv \lambda(x)\,Lu \tag{5}$$

для любой функции $u = u(x)$ *из области определения уравнения* (1).

Теорема. *Алгебра Ли операторов симметрии уравнения* (2) *является подалгеброй алгебры Ли операторов симметрии уравнения* (1), *выделяемой соотношениями*

$$\xi^i(x_0) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{6}$$

$$\lambda(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \xi^i(x_0)}{\partial x^i} = 0. \tag{7}$$

Доказательство. Оператор симметрии уравнения (2) в силу непрерывности его координат в точке x_0 является оператором симметрии уравнения (1). Условие (6) следует из определения симметрии. Оно означает, что точка x_0 является неподвижной точкой допускаемой группы преобразований уравнения (2). Рассмотрим однопараметрическую группу преобразований уравнения (2), соответствующую оператору симметрии (3):

$$\bar{x}^i = f^i(x, a), \quad i = 1, \ldots, m, \quad \bar{u} = g(x, a)u, \tag{8}$$

где $f^i(x, 0) = x^i$, $g(x, 0) = 1$, a — параметр группы. Формула для преобразования δ-функции имеет вид [4] $\delta(\bar{x} - \bar{x}_0) = J^{-1}(x_0, a)\delta(x - x_0)$, где $J(x, a) = \det(\partial \bar{x}^i / \partial x^j)$. В силу уравнений Ли для независимых переменных $d\bar{x}^i/da = \xi^i(\bar{x})$, $\bar{x}^i(0) = x^i$, $i = 1, \ldots, m$, якобиан $J(x, a)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \ln J(x, a)}{\partial a} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \xi^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} \tag{9}$$

из которого, используя условие (6), находим

$$J(x_0, a) = \exp\left(a \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \xi^i(x_0)}{\partial x^i}\right).$$

Таким образом, формула для преобразования δ-функции принимает вид

$$\delta(\bar{x} - x_0) = \exp\Big(-a \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \xi^i(x_0)}{\partial x^i}\Big)\delta(x - x_0). \tag{10}$$

Из формулы для ряда Ли $\bar{L}\bar{u} = \exp(a\,\underset{p}{X})Lu$ получаем, что левая часть уравнения (2) преобразуется следующим образом: $\bar{L}\bar{u} = F(x, a)Lu$ и при этом в силу условия (6) в точке x_0 справедливо соотношение

$$F(x_0, a) = \exp(a\lambda(x_0)). \tag{11}$$

Из (10), (11) получаем условие (7). Можно показать, что условия (6), (7) справедливы и для коммутатора двух операторов симметрии уравнения (2). Следовательно, операторы симметрии уравнения (2) образуют подалгебру алгебры Ли операторов симметрии уравнения (1). Теорема доказана.

2. Алгоритм построения фундаментальных решений. Сформулируем алгоритм нахождения фундаментальных решений на основе использования симметрий.

1. Нахождение общего вида оператора симметрии уравнения (1) и соответствующей ему функции $\lambda(x)$, удовлетворяющей тождеству (5).

2. Получение по найденному оператору симметрии уравнения (1) общего вида оператора симметрии уравнения (2) на основе ограничений (6), (7).

3. Построение инвариантных фундаментальных решений.

4. Получение новых фундаментальных решений из известных с помощью симметрий уравнения (2) (производство решений).

Отметим, что при нахождении обобщенных инвариантных фундаментальных решений необходимо искать инварианты в классе обобщенных функций [5, 6].

3. Симметрии многомерного обобщенного осесимметрического уравнения Лапласа. Рассмотрим многомерное обобщенное осесимметрическое уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{(\partial x^0)^2} + \frac{\nu}{x^0}\frac{\partial u}{\partial x^0} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{(\partial x^k)^2} = 0, \quad \nu \in \mathbb{R}^1. \tag{12}$$

Отметим, что при значениях ν, являющихся натуральными числами, функция $u = u(x^0, x^1, \ldots, x^n)$ будет решением уравнения (12) тогда и только тогда, когда функция $U(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^{\nu+1}) = u(((y^1)^2 + \ldots + (y^{\nu+1})^2)^{1/2}, x^1, \ldots, x^n)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в евклидовом пространстве $E^{n+\nu+1}$.

Решение $u_{(\nu)}$ уравнения (12), соответствующее параметру ν, связано с решением $u_{(2-\nu)}$ соотношением [7] $u_{(\nu)} = (x^0)^{1-\nu}u_{(2-\nu)}$. Поэтому, чтобы не рассматривать обычное многомерное уравнение Лапласа, симметрии которого исследованы [8], считаем, что $\nu(2-\nu) \neq 0$.

Предложение 2. *Общий вид координат оператора симметрии уравнения* (12) *при* $\nu(2-\nu) \neq 0$ *следующий:*

$$\xi^0 = 2x^0\Big(\sum_{k=1}^{n} a^k x^k + b\Big), \quad \xi^p = -a^p\sum_{k=0}^{n}(x^k)^2 + 2x^p\Big(\sum_{k=1}^{n} a^k x^k + b\Big) + \sum_{k=1}^{n} d^{pk}x^k + e^p,$$

$$\eta = \Big[-(\nu+n-1)\sum_{k=1}^{n} a^k x^k + c\Big]u,$$

где $d^{pk} = -d^{kp}$; a^p, b, c, d^{pk}, e^p *— постоянные;* $p = 1, \ldots, n$.

4. Симметрии многомерного обобщенного осесимметрического уравнения Лапласа с δ-функцией в правой части. Функция $\lambda(x)$, соответствующая выписанному оператору симметрии, имеет вид $\lambda(x) = -4b + c - (\nu+n+3)\sum_{k=1}^{n} a^k x^k$, откуда следует

Предложение 3. *Уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{(\partial x^0)^2} + \frac{\nu}{x^0}\frac{\partial u}{\partial x^0} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{(\partial x^k)^2} = \delta(x^0-1)\delta(r), \tag{13}$$

описывающее фундаментальные решения уравнения (12), допускает при $\nu(2-\nu)\neq 0$ *оператор симметрии с координатами*

$$\xi^0 = 2x^0\sum_{k=1}^{n} a^k x^k, \quad \xi^p = -a^p\sum_{k=0}^{n}(x^k)^2 + 2x^p\sum_{k=1}^{n} a^k x^k + \sum_{k=1}^{n} d^{pk}x^k + a^p, \quad \eta = -(\nu+n-1)\,u\sum_{k=1}^{n} a^k x^k. \tag{14}$$

Здесь $r = (x^1, \ldots, x^n)$; $d^{pk} = -d^{kp}$; $p = 1, \ldots, n$.

5. Геометрическая интерпретация группы симметрий многомерного обобщенного осесимметрического уравнения Лапласа с δ-функцией в правой части. Рассмотрим проекцию базисных операторов симметрии уравнения (13) на пространство независимых переменных. Из (14) находим

$$Y_{ij} = x^j\frac{\partial}{\partial x^i} - x^i\frac{\partial}{\partial x^j} \quad (i<j;\ i=\overline{1,n-1};\ j=\overline{2,n}), \quad Y_i = (1-|\mathbf{x}|^2)\frac{\partial}{\partial x^i} + 2x^i\sum_{k=0}^{n} x^k\frac{\partial}{\partial x^k} \quad (i=\overline{1,n}), \tag{15}$$

где $|\mathbf{x}|^2 = \sum_{k=0}^{n}(x^k)^2$.

В евклидовом пространстве E^{n+2} координаты точек сферы радиуса R с центром в начале координат удовлетворяют уравнению $\sum_{k=0}^{n+1}(s^k)^2 = R^2$. Рассмотрим стереографическую

проекцию сферы из центра проекции в точке $P(0,0,\dots,R)$ на гиперплоскость, задаваемую уравнением $s^{n+1} = -R$. Выразим связь между координатами точек $S(s^0, s^1, \dots, s^{n+1})$ сферы и координатами соответствующих точек $S'(x^0, x^1, \dots, x^n, -R)$ гиперплоскости следующим образом:

$$s^k = 4R^2x^k/(|\mathbf{x}|^2 + 4R^2) \quad (k = 0,1,\dots,n), \quad s^{n+1} = R(|\mathbf{x}|^2 - 4R^2)/(|\mathbf{x}|^2 + 4R^2), \tag{16}$$

или, наоборот, $x^k = 2s^k/(1 - s^{n+1}/R) \quad (k = 0,1,\dots,n), \quad R = \Big(\sum\limits_{k=0}^{n+1}(s^k)^2\Big)^{1/2}$.

В переменных (16) операторы (15) при $R = 1/2$ записываются в виде

$$Y_{ij} = s^j\frac{\partial}{\partial s^i} - s^i\frac{\partial}{\partial s^j} \quad (i < j;\ i = \overline{1,n-1};\ j = \overline{2,n}), \quad Y_i = -2\Big(s^{n+1}\frac{\partial}{\partial s^i} - s^i\frac{\partial}{\partial s^{n+1}}\Big) \quad (i = \overline{1,n}). \tag{17}$$

Операторы (17) задают в евклидовом пространстве E^{n+2} вращения сферы радиуса $R = 1/2$ вокруг оси s^0 (см. случаи $n = 1$ и $n = 3$ в [9, 10]).

6. Инвариантные фундаментальные решения многомерного обобщенного осесимметрического уравнения Лапласа. Оператор симметрии, задаваемый (14), имеет лишь два инварианта: $z = (\sum\limits_{k=0}^{n}(x^k)^2 + 1)/(2x^0)$, $w = (x^0)^{(\nu+n-1)/2}u$, используя которое, получаем

Предложение 4. *Решение уравнения (13), инвариантное относительно оператора симметрии с координатами (14), имеет вид*

$$u = (x^0)^{\sigma-\mu}(z^2-1)^{-\mu/2}\Big[cP_\sigma^{-\mu}(z) - \frac{e^{-i\mu\pi}}{(2\pi)^{\mu+1}}Q_\sigma^\mu(z)\Big], \tag{18}$$

где $\mu = (n-1)/2$, $\sigma = -\nu/2$; $P_\sigma^{-\mu}(z)$, $Q_\sigma^\mu(z)$ — *функции Лежандра первого и второго рода* [11]; c — *произвольная постоянная.*

Можно показать, что фундаментальные решения уравнения (12), полученные в работах [7, 12], являются частными случаями (18).

В заключение отметим, что построение фундаментальных решений с помощью симметрий может использоваться и в случае уравнений с переменными коэффициентами, когда традиционный метод интегральных преобразований неприменим.

Автор благодарит Ю. Ю. Береста за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94 — 01 — 00490).

Литература

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., 1978.
2. *Ибрагимов Н. Х.* Азбука группового анализа. М., 1990.
3. *Bluman G.* // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1990. Vol. 145, N 1. P. 52 — 62.
4. *Choquet-Bruhat Y., De Witt-Morette C.* Analysis, Manifolds and Physics. Part 1: Basics. Amsterdam: North-Holland, 1982.
5. *Берест Ю. Ю.* // Докл. РАН. 1991. Т. 317, № 4. С. 786 — 789.
6. *Берест Ю. Ю.* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 10. С. 1796 — 1803.
7. *Diaz J. B., Weinstein A.* In: Studies in Mathematics and Mechanics. New York: Academic Press Inc., 1954. P. 97 — 102.
8. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. М., 1983.
9. *Ибрагимов Н. Х.* Динамика в мире де Ситтера. 1. Приближенное представление группы де Ситтера. М., 1990. (Препринт ИПМ АН СССР: 144).
10. *Свирщевский С. Р.* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 10. С. 1772 — 1781.
11. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М., 1973. Т. 1.
12. *Олевский М. Н.* // Докл. АН СССР. 1949. Т. 64, № 6. С. 767 — 770.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 22 июля 1994 г.